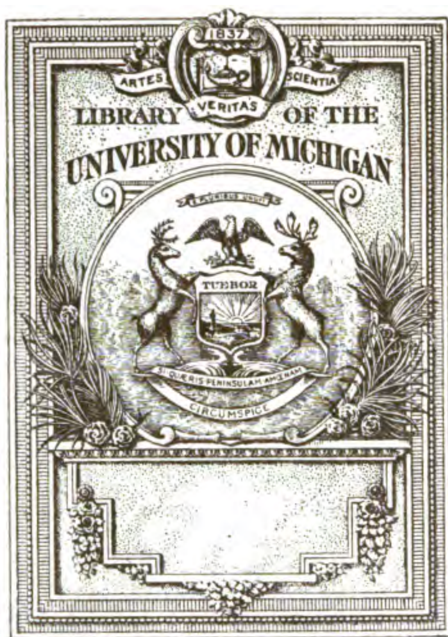

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Odén.
1839.

O. G. D. Aubert

J. H. van Swinden's

gewesenen Professors der Mathematik, Physik und Astronomie zu Amsterdam, Mitgliedes mehrerer gelehrten Gesellschaften ꝛc.

Elemente der Geometrie

aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt

von

C. F. A. Jacobi

Professor an der Landesschule Pforta.

Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis
Causa, sed utilitas officiumque fuit.

Ovid.

Mit 405 Figuren auf 21 Tafeln.

Jena,
Friedrich Frommann.

1834.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
12-23-1922

Vorrede.

Die in einer zweiten durchaus umgearbeiteten und sehr vermehrten Auflage 1816 zu Amsterdam erschienenen: „Grondbeginsels der Meetkunde door J. H. van Swinden etc.“ vereinigen nach dem Urtheile nicht blos des Verfassers vorliegender Uebersetzung sondern auch anderer und zwar vollkommen sachkundiger Männer mehrere so erhebliche Vorzüge in sich, daß sie den bessern und besten unter der großen Anzahl der in den beiden letzten Decennien erschienenen geometrischen Lehrbücher mit Recht an die Seite gesetzt werden dürfen. Einfachheit und Schärfe in der Bestimmung der Grundbegriffe, naturgemäße Verknüpfung derselben unter einander, vollständige, durch einen dreißigjährigen Unterricht unterstützte Durcharbeitung des gesammten von der Elementargeometrie dargebotenen Stoffes, darauf gegründete wohl durchdachte Anordnung desselben, Gründlichkeit und Klarheit in der Behandlung einzelner Wahrheiten, strenge und consequente Durchführung der von Euclides und Archimedes befolgten sogenannten synthetischen Methode geben dem Ganzen dasjenige wissenschaftliche Gepräge, welches für ein mathematisches Lehrbuch überhaupt, besonders aber dann in Anspruch genommen wird, wenn dasselbe von Jünglingen benutzt werden soll, bei denen die formelle Ausbildung des Geistes der entschieden vorherrschende Zweck des Unterrichtes ist. Zur glücklichen Förderung eben dieses wichtigen Zweckes dienen aber auch die zahlreichen Anmer-

kungen, die neben nützlicher Belehrung mannichfacher Art, eine Menge trefflicher Winke sowohl über das Wesen und die Natur einzelner Sätze und Beweise, als auch über den Zusammenhang und das gegenseitige Verhältniß mehrerer unter und zu einander enthalten, und dadurch dem Lernenden Vieles zum Bewußtsein bringen, was einer gründlichen und fruchtbringenden Auffassung des Ganzen ungemein dienlich ist.

Eine für ein Lehrbuch, besonders wenn es für höhere Bildungsanstalten bestimmt ist, durchaus angemessene, ja nothwendige Einrichtung ist die von unserm Verfasser getroffene, nach welcher die Beweise zu den aufgestellten Lehrsätzen mit Sorgfalt und Umsicht angedeutet, aber nur selten und ausnahmsweise vollständig ausgeführt sind. Denn soll die Mathematik als Unterrichtsgegenstand auf gelehrten Schulen wirklich das leisten, was mit Recht von ihr erwartet und gefordert werden darf, soll sie den ihr gebührenden Antheil an der Erstrebung des letzten Zweckes alles Schulunterrichtes, einer gründlichen, harmonischen, zu höhern Studien befähigenden Durchbildung des jugendlichen Geistes erlangen, so ist die erste zu erfüllende Bedingung die, daß die Lernenden zu ununterbrochener angestrengter Selbstthätigkeit dadurch angehalten werden, daß man von ihnen schriftliche Ausarbeitung des von dem Lehrer Vorgetragenen fordert. Wie einst Euklides dem Beherrscher Aegyptens mit Bestimmtheit erklärte, daß es einen besondern Weg zur Mathematik für Könige nicht gebe, so darf man auch hier zuversichtlich behaupten, daß von dem mathematischen Unterrichte für unsere Schüler, ohne die genannte Art von Selbstthätigkeit, durchaus kein Heil zu hoffen ist, da ein vollkommen klares und durchdringendes Verständniß, durch welches der Lernende die ihm durch den Lehrer mitgetheilten Wahrheiten sich geistig aneignet, auf einem andern Wege, als dem angegebenen, sich nicht erreichen läßt. Soll aber der Lehrer mit Grund erwarten dürfen, daß die Schüler diese erste und nothwendige Bedingung für das Gelingen des Unterrichtes auch wirklich und vollständig erfüllen, so ist es aus sehr nahe liegenden Gründen nothwendig, daß das in ihren Händen befindliche Lehrbuch ihnen nicht Alles, was sie nöthig haben, in ganzer Vollständigkeit darbietet.

Die fortwährende und genaue Rücksicht, die unser Verfasser auf Euklid's Elemente nimmt, und die dadurch veranlaßte gründliche Er-

läuterung vieler schwierigerer Stellen in denselben, ist gewiß nicht der geringste Vorzug seines Lehrbuches. Denn man braucht sich eben nicht zu der Einseitigkeit derer zu bekennen, die in diesem Werke des griechischen Mathematikers das non plus ultra aller geometrischen Lehrbücher für alle Zeiten erblicken, um gleichwohl das hohe und ausgezeichnete Verdienst, welches Euklides sich durch dasselbe erwarb, nach seinem ganzen Umfange zu würdigen, und der festen Ueberzeugung zu sein, daß nur dünkelhafte Anmaßung und arge Selbstverblendung sich unterfangen können, den Werth dieses Buches und das Verdienst seines Verfassers schmälern zu wollen. Daher fordert schon die dem Euklides, als dem Vater der Geometrie, schuldige Dankbarkeit, daß wir ein gründliches Verständniß seiner Schriften unter uns zu erhalten suchen; denn dieses wird uns am sichersten und kräftigsten gegen jedes Verkennen seiner Verdienste schützen.

Neben Euklides ist zugleich auch durchgängig auf Legendre „den Euklides der neuern Zeit" *verwiesen, was um so zweckmäßiger erscheint, je anerkannter* der Werth der Legendre'schen Geometrie, je verbreiteter dieselbe auch in Deutschland, und je größer und eigenthümlicher der Reiz ist, zu sehen, wie verschiedene Wege oft zu einer und derselben Wahrheit führen.

Diese Vorzüge vornehmlich sind es, die dem durch einen mehr als zwanzigjährigen Gebrauch bewährten und vervollkommneten van Swinden'schen Lehrbuche einen durchaus ehrenvollen Platz unter den übrigen sichern und mich zu einer Uebersetzung desselben bestimmten. Bei dieser Uebertragung habe ich mich eben so wenig mit Aengstlichkeit an das einzelne Wort des Originals gebunden, als ich mich andererseits ohne Noth von demselben entfernt habe. An solchen Stellen, wo ich erheblichere Veränderungen, die mir nöthig oder doch wünschenswerth erschienen, vorgenommen habe, ist dieß ausdrücklich angezeigt worden. Nur für eine Stelle ist diese Anzeige hier noch nachzutragen. In dem Anhange des Verfassers, bei der Entwickelung der goniometrischen Functionen in Reihen, habe ich anstatt der Darstellungsweise, welche van Swinden von dem Holländischen Mathematiker de Gelder entlehnt, und die sich allerdings in mehrfacher Beziehung empfiehlt, diejenige gewählt, welche mein verehrter

und Freund, Herr Professor v. Münchow, in seiner Trigonometrie mitgetheilt hat, da sie mir noch Vorzüge vor der zuerst genannten zu haben scheint.

Bei einer größern Anzahl von Veränderungen, die, wie ich glaube, geringfügiger sind, habe ich freilich, eben dieser Geringfügigkeit willen und um den Raum zu andern Mittheilungen zu sparen, eine besondere Anzeige unterlassen. Die meisten derselben haben den gemeinschaftlichen Zweck, dem streng Holländischen des Buches ein mehr Deutsches Gepräge zu geben. So habe ich zuweilen eine kürzere und auch wohl längere Notiz, weil sie mir von blos örtlichem oder persönlichem Interesse zu sein schien, weggelassen, während ich dagegen ein andermal eine solche, wenn sie für Deutsche Leser Interesse hatte, hinzugefügt habe; eben so habe ich nicht selten anstatt der Holländischen Schrift, die unser Verfasser anführt, eine denselben Gegenstand behandelnde Deutsche citirt u. dergl. m. Ich fürchte nicht, daß man dieses Verfahren tadeln wird.

Die große Reichhaltigkeit des vorliegenden Lehrbuches, auf welche sein Verfasser schon in der Vorrede zur ersten Ausgabe als auf einen nicht unwesentlichen Vorzug desselben hinweist, habe ich zu erhöhen gesucht durch mehrere den einzelnen Büchern beigegebene Anhänge. Eine Zugabe überhaupt war, wie ich glaube, schon darum nothwendig, weil die Bereicherungen und Erweiterungen, deren neben andern Zweigen der Mathematik auch die Geometrie gerade in der Zeit sich zu erfreuen gehabt hat, welche seit dem Erscheinen der zweiten Auflage dieses Buches verflossen, viel zu bedeutend und wichtig sind, als daß sie noch ferner in den Lehrbüchern dieser Wissenschaft unberücksichtigt bleiben könnten. Gewiß würde daher auch unser Verfasser, hätte er eine dritte Auflage seiner Elemente erlebt, nicht unterlassen haben, die schönen neuern Arbeiten, besonders Deutscher und Französischer Mathematiker, wie sie vorzugsweise die Annales de Mathematiques par Gergonne, und das von Crelle herausgegebene Journal mittheilen, zu einer abermaligen bedeutenden Vermehrung und Bereicherung derselben zu benutzen.

Aber mich leitete bei Abfassung dieser Anhänge auch noch eine andere Rücksicht. Wenn, wie vorher bemerkt wurde, die erste Bedin-

gung für einen gedeihlichen Unterricht in der Geometrie ein gründliches auf dem oben angegebenen Wege durch die Lernenden zu erlangendes Verständniß der in den öffentlichen Lehrstunden erörterten Wahrheiten ist, so ist es nicht die einzige. Vielmehr muß zu ihr noch eine zweite hinzukommen. Der Schüler muß, und zwar verhältnißmäßig früh, zur Anwendung des Erlernten angeleitet werden, indem man ihn zum eignen Auffinden von Beweisen für geeignete Lehrsätze veranlaßt. Unter der Leitung eines umsichtigen und thätigen Lehrers sind diese Uebungen in der That ein mächtiger Hebel zur Entwickelung und Schärfung des Urtheils, und ganz geeignet die Wahrheit des Ausspruchs von dem großen Lagrange: „J'avois soin de revenir frequemment aux considerations géométriques, que je crois très-propres à donner au jugement de la force et de la netteté“, in ihr volles Licht zu setzen. Durch solche Uebungen wird offenbar der Lernende auf eine noch höhere Stufe der Selbstthätigkeit gehoben, als durch die zuerst erwähnten, durch sie also auch der Schlaffheit, *dieser so gefährlichen Feindin der studirenden Jugend, auf das kräftigste entgegengearbeitet* *); erst mit ihnen, wie man mit Recht sagen kann, beginnt der geometrische Unterricht seine schönsten Früchte zu tragen. Zu diesen Uebungen nun wünschte ich durch die genannten Anhänge das von unserm van Swinden bereits gelieferte Material hinreichend zu vervollständigen. Von diesem Gesichtspuncte aus bitte ich diese meine Arbeit zu beurtheilen. Bei ihr hatte ich eben so sehr den angehenden Lehrer, als den fähigeren und fleißigeren Schüler vor Augen. Jenem wollte ich das oft zeitraubende Aufsuchen des zu eignen freien Arbeiten der Schüler geeigneten Stoffes erleichtern, diesem ein größeres Feld für einen nützlichen Privatfleiß eröffnen. Zur Erreichung dieses Zweckes habe ich es wenigstens nicht an gutem Willen, wie ich mir bewußt bin, fehlen lassen. Ich habe an vielen Stellen oft mehrfach geändert und, wie ich hoffe, gebessert, mehrere größere Abtheilungen einzelner Anhänge habe ich wiederholt ganz umgearbeitet; aber gleichwohl fühle ich nur zu gut, wie viel auch jetzt noch meine Arbeit zu wünschen übrig läßt. Namentlich hat, um

*) L'esprit est paresseux, il faut prevenir sa lacheté naturelle et le tenir en haleine pour en developper toutes les forces et les avoir prêtes au besoin. Il n'y a que l'exercice pour cela. Lagrange.

nur dieß eine zu erwähnen, die überaus spärliche Muße, die gerade in den jüngst verflossenen Jahren meine Amtsgeschäfte mir übrig ließen, die Vollendung dieser Arbeit auffallend verzögert, und entbehrt nun schon darum, und weil eine längere ruhige Sammlung mir durchaus nicht vergönnt war, das Ganze an mehrern Stellen derjenigen Durcharbeitung, und derjenigen Gleichmäßigkeit, Einheit und Abgeschlossenheit, welche man wohl von einer solchen Arbeit zu fordern berechtigt ist.

Je weniger ich mir diese und ähnliche Mängel verhehle, desto geneigter wird man sein, meiner Versicherung Glauben zu schenken, daß es nicht eine leere Form und ein zur Schau Tragen einer erheuchelten Bescheidenheit ist, wenn ich mir für meine Arbeit die gütige Nachsicht der Leser dringend erbitte. Aus eben diesem Grunde werde ich jede Belehrung, die sachkundige Männer geneigt sein sollten, mir über einzelne Gegenstände zugehen zu lassen, mit wahrhaftem Danke erkennen und gewissenhaft benutzen.

Das Aeußere des Buches verdient gewiß volle Anerkennung; es ist der Art, daß der verdeutschte van Swinden sich nicht nur mit dem Holländischen, sondern mit jedem der bisher in Deutschland erschienenen Lehrbücher dieser Classe getrost messen darf. Die wackere Verlagshandlung hat sich dadurch ein wesentliches Verdienst um meine Arbeit erworben, gern bezeuge ich ihr dafür öffentlich meinen Dank.

Durch zweckmäßige, der Deutlichkeit keinen Eintrag thuende, Sparsamkeit des Druckes füllt das, was in dem Original acht und vierzig Bogen einnimmt, in der Uebersetzung, trotz der Anhänge, noch nicht fünf und dreißig.

Der gröbern, sinnentstellenden Druckfehler sollen, wie ich hoffe, verhältnißmäßig nur wenige zurückgeblieben sein. Die wenigen, welche eine freilich nur flüchtige Durchsicht mich bis jetzt hat entdecken lassen, befinden sich pag. 323; in den Formeln 683 und 684 fehlt der Parenthese auf der rechten Seite der Gleichung der Exponent 2. Die übrigen, die sich noch vorfinden sollten, ersuche ich die geneigten Leser selbst verbessern zu wollen.

Landesschule Pforta den 9. Jul. 1834.

Jacobi.

Alphabetisches Verzeichniß

der Männer, deren geometrische Entdeckungen in diesem Lehrbuche mitgetheilt, oder deren Schriften wenigstens angeführt sind.

Anmerk. Die mit einem * bezeichneten Artikel sind vom Uebersetzer beigefügt.

d'Alembert (Jean-le-Rond) (1717—1780) Melanges de Literature, d'Histoire et de Philosophie. Amsterd. 1760, 5 voll. in 8. Dieß Werk dieses berühmten Mathematikers ist wiederholt angeführt worden, wegen der guten Bemerkungen, welche sich darin über die Natur mathematischer Wahrheiten, über das Wesen geometrischer Beweise und ähnliche Gegenstände finden. — * Die hierher gehörigen Abhandlungen aus dem genannten Werke sind wieder abgedruckt in den 1821—1822 zu Paris erschienen: Oeuvres de d'Alembert 5 voll. in 8.

Anthonisse (Adriaan) Erfinder des Verhältnisses zwischen Durchmesser und Umkreis, (113:355) welches unter dem Namen Verhältniß des Metius bekannt ist, wird angeführt pag. 218.

Apollonius Pergaeus, lebte c. 200 v. Chr. Von den vielen bei Pappus erwähnten Schriften des „großen Geometers" sind uns vollständig erhalten nur die vier ersten Bücher seines Werkes über die Kegelschnitte; von den Büchern 5, 6 und 7 besitzen wir blos eine lateinische aus dem Arabischen zu Stande gebrachte Uebersetzung, und das achte Buch nur in einem Versuche zu dessen Wiederherstellung von dem verdienstvollen englischen Mathematiker Edmund Halley, welcher die beste Aus-

gabe dieser Apollonianischen Schrift besorgte unter dem Titel: Apollonii P. Conicorum libri octo, et Sereni de sectione coni et cylindri libri duo. Oxonii 1710 in Fol. Außerdem siehe Barrow.

Archimedes bereicherte und erweiterte die Geometrie durch die wichtigsten Entdeckungen in der zweiten Hälfte des dritten Jahrhunderts vor unserer christlichen Zeitrechnung. Das Jahr seines unglücklichen und gewaltsamen Todes ist 212. Die beste Ausgabe der Schriften dieses wahrhaft großen und seltenen Mannes ist folgende: Archimedis quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis, cura Jos. Torelli Graece et Latine Oxonii 1792 in Fol. — Außerdem siehe Barrow. Eine sehr gute französische Uebersetzung ist die von:

Peyrard Oeuvres d'Archimede Paris 1807, die sich auch durch sehr schätzbare Zugaben, wie z. B. durch eine Abhandlung über die Brennspiegel des Archimedes, so wie durch eine vortreffliche Abhandlung von Delambre über die Arithmetik der Griechen auszeichnet.

Eine ältere, für ihre Zeit auch durch ihre Anmerkungen nicht unverdienstliche, deutsche Uebersetzung ist von J. C. Sturm. Nürnberg 1670. Fol. * Eine neuere, höhern Anforderungen genügende von:

E. Nizze Archimedes von Syrakus vorhandene Werke rc. Stralsund 1824 in 4.

Auch einzelne Schriften des Archimedes haben Bearbeiter gefunden; hierher gehören unter andern:

Adriani Romani in Archimedis circuli dimensionem expositio et analysis. Wurceburgi 1598. Fol.

* Hauber (C. F.) Archimed's zwei Bücher über Kugel und Cylinder nebst dessen Kreismessung rc. Tübing. 1795, 8.

Tacquet hat seiner Ausgabe des Euclides viele wichtige Sätze aus Archimedes beigegeben unter dem Titel: Selecta ex Archimede theoremata.

Barrow (Isaac) (1630—1677) gab in einem Werke vereinigt heraus: Archimedis opera, Apollonii conicorum libri IV, Theodosii sphaerica; Londini 1675, 4. Die Beweise der einzelnen Sätze sind von Barrow mit möglichster Kürze und Deutlichkeit verfaßt. — Außerdem siehe Euclides.

Beaufort († 1728) wird angeführt pag. 55.

Bernoulli (Jacob) (1654 — 1705) ein ausgezeichneter Mathematiker; von ihm wird in diesem Lehrbuche blos angeführt der dritte Theil seiner berühmten: „positiones de seriebus infinitis“ die sich wieder abgedruckt finden in seinen zu Genf 1744 herausgekommenen Werken.

Bion († 1733) Traité de la construction et des principaux usages des instrumens de Mathematiques, Paris 1725, 4. Es giebt mehrere Ausgaben und Uebersetzungen dieses Buchs.

* Bohnenberger (J. G. F.) Astronomie. Tübingen 1811, 8. Außerdem siehe v. Lindenau.

Boscovich (Roger Joseph) (1711 — 1787) Voyage geographique et astronomique pour la mesure de deux degrés du Meridien. Paris 1770, 4. Dieß Werk erschien ursprünglich zu Rom in lateinischer Sprache.

Cagnoli Trigonometrie rectiligne et spherique, traduit de l'Italien par Chompré; 2me edit. Paris 1808, 4. Eins der vorzüglichsten Werke, die wir über diesen Gegenstand besitzen, besonders was die Anwendung der Trigonometrie auf größere Vermessungen, auf die Algebra, und Astronomie betrifft. Aus diesem Werke ist viel in dieses Lehrbuch aufgenommen worden, besonders in das VIII, und IX Buch.

Caille (de la) (1713 — 1762) Leçons de Mathematiques, Paris 1755, 8. — leçons d'Astronomie, Paris 1761, 8. Der Verf. wird in diesem Lehrbuche meist durch die Buchstaben L. C. bezeichnet und angeführt; es sind von ihm auch noch mehrere andere Werke, leçons de Mecanique, Leçons d'Optique etc. erschienen, die sämmtlich ein vortheilhaftes Zeugniß für den Verfasser ablegen.

Chapelle (de la) Institutions de Geometrie 4me edit. Paris 1765, 2 voll., 8. Dieses Werk wird häufig angeführt im ersten Abschnitt des VII Buches; außerdem noch einmal im IV B.

* Carnot (L. N. M.) Geometrie de Position, Paris 1803, 4.; aus dem Französischen übersetzt von H. C. Schumacher. Altona 1808 — 1810, 2 Thle, 8. — Das an sich schon sehr reichhaltige Werk enthält in seiner Deutschen Uebersetzung noch mehrere schätzbare Zugaben von Gauss.

Cartesius siehe Descartes.

Castillon (Jean de) ein durchaus vorzüglicher, mit dem Geiste der Geo-

metrie der Alten innig vertrauter Mathematiker, durch viele Schriften und Abhandlungen bekannt, von denen mehrere an verschiedenen Stellen dieses Buches angeführt werden, starb im hohen Alter im J. 1791.

Cavalieri Bonaventura, durch mehrere mathematische Schriften, besonders durch seine Geometria Indivisibilibus Continuorum promota etc. Bonon. 1653, 4., bekannt. — Er wird pag. 279 angeführt.

Clavius (Christophorus) Geometria practica, Mogunt. 1606, 4. Außerdem siehe Euclides. — Die gesammten Werke dieses mit Recht berühmten Mannes, der 1612 starb, sind in fünf Foliobänden herausgekommen.

Clerc (Sebastien le) Geometrie sur le papier et sur le terrain. Es giebt viele Ausgaben und Uebersetzungen dieses Buches.

Commandinus (Fridericus) ein durch die Herausgabe mehrerer Schriften griechischer Geometer verdienter und mit Recht geachteter Mathematiker seiner Zeit, starb 1571. Er wird pag. 278 angeführt.

* Crelle (Aug. Leop.) Journal für reine und angewandte Mathematik, Berlin 1826—1833, 11 Bde, 4. — Wird fortgesetzt.

* Crelle Lehrbuch der Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Geometrie, Berlin 1826—1827, 2 Bde, 8.

Cunn (Samuel) Construction and use of the Sector, London 1722, 8.

Delambre (1749—1822) Methodes analytiques pour la determination d' un arc du meridien, Paris 1799, 4. Viele in diesem Buche behandelten Gegenstände werden noch weiter ausgeführt in dem größern Werke desselben hochverdienten Verfassers: Base du systeme metrique, Paris 3 voll., 4. — Von ihm besitzen wir auch: Abregé d' Astronomie, Paris 1813, 8. — Außerdem siehe Archimedes und Ptolemaeus.

Deparcieux († 1768) Nouveaux Traités de Trigonometrie avec un traité de Gnomonique, Paris 1731, 4.

Descartes (René) oder Cartesius (1596 — 1650). Seine in diesem Lehrbuche angeführte Geometrie, welche zuerst 1637 erschien, gehört zu den in der Geschichte dieser Wissenschaft merkwürdigen Büchern, indem durch sie der Grund zu einer ganz neuen Behandlung der Geometrie gelegt wurde. Von den vielen Ausgaben und Uebersetzungen dieses Buches verdienen vorzugsweise genannt zu werden: Cartesii Geometria cum

Commentariis Francisci van Schooten Ed. 2[a]. Amstel. 1659, 4., und: Geometrie de Descartes avec un Commentaire par Rabuel, Lyon 1730, 4.

Dinostratus, welcher 370 v. Chr. lebte, wird in Anmerk. 6 zu 332 angeführt, indem er eine gerade Linie zu finden lehrte, welche von gleicher Länge mit einer Kreisperipherie und zwar vermittelst einer bestimmten krummen Linie, Quadratrix genannt, welche er entweder selbst erfand, oder doch wenigstens zu dem genannten Zwecke zuerst anwandte.

* Durrande (J. B.) ein ausgezeichneter junger französischer Mathematiker, von dem wir zwar kein selbstständiges Werk aber eine große Anzahl überaus schätzbarer Abhandlungen über verschiedene Gegenstände der Geometrie besitzen, die sich in den Annales de Mathem. etc. par Gergonne zerstreut finden. Von seinen Entdeckungen ist Vieles in die Anhänge, besonders in die zum 5., 6. und 7. und zum 11. und 12. Buche aufgenommen worden. Er starb noch sehr jung im J. 1825.

Eratosthenes ein berühmter griechischer Mathematiker, der ungefähr 270 — 190 v. Chr. meist zu Alexandrien lebte, wird bei der 9. Aufgabe des dritten Buches angeführt, wegen seiner Auflösung der Aufgabe: Zwischen zwei gegebenen Geraden zwei mittlere Proportionalen zu finden.

Euclides. Ungemein zahlreich sind die Ausgaben und Uebersetzungen von dem Werke „Στοιχεια“ dieses ausgezeichneten griechischen Mathematikers, der 300 J. vor unserer Zeitrechnung lebte und sich durch jenes Werk einen unsterblichen Namen erworben hat. Diese Elemente bestehen jetzt aus 15 Büchern; aber es ist höchst wahrscheinlich um nicht zu sagen gewiß, daß nur die 13 ersten vom Euclides selbst geschrieben sind, die beiden letzten dagegen einen andern, nämlich den Hypsicles zum Verfasser haben. Unter der fast zahllosen Menge von Ausgaben und Uebersetzungen, von denen sehr viele nur die sechs ersten Bücher sammt dem 11. und 12. enthalten, verdienen folgende hervorgehoben zu werden:

1. Praeclarissimus liber elementorum Euclidis etc. impr. Erhardus Ratdolt, Venet. 1492, Fol. (Die älteste Ausgabe.)
2. Euclidis elementorum libri XV etc. graece edid.

S. Grynaeus, Bas. 1533, ed. 2da. Bas. 1558. —. Besonders schätzbar wegen des sonst nirgends in der Sprache des Originals abgedruckten Commentars des Proclus.

3. Euclidis, quae supersunt omnia ex recens. Dav. Gregorii Graece et Lat. Oxonii 1703, Fol.

4. Peyrard Oeuvres d'Euclide en grec, en latin et en françois etc. 3 voll. Paris 1814—1818, 4. Als ein Auszug aus dieser Ausgabe ist anzusehen

* 5. Neide Euclidis elem. sex libri priores etc. Halis 1824, 8.

* 6. J. G. Camerer et C. F. Hauber Eucl. elem. graece et latine commentariis instructa etc. Berol. 1824, 8.

* 7. E. F. August Eucl. Elem. ex optimis libris in usum tironum graece edita, Berol. 1825—29, 2 voll., 8.

8. Euclidis Elem. Libri XV auctore C. Clavio, Francofurti 1607, 8. — Mit einem sehr ausführlichen, vieles Nützliche enthaltenden Commentar.

9. A. Tacquet Elem. (Euclideae) Geometriae planae ac solidae, quibus accedunt Selecta ex Archimede theoremeta etc. ed. nova Amstelod. 1783. Die Anmerkungen und Zugaben Tacquet's sind vorzüglich, noch durch andere bedeutend vermehrt erscheinen sie in der Ausg. die zu Rom 1745 in 2 Octavbänden erschien.

10. Robert Simson Elements of Euclid etc. Glasgow 1757, 4. — eilfte Ausgabe London 1808, 8. — Aus dem Englischen ins Deutsche übersetzt von Reder und herausgegeben von Niesert, Paderborn 1806, 8.

11. Koenig Elemens de Geometrie contenant les six premiers livres d'Euclide etc. à la Haye 1762, 4. Schätzbar wegen des guten Commentars zum V Buche.

* 12. Euklid's Elemente Funfzehn Bücher aus dem Gr. übersetzt von Lorentz, aufs Neue herausgegeben von Mollweide 4. Ausg. Halle 1818, 8.

* 13. Unter den Commentatoren des Euklides in neuerer Zeit nimmt einen vorzüglichen Platz ein der verstorbene Professor C. F. Pfleiderer zu Tübingen. Siehe dessen: Scholien zu Euclid's Elementen herausgegeben von Hauber und Plieninger, V Hefte. Stuttgart 1827, 8.

Euler (Leonhard) (1707—1783) Introductio in Analysin Infinitorum, Genevae 1748, 4. — Französische Uebersetzung durch

Labbey 1791, 2 Thle, 4. — Deutsche Uebersetzung durch *Michelsen*, Berlin 1788, 3 Thle, 8. Durch dieses, so wie durch viele andere Werke und Abhandlungen dieses wahrhaft großen und ausgezeichneten Mathematikers sind viele Zweige dieser Wissenschaft fast ganz umgestaltet.

Als Fortsetzung dieses Werkes soll der eignen Erklärung des Vf. gemäß, betrachtet werden:

* Schweins (Ferdinand) Analysis, Heidelb. 1820, 4.

Eutocius Ascalonita lebte im 6. Jahrh. unserer Zeitrechnung, und ist berühmt als Commentator des Archimedes und Apollonius; als solcher wird er an mehrern Stellen unseres Buches angeführt.

Fagnano Produzzioni Matematici etc. Pesaro 1751, 2 voll., 4.

Fay (du) dieser wackere Mathematiker, der noch jung 1739 starb, wird angeführt pag. 60, und 182.

* Feuerbach (Carl Wilhelm) Eigenschaften einiger merkwürdigen Puncte des geradlinigen Dreiecks 2c. Nürnberg 1822, 4. — Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide, Nürnberg 1827, 4. — Zwei Schriften, von geringerem äußern Umfange, die aber eben so sehr durch den Reichthum ihres Inhaltes als durch Gewandtheit in der Darstellung sich auszeichnen, und den Beruf des Vf. zu solchen Untersuchungen auf eine schöne Weise bekunden. Aus beiden Schriften sind mehrere Sätze in die verschiedenen Anhänge aufgenommen worden. Ihr Vf. ist leider! am 12. März d. J. im 37. Lebensjahre gestorben.

* Fischer (Ernst Gottfried) Lehrbuch der Elementarmathematik, Berlin 1820—1834, 5 Bde, 8. Dazu gehören zwei Hefte Anmerkungen.

Floryn (Jacob) Grondbeginsels der hoogere Meetkunde, Rotterdam 1794, 8.

Gauss (Carl Friedrich) Disquisitiones Arithmeticae, Lips. 1801, 8. Eine französische Uebersetzung dieses tiefsinnigen Werkes unter dem Titel: Recherches Arithmetiques, Paris 1810, 4. — Eine neue Ausgabe des Originals ist seit einigen Jahren angekündigt aber bis jetzt noch nicht erschienen.

Gelder (de) Beginsels der Meetkunde, Amsterdam 1810, 8. — Handleiding tot te beschouwende en werkdadige Meetkunst. Amsterd. 1806, 4.

Gellibrand († 1637) Trigonometria Britannica, sive de doctrina triangulorum libri duo, Goudae 1633, Fol.

* Gergonne (J. D.) Annales de Mathematiques pures et appliquées etc. Nismes 1810—1833, 21 voll., 4. — Vom 22. Bde sind nur das July- und August-Heft, und seit 10 Monaten gar nichts mehr erschienen, so daß zu fürchten steht, es werde diese überaus reichhaltige und schätzbare Zeitschrift, die eine reiche Ausbeute zu den Anhängen dieses Lehrbuches besonders zu den spätern geliefert hat, künftig nicht mehr fortgesetzt werden.

Girard (Albert) Invention nouvelle en Algebre, Amsterd. 1629, 4. Ein eben so wichtiges, als seltenes Buch.

Graaf (Abraham de) Analysis of Stelkundige ontknoping in Meetkunstige Werkstukken, Amsterd. 1706, 4.

Gregory (David) Treatise of practical Geometry, Edinburg 1715, 8. Dieß Werk wurde als Handschrift, schon seit dem 1708 erfolgten Tode des Vf. zum Unterricht gebraucht.

Grive (de la) Manuel de Trigonometrie pratique, Paris 1754, 8.

* Grunert (Joh. Aug.) Lehrbuch der Mathematik für die obern Classen höherer Lehranstalten, Brandenburg 1832, 4 Thle, 8. — Außerdem siehe Klügel.

* Haumann (C. Gottlieb) Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von den Berührungen. Breslau 1817, 8.

Hennert (Johann Friedrich) Professor zu Utrecht, ein tüchtiger Mathematiker, bekannt durch viele Schriften, unter andern auch durch seinen Cursus der reinen Mathematik, und den der angewandten, die beide in lateinischer Sprache, jener in drei, dieser in sechs Octavbänden erschien. Er starb 1813 im hohen Alter. In diesem Lehrbuche wird er angeführt pag. 187.

Hero aus Alexandrien, ein Zeitgenosse des Archimedes wird bei uns angeführt pag. 24, und im dritten Buche der Aufgaben, in der 2. Anmerk. zur 9. Aufg. als einer von denen, die es versuchten, zwischen zwei gegebenen Geraden zwei mittlere Proportionalen zu finden.

Hippias, der im 5. Jahrh. vor unserer Zeitrechnung lebte, ist Erfinder der krummen Linie, welche den Namen Quadratrix führt, und wird angeführt in der 6. Anmerk. zu 332.

Hire (de la) Sectiones Conicae, Parisiis 1685, Fol. Ein vorzügliches Werk über diesen Gegenstand, nach der Methode der Al-

ten verfaßt, deren Geist La Hire aufgefaßt hatte. Im ersten Theile des Buches befinden sich mehrere Sätze über die harmonische Theilung gerader Linien, und um dieser willen wird es im dritten Abschnitte des III Buches angeführt.

* Hirsch (Meier) Sammlung geometrischer Aufgaben. Berlin 1805 —1807, 2 Thle, 8.

Horrebow (Peter) In continuam proportionem harmonicam Mathemata 1737; abgedruckt im ersten Theile seiner:

Opera mathematico-physica, Hafniae 3 voll., 4.

* v. Huguenin Mathematische Beiträge ꝛc. Königsberg 1803, 4.

L'Huilier (Simon) Exposition elementaire des principes des calculs superieurs, Berlin 1786, 4. — Eine neue Bearbeitung und Erweiterung dieses Werkes ist: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris, Tubingae 1795, 4.

Elemens d'Analyse Geometrique et d'Analyse Algebrique etc. Paris 1809, 4. —

* De relatione *mutua capacitatis* et *terminorum figurarum* etc. *Varsaviae* 1782, 4.

* Polygonometrie ou de la mesure des figures rectilignes etc. Paris 1789, 4.

* Hoffmann (Joh. Jac. Ign.) der Pythagoräische Lehrsatz mit 32 Beweisen, 2. Ausg. Mainz 1821, 8.

Huygens (Christian) de Circuli magnitudine inventa, Lugd. B. 1654, wiederabgedruckt in dessen operibus variis L. B. 1724, 4. Dieser ausgezeichnete Mann lebte von 1629 bis 1695.

Hypsicles aus Alexandrien, lebte zur Zeit des Cl. Ptolemaeus oder etwas später. Er ist höchstwahrscheinlich der Verfasser von den beiden letzten Büchern der Elemente Euklid's.

Kaestner (Abraham Gotthelf) einer der bekanntesten Mathematiker neuerer Zeit, der als Professor zu Göttingen starb 1800 im hohen Alter. Von seinen vielen Schriften und Abhandlungen werden bei uns angeführt blos seine: Geometrischen Abhandlungen. Göttingen 1790—91, 2 Thle, 8.

Karsten (Wenc. Joh. Gust.) Mathesis theoretica elementaris atque sublimior. Rostochii et Gryphisw. 1760, 8. —

* Lehrbegriff der gesammten Mathematik. Greifswalde

1767—1778, 8 Thle, 8. aufs Neue herausgegeben von Mollweide, Leipzig 1812—1818.

* Klügel (Georg Simon) Mathematisches Wörterbuch ꝛc. fortgesetzt von Mollweide und beendigt von Grunert, Leipzig 1803—1831, 5 Thle, 8. Außerdem noch ein Supplementband, Leipzig 1833, dem noch ein zweiter folgen soll.

Kochansi wird angeführt pag. 225.

Koenig siehe Euclides.

Kraaijenhoff Precis historique des operations Geodesiques et Astronomiques faites en Hollande. La Haye 1815, 4.

Krafft (G. W.) Institutiones geometriae sublimioris, Tubingae 1753, 4. Der Verf., dessen Name durch diese so wie durch andere Schriften mit Recht bekannt geworden ist, starb 1754.

* Kries (Friedrich) Lehrbuch der reinen Mathematik. 5. Aufl. Jena 1831, 8.

Lacroix Elemens d'Algebre 12me edit. Paris 1818, 8. — * Deutsch von Hahn, Berlin 1805, 2 Thle, 8. und von Metternich, Mainz 1811, 8.

Lagny ein wackerer Mathematiker, durch mehrere gründliche Abhandlungen bekannt, starb 1733. Er wird angeführt 325, Anmerk. 3, und 332, Anm. 4.

Lambert (Johann Heinrich) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Berlin 1765, 3 Thle, 8. Dieser gründliche Gelehrte und scharfsinnige Mathematiker, Verfasser einer größern Zahl vorzüglicher Schriften starb den 25 Septbr. 1777.

Lamy († 1715) Elemens de Mathematiques ou Traité de la Grandeur, Amstel. 1710, 8. — eine sehr verdienstliche Schrift, von welcher wir blos den letzten Theil des achten Buches, welcher von der harmonischen Proportion handelt, benutzt haben.

Legendre (A. M.) Elemens de Geometrie 12me edit. Paris 1823, 8.— * Deutsch von Crelle, Berlin 1822, 8., 2. Aufl. 1833. Dieser ausgezeichnete, bis an das Ende seines Lebens unermüdet thätige, und um wesentliche Vervollkommnung mehrerer Zweige der Mathematik hochverdiente Mann starb im 81 J. seines Lebens zu Paris 1833.

* Leslie geometrische Analysis, aus dem Engl. übers. von J. Ph. Gruson, Berlin 1822. 8.

Leupold (Jacob) Theatrum machinarum, 5 Thle, Fol.

Lexell (Andreas) besonders bekannt als einer der Begründer der Polygonometrie, wird angeführt pag. 193.

* Lindenau (Bernhard von) und J. G. F. Bohnenberger Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften 3 Jahrgänge, Tübingen 1816—1819, 8.

Ludolf van Ceulen van den Cirkel 2de druk Leiden 1615, 4.

— Fundamenta arithmetica et geometrica etc. L. B. 1615, 4. Ludolf starb als Professor zu Leyden 1620.

Maclaurin (Colin) Treatise of Fluxions, Edinb. 1742, 4. in das Französische übersetzt unter dem Titel: Traité des Fluxions, Paris 1746, 4. Der ausgezeichnete Verfasser starb 1746.

Martin (Benjamin) Young Trigonometers Guide, Lond. 1736, 2 voll. 8. — ein sehr nützliches Buch.

Mauduit ein sehr tüchtiger, durch mehrere gute Schriften bekannter, Mathematiker, wird angeführt pag. 373.

Mayer (Johann Tobias) gründlicher und ausführlicher Unterricht in der praktischen Geometrie 1—3. Theil 4. Aufl. Göttingen 1814—1818, 8.; 4. Theil 1815, 5. Th. 1821.

Menechmus Bruder des *Dinostratus*, wird angeführt im dritten Buche der Aufgaben und zwar in der Anmerk. 2 zu Aufg. 9. Er zeigte, wie die Aufgabe, zwischen zwei gegebenen Geraden zwei mittlere Proportionalen zu finden, durch Hülfe der Kegelschnitte gelöst werden könne.

Metius (Adriaan) Geometria practica; Franequerae 1620, 4. Dieser bekannte Mathem. starb 1635.

* Mollweide (Carl Brandan) bekannt und verdient als Herausgeber des Euklides (s. Euclides), des Karsten'schen Lehrbegriffs (s. Karsten), noch mehr aber durch seine Fortsetzung des Klügel'schen mathematischen Wörterbuches, dessen vierter Band von ihm ausgearbeitet ist, so wie durch viele schätzbare Abhandlungen, von denen die meisten sich in der monatlichen Correspondenz von Zach, in der Zeitschrift für Astronomie von v. Lindenau und Bohnenberger und in den astronomischen Nachrichten herausg. von Schumacher befinden. — Dieser durch seine seltenen, über alle Zweige der Mathematik mit gleicher Gründlichkeit sich verbreitenden Kenntnisse wahrhaft ausgezeichnete Mann starb 1825 im 52 J. seines Alters.

* Schulz-Montanus Systematisches Handbuch der gesammten Land- und Erdmessung, Berlin 1819, 2 Thle, 8.

Montucla (J. F.) Histoire des Mathematiques 2me edit. Paris 1799 — 1802, 4 voll., 4. Die beiden letzten Bände sind nach dem Tode M. von Lalande herausgegeben. — Bis jetzt noch das beste und ausführlichste Werk über Geschichte der Mathematik. —

Histoire de la Quadrature du Cercle, Paris 1754, gr. 12. * Eine neue Ausgabe, dieser ohne des Verf. Namen erschienenen und sehr selten gewordenen nützlichen Schrift wurde vor ungefähr einem Jahre von Paris aus angekündigt.

* Müller (J. H. T.) Disquisitiones de Tetraedro, Numburgi 1831, 4.

* Müller (J. W.) Systematische Zusammenstellung der wichtigsten bisher bekannten Beweise des Pythag. Lehrsatzes, Nürnberg 1819, 8.

* Münchow (K. D. von) Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie, in rechnender Entwickelungsweise, Bonn 1826, 8. Diese in mehr als einer Beziehung ausgezeichnete Schrift wurde an mehren Stellen besonders aber bei der Entwickelung der trigonometrischen Functionen in Reihen benutzt.

Nasser-Eddin-Al Tussi ein berühmter Muselmann, der über die Elemente des Euklid, so wie über die Sphaerica des Theodosius und Menelaus geschrieben hat. Er starb 1274 oder wie andere wollen 1288 unserer Zeitrechnung. Er wird angeführt p. 11.

Neper (Johannes) ein schottischer Edelmann, erster Erfinder der Logarithmen, worüber er 1614, in kl. 4., zu Edinburg herausgab: Logarithmorum canonis descriptio. Ein Jahr nach seinem 1618 erfolgten Tode gab sein Sohn zugleich mit einem neuen Abdruck des genannten Werkes zu Edinburg in 4. heraus: Mirifici logarithmorum canonis constructio etc., una cum annotationibus Henrici Briggii.

Newton (Isaac) (1642—1727) Arithmetica universalis; erste Ausg. durch Whiston 1707, 8.; besser ist die von 's Gravesande L. B. 1732, 4., die beste von Castillon Amstel. 1761, 2 voll. 4.

Principia philosophiae naturalis mathematica, 4., erste Ausg. London 1686, 2te 1713, 3te 1726 kurz vor dem Tode des Verf.

Nicomedes der wahrscheinlich im 2ten oder 1ten Jahrh. vor unserer Zeitrechnung lebte, wird im III Buche der Aufgaben bei dem

Problem von dem Finden zweier mittlern Proportionalen erwähnt. Berühmt ist er als Erfinder der Conchoide.

Ozanam Usage du Compas de proportion, Paris, 8. — Methode de lever les Plans, Paris 1716, 8. — Der Verfasser, von dem wir noch andere nützliche Schriften besitzen, starb 1717.

Pappus aus Alexandrien, der im 5ten Jahrh. unserer Zeitrechnung lebte, ist der Verf. eines für uns überaus schätzbaren Werkes, das bis jetzt, so weit es überhaupt uns erhalten, nur in einer lateinischen Uebersetzung vorhanden ist, unter dem Titel: Pappi Alexandrini Collectiones mathematicae a Frederico Commandino in Latinum conversae etc., Bonon. 1666, Fol.

Von Pappus besitzen wir auch Hülfssätze zu Apollonius, welche Halley in seine Ausgabe aufgenommen hat.

Pell (John) Controversia de vera circuli mensura inter Longomontanum et Pellium, Amstel. 1647, 4. Der Vf. starb 1682.

Perrault (Claude) ein gründlicher Kenner der Baukunst, durch mehrere Werke bekannt, unter andern auch durch seine französische Uebersetzung des Vitruvius. Er wird bei uns angeführt pag. 24.

Philo von Byzanz, lebte nach Hero, wahrscheinlich 200 J. vor unserer Zeitrechnung. Dieser namhafte griechische Mathematiker wird bei uns angeführt 256, Zus. 4, und im dritten Buche der Aufgaben; in der Anmerk. 2 zu Aufg. 9.

Pitot ein geschickter Mathematiker, der 1774 starb, wird bei uns angeführt pag. 173.

Plato. Diesem berühmten griechischen Philosophen, der 400 J. vor unserer Zeitrechnung lebte, werden viele Entdeckungen in der Geometrie zugeschrieben. Er wird bei uns angeführt in der Anmerk. 5 zu 209, und bei den Aufgaben, III, 9, wegen seines sinnreichen Verfahrens zwei mittlere Proportionalen zu finden.

Proclus In primum librum Euclidis Commentariorum libri IV, edente Francisco Barocio, Pataviae 1560, Fol. — Ueber die Ausgabe des griechischen Originals siehe oben unter Euclides. — Eine Englische Uebersetzung des Proclus mit vielen Zugaben erschien zu London 1792, 2 voll., 4.

Proclus lebte um die Mitte des 5 Jahrh. unserer Zeitrechnung.

Ptolemaeus (Claudius) lebte in der ersten Hälfte des 2. Jahrh. unserer Zeitrechnung. Sein großes astronomisches Werk: Almage-

stum, seu magnae compositionis mathematicae opus, erschien zuerst unter den gesammten Werken in lateinischer Uebersetzung zu Basel 1515, Fol. und später noch einmal 1551 — Das griechische Original erschien mit dem Commentar des Theon zu Basel 1538. Eine neue und vollkommenere Ausgabe ist die von Halma besorgte, deren erster Theil griechisch und französisch mit vielen Anmerkungen zu Paris 1813, 4. erschien.

Puissant Traité de Geodésie 2me ed. Paris 1819, 2 voll. 4., avec un Supplement imprimé en 1827. —

Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement 2me ed. Paris 1820, 4.

Pythagoras. Dieser berühmte Philosoph, welcher 500 J. vor unserer Zeitrechnung lebte, ist in der Geometrie bekannt durch den Lehrsatz, der seinen Namen trägt. Er wird bei uns auch noch angeführt in der Anmerk. 3 zu 87.

Renaldini Professor zu Padua, wo er 1700 starb, ist Verf. mehrerer Werke, von denen bei uns nur eins angeführt wird, nämlich: Ars analytica Mathematum, Florentiae 1665, und ein zweiter Theil dieses Werkes, Venet. 1684, Fol.

Robertson (John) A Treatise of Mathematical instruments, London 1749, 8. — The elements of navigation 5th ed. Lond. 1806, 2 voll., 8.

Saurin (Joseph) † 1739, wird angeführt pag. 191.

Schumacher (H. C.) Astronomische Nachrichten, Altona 1823—32, 10 Bde, 4.

Serenus ein geschickter Mathematiker, im 4ten oder 5ten Jahrh. unserer Zeitrechnung, ist Verf. des Werkes: de sectione coni et de sectione cylindri, welches Halley in seine Ausgabe des Apollonius aufgenommen hat.

Simpson (Thomas) Elements of Geometry 2th ed. London 1760, 8.

* — Select Exercises for young proficients in the Mathematicks London 1752, 8.

* — Essays on several curious and useful subjects etc. London 1740, 4.

Simson (Robert) Sectionum conicarum Libri V, ed. 2da, Edinb. 1750, 4.

— Opera quaedam reliqua post auctoris mortem in lucem edita, Glasguae 1776, 4. Das Buch wurde auf Kosten des Lord

Stanhope gedruckt, und nur eine sehr geringe Anzahl von Exemplaren abgezogen, die Stanhope als Geschenke vertheilte. Daher die überaus große Seltenheit dieses Buches (ein Exemplar befindet sich in der Bibliothek der hiesigen Landesschule). Außerdem siehe Euclides.

Slusii (Renati Francisci) Mesolabum, Leodii 1668, 4. Dieser namhafte Mathematiker starb 1685.

Snellius (Willebrord) Cyclometricus, Lugd. B. 1621, 4. Dieser wackere Gelehrte starb noch in der Blüthe seiner Jahre 1626.

Sporus angeführt bei den Aufgaben III, 9.

Stedmann angeführt pag. 183.

* Steiner (Jacob) Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander 1r Th. Berlin 1832, 8. Außer diesem ausgezeichneten Werke besitzen wir von demselben Verfasser eine größere Anzahl von zum Theil größern Abhandlungen, die sich in Crelle's Journal und in Gergonne's Annales befinden.

* Strehlke (F.) Aufgaben über das geradlinige Dreieck, Königsberg 1826, 8.

Sturm (Joh. Christoph), von den vielen Schriften dieses verdienten Mannes, der 1703 starb, wird bei uns nur angeführt seine Mathesis enucleata, ed. 2da, Norimb. 1711, 8.

Tacquet (Andreas) siehe Euclides. Verschiedene mathematische Abhandlungen von ihm sind in einem Bande in Fol. erschienen unter dem Titel: A. Tacquet opera, Antverp. 1707. Tacquet starb schon 1660.

* Tellkampf (Adolph) Vorschule der Mathematik, Berlin 1829, 8.

Thales. Diesem berühmten griechischen Philosophen werden auch mehrere Entdeckungen in der Geometrie beigelegt. Er wird bei uns angeführt 246, Anmerk. 4.

Theonis Smyrnaei Eorum, quae in Mathematicis ad Platonis lectionem utilia sunt, expositio, ed. Ismael Bullialdus Gr. et Lat. Lutetiae 1644, 4. — Theon lebte zu Anfang des 2. Jahrh. unserer Zeitrechnung.

* Thilo (Ludwig) Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze, Frankfurt a. M. 1824—25, 2 Thle, 8.

Vietae (Francisci) Opera Mathematica operâ atque studio Fr. van Schooten, Lugd. B. 1646, Fol. Dieser ausgezeichnete Mathematiker starb 1603.

Viviani (Vincentii) de Maximis et Minimis divinatio geometrica, Florent. 1659, Fol. —

De locis solidis secunda divin. geom. Flor. 1701, Fol. Dieser geschickte Mathematiker starb 1703.

Wallis De Algebra Tractatus. Diese Schrift erschien zuerst 1685 in engl. Sprache; eine lateinische Uebersetzung davon wurde in den 2ten Theil der Opera Mathematica, die 1693 zu Oxford in drei Theilen Fol. erschienen, aufgenommen. Wallis starb 1703 im 88. J. seines überaus thätigen und nützlichen Lebens.

Wolfii (Christiani) Elementa Matheseos universae, Halae 1742, 5 voll., 4.

* Zach (Fr. von) Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Gotha 1800—13, 28 Bde, 8.

Nachweisung

derjenigen Sätze unseres Lehrbuches, welche den einzelnen Sätzen in Euklid's Elementen entsprechen.

Euclides.	van Swinden.
I. Buch.	
1	601
2	582
3	583
4	45
5	51
6	52
7	50, Zus. 2
8	50
9	596
10	588
11	584
12	586
13	20
14	21
15	22
16	38, Zus. 1
17	38
18	42
19	41
20	43
21	44
22	600
23	593
4	47
25	47, Anm.
26	46
27 28	26
29	25
30	27
31	587
32	38
33	54
34	56 und 60
35	82
36	83
37 — 38	84
39 — 40	84, Anm.
41	82, Zus. 2
42	611
43	85
44	613
45	616
46	614
47	87
48	88
II. Buch.	
1	72
2	72, Zus. 1
3	72, Zus. 2
4	74
5	76
6	77
7	75
8	78
9	79
10	80
11	591
12 — 13	90
14	619
III. Buch.	
1	649
2	240
3 — 4	248
5 — 6	261
7	249
8	250
9	248, Zus.
10	264
11 — 12	262
13	263
14	250, Zus. 2

Euclides.	van Swinden.
III. Buch.	
15	250, Zus. 1
16	242 — 43
17	660
18 — 19	243
20	244
21	244, Zus. 1
22	270
23	338, Zus. 3
24	338, Zus. 2
25	650
26 — 27	245
28	245, Zus. 6
29	245, Zus. 5
30	655
31	246
32	247
33	653
34	654
35	251
36 — 37	259
IV. Buch.	
1	651
2	668
3	669
4	671
5	672
6	673
7	674
8	675
9	676
10	677
11	678
12	679
13	680
14	681
15	682
16	683
V. Buch.	
1, 2, 3, 5, 6	betreffen die eigenthümliche Lehre Euklid's hinsichtlich der Gleichvielfachen.

Euclides.	van Swinden.
V. Buch.	
4	151
7	140
8	141
9	142
10	141
11	144
12	163
13	145
14	149
15	143
16	151
17 — 18	153
19	153, Anm. 2
20 — 21	156, Zus. 1
22 — 23	156, Anm. 1
24	158, Anm.
25	154
VI. Buch.	
1	200
2	195
3	206
4	196
5	197
6	198
7.	199
8	209
9	590
10	629
11	632
12	633
13	635
14 — 15	202, Zus. 4
16	202, Zus. 5
17	202, Zus. 6
18	642
19	205
20	219
21	Ist mehr ein Grundsatz als ein Lehrsatz.
22	220
23	202, Zus. 1
24	218, Zus. 2

Euclides.	van Swinden.
VI. Buch.	
25	643
26	A. 309
27 — 29	Das was die Grundlage dieser drei Sätze bildet läßt sich aus 252, Anm. 4 u. 5 herleiten
30	639
31	221
32	kömmt im Wesentlichen überein mit 196, Zus. 2
33	335

Da das VII., VIII. und IX. Buch der Elemente von den Eigenschaften der Zahlen handeln, so gehört ihr Inhalt streng genommen nicht zur Geometrie; es finden sich daher in diesem Lehrbuche auch nur folgende wenige Erklärungen erläutert und Lehrsätze bewiesen.

Euclides.	van Swinden.
VII. Buch.	
Erkl. 5	120
— 16	209, Anm. 2
— 17	122, Anm. 1
— 18	450, Anm. 3
— 19	450, Anm. 3
— 21	203, Anm. 2 und 450, Anm. 3
Satz 11	153
12	163
13	151
17 — 18	143
19	150
20	150, Zus. 1
22 — 23	156

Euclides.	van Swinden.
VIII. Buch.	
5	203, Anm. 2
11	203, Anm. 1
12	449, Zus. 3
18	219, Zus. 2
19	451, Zus. 3
21	450, Zus. 3
26	219, Zus. 2
27	451, Zus. 3
IX. Buch.	
8 — 9	162, Zus. 1
35	163, Zus. 3
X. Buch.	

In diesem Buche, dessen Verständniß nicht ohne Schwierigkeiten ist, wird die Lehre von den incommensurabeln Größen eben so ausführlich als geschickt abgehandelt.

Einige Erklärungen und Lehrsätze aus demselben werden an einigen Stellen dieses Lehrbuches erläutert, nämlich:

Erklr. 2	126
Erklr. 3, — 4, — 5, — 6	Hierüber sehe man 203, Zus. 10
Lehrs. 1	307
— 2	126, Anm. 1
3	125, Anm. 4
9	203, Zus. 10 Nro. 4
10	130, Z. 1, A. 3
22	203, Z. 10, Nr. 1

Euclides.	van Swinden.
X. Buch.	
Lehns. nach 34	89
74	214 u. 291, Z. 2
117	126, Anm. 2 u. 3
XI. Buch.	
1	414, Anm. 1
2	420 nebst Z. 1
3	415, Anm.
4	421
5	422
6	423
7	Ist ein Axiom
8	423
9	424
10	425
11	421, A. 2
12	423, Anm.
13	421, Z. 2
14	426
15	425
16	426, Z. 2
17	427
18	421, Z. 4
19	421, Z. 6
20	430
21	431
22	429, Z. 2, Anm.
23	432, Anm.
24	441, Z. 1
25	445
26	434, Zus. 1
27	441, Zus. 3
28	444
29 — 30	446
31	447
32	448
33	451
34	450, Z. 1
35	434, Z. 2
36	451, Z. 4
37	451, Z. 2
38	421, Z. 5

Euclides.	van Swinden.
XI. Buch.	
39	444, Z. 3
40	454, Anm. 1
XII. Buch.	
1	278
2	322
3	459
4	460
5	462
6	463
7	464
8	465, Z. 6
9	465, Z. 4
10	504
11	492, Z. 2
12	495 u. 505, Z. 3
13 — 14	492, Z. 3; 505, Z. 1
15	492, Zus. 4
16, 17	Diese beiden Aufgaben fehlen in diesem Lehrbuche als zu dessen Plan weniger erforderlich.
18	528
XIII. Buch.	
1	213
2	215
3	216
4	217
5	211
6	214
7	Ist nicht in dieses Lehrb. aufgenommen.
8	227
9	290, Zus. 3
10	291
11	291, Zus. 1
12	287

Euclides.	van Swinden.	Euclides.	van Swinden.	Euclides.	van Swinden.
XIII. Buch.		XIV. Buch.		XV. Buch.	
13		1	290, Zus. 2	1	485, Zus. 3
Lehnsatz	209, Zus. 3	2	549, Zus. 5	2—3	485, Zus. 4
14	547, Nro. 1	Lehnsatz	291, Zus. 2	4	485, Zus. 5
15	547, Nro. 3	3	480, Anm. 3	5	485, Zus. 6
16	547, Nro. 4	4	549, Zus. 1	6	477
17	587, Nro. 5	Lehnsatz	292	7	542, Anm. 2.
18	547	5 }	547		
18, Zus.	476, Zus. 1	6 }			
Lehnsatz	104, Zus. 1	7	212		

Inhaltsverzeichniſs.

Einleitung.

I.

Die Geometrie ist derjenige Theil der Mathematik, welcher die Eigenschaften der **Raumgrößen** untersucht, und sie durch sichere und überzeugende Schlüsse beweist.

II.

Sowohl der Raum selbst mit seinen drei Dimensionen, **Länge**, **Breite** und **Höhe** (Dicke), als die in ihm denkbaren Figuren machen also den Gegenstand der Geometrie aus.

III.

Nur durch das Abstractionsvermögen unseres Verstandes wird es uns möglich, diese drei Dimensionen von den Körpern selbst zu trennen, um sie für sich besonders betrachten zu können.

IV.

Das Object der Geometrie beruht daher auf abstracten aber dennoch sehr einfachen Vorstellungen.

d'Alembert, Melanges, T. IV. p. 158—63.

V.

Dieser Einfachheit des Gegenstandes, der Natur der Grundbegriffe, von denen die Geometer ausgehen, und der Art und Weise, wie sie darauf weiter bauen, verdankt die Geometrie die einleuchtende Deutlichkeit und unbestreitbare Gewißheit, deren sich ihre Lehren erfreuen.

d'Alembert, Melanges, T. IV. p. 164.

VI.

Den Grund, auf welchen die Geometer ihre Beweise stützen, bilden theils die eignen Erklärungen von dem, was sie betrachten, theils einige allgemeine Sätze, die von so einleuchtender Richtigkeit sind, daß Niemand bei gesundem Verstande daran zweifeln kann. Sie heißen **Grundsätze** oder **Axiome**; z. B.

1. Zwei Größen, welche derselben dritten Größe gleich sind, sind unter einander gleich.

2. Der Theil ist kleiner als das Ganze.

3. Alle Theile zusammengenommen machen das Ganze aus.

4. Wenn man gleiche Größen zu gleichen addirt oder von ihnen abzieht, so sind auch diese Summen oder Unterschiede gleich.

VII.

Die Geometer bedienen sich zwei verschiedener Arten von Beweisen, der directen und der indirecten (apagogischen).

Ein directer Beweis besteht darinn, daß man das, was bewiesen werden soll, mittelst einer Kette von Schlüssen herleitet aus den frühern Erklärungen, aus Grundsätzen und bereits erwiesenen Lehrsätzen.

VIII.

Bei den indirecten Beweisen dagegen zeigt man, daß eine Behauptung darum wahr sein muß, weil sie nicht unwahr sein kann, indem man nämlich darthut, wie man durch die Annahme, sie sei falsch, also das Gegentheil davon richtig, in eine Ungereimtheit verfällt.

d'Alembert, Melanges, Tom. IV. p. 166.

Ein Beispiel eines solchen Beweises findet sich in 19.

IX.

Bei beiden Arten von Beweisen macht man häufig von dem Mittel des Aufeinanderlegens oder Uebereinanderlegens Gebrauch. Man denkt sich nämlich die eine von zwei Figuren so auf die andere gelegt, daß einige Stücke der erstern mit einigen Stücken der andern zusammenfallen, und untersucht nun, ob unter diesen Umständen auch alle übrigen Stücke der ersteren Figur mit denen der andern zusammenfallen, also beide Figuren ganz zusammenfallen und folglich an Größe und Gestalt ganz unter einander übereinstimmen (congruiren) oder nicht.

d'Alembert, Melanges, T. IV. p. 165, 166.

Dieser Begriff von der vollkommenen Gleichheit zweier Figuren ist der natürlichste und einfachste. s. 16, Anm. 3.

Elemente der Geometrie.

Erstes Buch.

Von den allgemeinen Eigenschaften der geraden Linien, sowohl an sich betrachtet, als auch in so fern sie die Winkel von Dreiecken und Vierecken bilden, oder deren Seiten sind.

Einleitung.

1. Erklärung. Wenn man an dem Raume blos eine Dimension, die Länge, betrachtet, ohne auf die beiden andern, Breite und Dicke (oder Höhe) Rücksicht zu nehmen, so gelangt man zu der Vorstellung einer Linie.

Eucl. I, Erkl. 2. — L. G. I, Erkl. 1.

Anmerkung. Daher pflegt man zu sagen: eine Linie sei eine Länge ohne Breite und Dicke. AB Fig. 1 und 2.

2. Erklärung. Die Gränzen der Linien und deren gegenseitige Durchschnitte heißen Puncte; z. B. A, B Fig. 1 und A, B, C, E, D Fig. 3.

Eucl. I, Erkl. 1 und 3. — L. G. I, Erkl. 1.

Anmerkung 1. Daher die Behauptung der Mathematiker: daß ein Punct keine Theile habe.

Anmerkung 2. Nicht selten betrachtet man eine Linie, als durch fortschreitende Bewegung eines Punctes entstanden. AB Fig. 1 und ADB Fig. 2.

Anmerkung 3. Die in der Geometrie betrachteten Linien sind entweder gerade, oder krumme.

3. Erklärung. Eine gerade Linie ist eine solche, die durchaus dieselbe Lage zwischen ihren Endpuncten hat. Fig. 1 AB *).

Eucl. I, Erkl. 4.

Zus. Sind daher zwei Puncte gegeben, so wird ihr Abstand von einander durch die Gerade gemessen, die man von dem einen zum andern zieht.

Anmerkung 1. Andere sagen: die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Puncten. Inzwischen scheint diese Erklärung mehr eine Folgerung aus unserer Erklärung, als ein Grundbegriff zu sein. Aber wie dem auch sein möge, so wird, wenn man diese

*) Vielleicht noch richtiger könnte man sagen: eine gerade Linie ist diejenige, welche zwischen je zweien ihrer Puncte durchaus dieselbe Lage hat. Denn es giebt auch krumme Linien, welche wenigstens in so fern eine völlig gleiche Lage zwischen ihren Endpuncten haben, als dieselbe sich nicht ändert, wenn man die beiden Endpuncte ihre Stellen unter einander wechseln läßt; z. B. ein halber Umkreis u. m. a. Anm. d. U.

Erklärung annimmt, unser Lehrsatz (43) ein Grundsatz, während unser Grundsatz (4) sich in einen Lehrsatz verwandelt, der eines Beweises bedarf.

Anmerkung 2. Es verhält sich mit dieser Erklärung, wie mit allen Erklärungen von Dingen, die zu einfach sind, als daß sie noch einer Erläuterung durch Worte fähig wären — sie sind alle ungenügend und mehr oder weniger dunkel. Man lese besonders, was hierüber gesagt ist von d'Alembert, in seinen Melanges etc. IV, 163, und V, 203 — 206.

Anmerkung 3. Aus unserer Erklärung von gerader Linie ergeben sich folgende drei Grundsätze und eben so viel Foderungssätze:

4. Grundsatz. Gerade Linien, bei denen zwei Puncte der einen mit zwei Puncten der andern zusammenfallen, fallen in ihrer Richtung ganz zusammen.

Anmerkung. Für diejenigen, welche die gerade Linie als den kürzesten Weg zwischen zwei Puncten erklären, hört dieser Satz auf, Grundsatz zu sein; er wird vielmehr Lehrsatz, der bewiesen werden muß, wie dieß unter andern auch gethan hat Le Gendre I, 3.

5. Grundsatz. Gerade Linien (AB, CE Fig. 3), die einander schneiden, oder aus demselben Puncte nach verschiedener Richtung gezogen werden (wie BC, BE Fig. 8), haben außer dem Puncte, in welchem sie sich schneiden, oder von dem sie auslaufen, gar nichts gemeinschaftlich; dieser Punct ist also das Einzige, was allen Linien zugleich angehört.

6. Grundsatz. Gerade Linien, deren Endpuncte zusammenfallen, und die mithin (4) in ihrer Richtung ganz zusammenfallen, sind einander gleich; und umgekehrt, sind gerade Linien von gleicher Länge, so decken sie sich, wenn man sie in eine solche Lage bringt, daß ihre Endpuncte zusammenfallen.

Anmerkung. Dieser einfache Satz ist es, der ursprünglich allen Beweisen, welche die Gleichheit gerader Linien betreffen, zum Grunde liegt.

7. Foderungssatz. Man kann, als etwas unter allen Umständen Mögliches fordern, von irgend einem gegebenen Puncte entweder beliebig, oder nach einem andern gegebenen Puncte eine gerade Linie zu ziehen.

Eucl. I F. S. 1.

Anmerkung. Zur Ausführung wird nichts weiter als ein Lineal und eine Ziehfeder erfordert.

8. Foderungssatz. Man kann als stets möglich fordern, eine gegebene gerade Linie zu verlängern, entweder ganz beliebig, oder so, daß sie einer andern gegebenen gleich, oder daß sie größer als diese werde.

Eucl. I F. S. 2.

Anmerkung. Wie man es anzufangen habe, um eine gerade Linie zu ziehen, die einer gegebenen gleich, ist Gegenstand der ersten Aufgabe im ersten Buche der (am Ende des ganzen Werkes angehängten) Aufgaben.

9. Foderungssatz. Man kann stets fordern, von einer geraden Linie ein Stück abzuschneiden, das gleich ist, einer andern gegebenen (kleinern) Geraden.

Anmerkung. Es ist dieß Gegenstand der zweiten Aufgabe im ersten Buche derselben; die Auflösung stützt sich auf den Grundsatz (13).

10. Erklärung. Eine krumme Linie ist eine solche, welche (wie ADB Fig. 2) eine durchaus ungleiche Lage zwischen ihren Endpuncten hat.

Anmerkung 1. Die obige Anmerkung 2 in (3) findet auch hier ihre Anwendung.

Andere, wie Le Gendre I, 4 Erkl., nennen krumme Linie jede, die weder eine Gerade, noch eine Verbindung mehrerer Geraden ist.

Anmerkung 2. Von der unendlichen Menge krummer Linien, die man sich bilden kann, wird in den Elementen — dieß Wort im strengsten Sinne der Alten genommen — der Geometrie nur eine einzige näher betrachtet, nämlich die Kreislinie und ihre Theile.

11. Erklärung. Kreis ist diejenige ebene Figur, welche von einer einzigen (krummen) Linie (ABDEF Fig. 4), Kreislinie, oder Umkreis, oder Kreisumfang, oder Peripherie genannt, dergestalt begränzt wird, daß alle Geraden (AC, BC, DC, EC, FC), die man von beliebigen Puncten der letztern nach einem innerhalb des Kreises gelegenen Puncte (C) zieht — wo also alle diese Linien zusammentreffen — von gleicher Länge sind. Dieser Punct (C) heißt Mittelpunct des Kreises; die Linien (CA, CB, CD, CE, CF), welche man von ihm nach dem Umfange (ABDEF) zieht, führen den Namen Radien oder Halbmesser. Durchmesser heißt jede Linie, welche durch den Mittelpunct geht und deren Endpuncte im Umkreise liegen: Theile des Umkreises, (wie BD, DEF etc.) werden Kreisbogen genannt.

Eucl. I, E. 15, 16, 17. — L. G. II, E. 1, 2, 3.

Zus. Jeder Halbmesser ist die Hälfte eines Durchmessers.

12. Foderungssatz. Man kann als etwas stets Ausführbares verlangen, von einem gegebenen Puncte als Mittelpunct aus, mit einem bestimmten Halbmesser einen Kreis zu beschreiben.

Eucl. I, F. S. 3.

Anmerkung. So wie man zum Ziehen einer Geraden nichts weiter als Lineal und Ziehfeder gebraucht, eben so bedarf es zum Beschreiben eines Kreises keines andern Werkzeuges als des Zirkels. Da man nun, wie schon bemerkt worden, in der Elementargeometrie nur gerade Linien, die aus ihnen gebildeten Figuren, und Kreise betrachtet, so kann man sagen, daß Niemand zur Ausführung aller in diesem Gebiete nur möglichen Constructionen an nöthigen Werkzeugen mehr als Lineal, Zirkel und Ziehfeder gebraucht.

13. Grundsatz. Beschreibt man aus den Endpuncten (A und B Fig. 11) einer Geraden, als Mittelpuncten, mit demselben Halbmesser (AB, BA), welcher gleich ist dieser Geraden, oder auch größer als sie, zwei Kreise, so müssen dieselben sich stets (in C und G) schneiden.

Anmerkung 1. Die beiden ersten Aufgaben des ersten Buches werden durch Hülfe dieses unseres Satzes gelößt.

Anmerkung 2. Euclides hat zwar diesen Satz nicht so ausdrücklich und mit so vielen Worten angeführt, aber er bedarf seiner Hülfe offenbar in den drei ersten Sätzen seines ersten Buches.

Anmerkung 3. Wir stellen diesen Satz unter die Grundsätze, weil seine Richtigkeit von selbst einleuchtet.

Andere, wie Wolf, (Elementa Matheseos I, §. 197) haben einen Beweis des Satzes gegeben.

Anmerkung 4. Nimmt man zum Halbmesser unserer Kreise eine Linie, welche kürzer ist als AB, so werden sich dieselben zwar noch schneiden, aber nur so lange, als dieser Halbmesser größer als die Hälfte von AB ist; wenn er gerade halb so groß als AB, so werden sich beide Kreise auf AB berühren; und ist er endlich kleiner als die Hälfte von AB, so werden sie sich ganz von einander entfernen.

14. Erklärung. Fläche heißt diejenige Raumgröße, zu deren Vorstellung man gelangt, indem man an dem Raum blos die

Dimensionen der Länge und Breite betrachtet, und von der Dicke oder Höhe ganz absieht.

Anmerkung 1. Daher die Behauptung der Geometer, daß eine Fläche Länge und Breite, aber keine Dicke habe.

Eucl. I, Erkl. 5. — L. G. Erkl. 5.

Zus. Die Gränzen einer Fläche sind Linien, gerade oder krumme.

Anmerkung 2. Man kann die Flächen, als durch fortschreitende Bewegung von Linien entstanden betrachten, als die Spur, die eine bewegte Linie zurückgelassen hat.

15. Erklärung. Eine ebene Fläche oder Ebene ist diejenige Fläche, welche durchaus dieselbe Lage zwischen ihren Gränzen hat.

Eucl. I, Erkl. 7. — L. G. I, Erkl. 6.

Anmerkung 1. Andere erklären Ebene als diejenige Fläche, welche eine gerade Linie in allen ihren Theilen berühren kann (in welcher sich nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen. J.).

S. Clavius über die 7te Erkl. im ersten Buche des Euclides.

Anmerkung 2. Es gilt auch hier die oben (3, Anm. 2) gemachte Bemerkung.

Anmerkung 3. Man merke ein für allemal, daß alle in den 9 ersten Büchern vorkommenden Figuren und Figurenverbindungen als mit allen ihren einzelnen Theilen in derselben Ebene liegend betrachtet werden, daß also alle daselbst vorkommenden Figuren ebene Figuren sind.

16. Erklärung. Die gegenseitige Neigung zweier Linien (DB, EB Fig. 5), die in derselben Ebene liegen und (nöthigenfalls verlängert) in einem Puncte (B) sich schneiden oder begegnen, wird ebener Winkel genannt*).

Der Punct (B), in welchem sich die Linien schneiden, heißt Spitze, oder Scheitel des Winkels; die Linien selbst (BD, BE) seine Schenkel.

Eucl. I, Erkl. 8 und 9. — L. G. I, Erkl. 9.

Anmerkung 1. Um einen Winkel mittelst Buchstaben zu bezeichnen, gebraucht man entweder einen, oder drei; im erstern Falle nimmt man immer den am Scheitel stehenden; im letztern wird der am Scheitel stehende stets in die Mitte gesetzt. So wird z. B. der Winkel in Fig. 5 entweder Winkel B, oder Winkel DBE genannt. Steht ein Winkel, wie der eben genannte, ganz allein, so braucht man meistens nur den einen Buchstaben, am Scheitel; aber wenn, wie in Fig. 7, mehrere Linien AB, EB, DB, FB, CB in einem Puncte zusammenlaufen und daselbst mehrere Winkel bilden, muß man nothwendig drei Buchstaben gebrauchen und sagen: Winkel ABE, EBD etc. Im letztern Falle pflegt man wohl auch kleinere Buchstaben m, n, p, q in die Winkel nahe beim Scheitel zu setzen und sie nach diesen zu benennen, Winkel m, Winkel n ꝛc.

Anmerkung 2. Aus der Erklärung von Winkel folgt, daß auf die Länge seiner Schenkel gar nichts ankommt. Ein Winkel bleibt daher ganz ungeändert, wenn man weiter nichts thut, als daß man seine Schenkel beliebig weit verlängert. In Fig. 5 ist Winkel DBE derselbe wie Winkel JBK.

Anmerkung 3. Die Gleichheit zweier Winkel erkennt man daran, daß sie sich decken. Sie sind nämlich gleich, wenn in dem Falle, wo man ihre Scheitel (F u. B Fig. 5 u. 6) auf einander und einen Schenkel (FN) des einen auf einen Schenkel (EB) des andern so legt, daß die beiden andern auf derselben Seite des nun gemeinschaftlichen liegen, auch der andere Schenkel (CF) des erstern mit dem andern Schenkel (DB) des letztern

*) Daß diese Erklärung von Winkel Manches zu wünschen übrig lasse, ist zwar schon früher und öfters bemerkt worden, aber erst v. Muenchow in seinen „Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie, in rechnender Entwicklungsweise dargestellt. Bonn 1826“ hat eine genügendere Erklärung an die Stelle der mangelhaften gesetzt, indem er §. 11 sagt: „Winkel zweier geraden, an einem Puncte zusammengestellten, und einerseits von diesem Puncte begränzten Linien, ist die Größe derjenigen Drehung, durch welche eine vom Scheitelpunct begränzte, andererseits aber unbegränzte gerade Linie in der Ebene des Winkels von der Lage des einen Schenkels zur Lage des andern stets vorschreitend gelangen kann.“ — Das Buch enthält überhaupt des Vortrefflichen so viel, daß es unsern Literaturzeitungen in der That nicht zum Ruhme gereicht, demselben bisher so wenig Aufmerksamkeit gewidmet zu haben. J.

zusammenfällt. Findet dies Letztere nicht Statt, so ist derjenige Winkel der kleinere, dessen zweiter Schenkel zwischen die Schenkel des andern Winkels fällt; wie z. B. in Fig. 8 DBC kleiner als DBE, und CBF größer als EBF.

Dieß ist der eigentliche Begriff und die natürliche Bestimmung der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel; darauf stützen die Geometer Alles, was sie von der Gleichheit oder Ungleichheit verschiedener Winkel beweisen.

Anmerkung 4. Manche wollen, man solle bei der Vergleichung zweier Winkel so zu Werke gehen, daß man auf den Schenkeln gleiche Stücke (BJ, BK, LF, MF Fig. 5 u. 6) abschneide, mit ihnen als Halbmessern Kreisbogen (JK, LM) beschreibe, und aus der Gleichheit oder Ungleichheit der Flächenräume JBK, LFM auf die Gleichheit oder Ungleichheit der Winkel schließe; s. d'Alembert Melanges V, p. 207 u. p. 38. Allein man darf den Begriff von Winkel, der in der gegenseitigen Neigung der Schenkel besteht, nicht mit dem eines von drei Linien begränzten Flächenraumes vermischen; und eben so wenig mit dem Bogen (JK), den man als das Maaß für den Winkel annimmt. Wir werden allerdings in den beiden ersten Sätzen des achten Buches beweisen, daß Kreisbogen ein natürliches Maaß für Winkel abgeben; aber gleichwohl muß man es bestreiten, daß diese Art, die Winkel zu betrachten und zu bestimmen, die einfachste sei.

Erster Abschnitt.

Von den geraden Linien an sich betrachtet.

---

17. **Erklärung.** **Trifft eine Gerade (EB) mit einer andern (DF) in einem Puncte (B) zusammen, so bildet sie an diesem Puncte mit ihr zwei Winkel, die entweder gleich sind (Fig. 9) oder ungleich (Fig. 8). Im erstern Falle heißt jeder der Winkel ein Rechter, und die einfallende Linie (EB) heißt Loth, oder Perpendikel, oder Senkrechte. Ein Winkel, der (wie EBD Fig. 8) größer ist als ein rechter (DBC), wird ein stumpfer; und jeder, der (wie EBF) kleiner als ein rechter (CBF) ist, ein spitzer genannt.**

Eucl. I, Erkl. 10, 11, 12. — L. G. I, Erkl. 10, 11.

Anmerkung. Aus dieser Erklärung eines rechten Winkels ergiebt sich folgender Grundsatz:

18. **Grundsatz.** **Wenn außerhalb einer Linie (JD Fig. 18) und ihrer Verlängerung ein Punct (A) gegeben ist, so befindet sich unter den verschiedenen Geraden, die man von dem Puncte nach der gegebenen (JD) ziehen kann, stets eine (AB), welche auf dieser senkrecht steht; eben so ist unter den verschiedenen Linien (BC, BE 2c. Fig. 8), welche sich aus einem Puncte (B) einer gegebenen Geraden (DF) ziehen lassen, jederzeit eine (BC), welche auf der gegebenen senkrecht steht.**

Anmerkung. Daß weder im erstern, noch im letztern Falle mehr als eine Senkrechte möglich ist, wird später noch besonders bewiesen werden; jenes in 19, Zus. 2, dieses in 29.

19. **Lehrsatz.** **Alle rechten Winkel sind einander gleich. — Fig. 9 u. 10.**

L. G. I, 1.

Erläuterung. Die Frage, um welche es sich hier handelt, ist nicht, ob, wenn die Linie EB (Fig. 10) senkrecht auf AJ steht, ABE = EBJ? und ob, wenn EB senkrecht auf DF, DBE = EBF? denn die Gleichheit dieser Winkel folgt aus der Erklärung der senkrechten Linien: sondern die Frage ist vielmehr, ob Winkel ABE (Fig. 10), welcher

durch die Senkrechte BE gebildet und ein Rechter genannt wird, gleich ist dem Winkel EBD (Fig. 9), welcher durch die Senkrechte EB gebildet wird und gleichfalls ein Rechter heißt?

Beweis. Denkt man sich die Figur 9 so auf die Fig. 10 gelegt, daß der Punct B auf B, und die Gerade BE mit BE zusammenfällt, so muß auch nothwendig und unter allen Umständen DF auf AJ fallen. Denn könnte es jemals anders sein, und DF eine von AJ verschiedene Lage haben, z. B. die in Fig. 10 dargestellte, so wäre alsdann nothwendig;

$$\begin{array}{l} EBD > EBA \\ EBA = EBJ\ (17) \\ \hline EBD > EBJ \\ EBD = EBF\ (17) \\ \hline EBF > EBJ, \end{array}$$

was offenbar unmöglich ist, und auf das bestimmteste zeigt, daß Niemand die Richtigkeit unsers Satzes läugnen könne, ohne in eine Ungereimtheit zu verfallen.

Anmerkung. Euclides hat die Gleichheit der rechten Winkel als etwas, das sich von selbst versteht, ohne Beweis angenommen; allein sein Commentator Proclus hat mit Recht bemerkt, daß ein Beweis dafür nöthig ist. Man sehe diesen selbst, so wie auch Clavius in seinen Anmerkungen zum 12ten Grundsatze des ersten Buches des Euclides.

Zus. 1. Wegen dieser gleichen und unveränderlichen Größe aller rechten Winkel sind sie ganz geeignet als Maaß bei Bestimmung der Größe aller übrigen Winkel zu dienen.

Zus. 2. In einem Puncte B (Fig. 8) einer geraden Linie DF läßt sich nur ein einziges Perpendikel auf dieser errichten.

20. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie (BE Fig. 9 u. 10) einer andern (DF) begegnet und sie in einem Puncte (B) schneidet, so bildet sie an diesem Puncte entweder zwei rechte Winkel (DBE und DBF Fig. 9) oder zwei Winkel (DBE und DBF Fig. 8), welche zusammen so groß als zwei Rechte sind.

Eucl. I, 13. — L. G. I, 2.

Bew. Im ersten Falle, wenn nämlich die Linie EB (Fig. 9) zwei gleiche Winkel bildet, leuchtet die Richtigkeit unserer Behauptung sofort ein wegen (17). Im zweiten Falle, wenn EB schief auf DF steht (Fig. 8), und daher ungleiche Winkel (EBD, EBF) bildet, denke man sich die Senkrechte BC gezogen (18), und zeige, daß die beiden ungleichen Winkel (EBD, EBF) zusammen so groß sind, als die beiden gleichen (CBD, CBF).

Zus. Alle Winkel (ABE, EBD, DBF, FBC Fig. 7), welche an einem und demselben Puncte (B) auf derselben Seite einer Geraden (AC) durch eine beliebige Menge von Linien (EB, DB, FB) gebildet werden, sind zusammen so groß als zwei Rechte.

L. G. I, 2 Zus. 2.

21. Lehrsatz. Zwei Gerade (AB und BC), die einer dritten (DB) in demselben Puncte (B) begegnen, und zwar so, daß sie mit derselben zwei Winkel (ABD, DBC) bilden, deren Summe gleich zwei Rechten ist, machen stets nur Eine Gerade (AC) aus. (Fig. 12 u. 13.)

Eucl. I, 14. — L. G. I, 4.

Der Beweis ist ein indirecter; man zeigt, wie man durch Annahme des Gegentheils, daß nämlich von den beiden Linien AB und

BC die eine nicht mit der Verlängerung der andern zusammenfiele, nothwendig in eine Ungereimtheit verfallen würde.

Anmerkung. Dieser Satz ist das Umgekehrte des vorhergehenden. Nicht alle Sätze lassen sich umkehren, oder sind, wie man zu sagen pflegt, umgekehrt wahr. Es soll in dem Folgenden überall, wo eine Umkehrung zulässig ist, ausdrücklich bemerkt werden.

22. Lehrsatz. Wenn zwei Linien (AB, CE Fig. 3) sich in einem Puncte (D) schneiden, so sind je zwei zusammengehörige Scheitel- oder Vertical-Winkel d. h. die gegenüberstehenden Winkel (ADE und CDB, so wie ADC und EDB), die an dem Puncte (D) entstehen, stets von gleicher Größe und alle vier Winkel zusammen so groß als vier Rechte.

Eucl. I, 15. — L. G. I, 5.

Beweis. Aus S. 20.

Anmerkung. Der erste Theil unseres Satzes scheint gar keines Beweises zu bedürfen, da AD und DE als die Verlängerungen von BD nur CD natürlich dieselbe Richtung wie diese haben, also auch dieselbe gegenseitige Neigung, und mithin einen eben so großen Winkel als letztere bilden.

Zus. Alle Winkel, welche in beliebiger Anzahl um einen und denselben Punct herumliegen, betragen zusammen vier Rechte.

23. Lehrsatz. Wenn eine Gerade (CK Fig. 14) zwei andere (AD u. GE) so schneidet, daß der Außenwinkel (CBA) an der einen Seite der Schneidenden gleich ist dem nicht anliegenden innern (CFG) auf eben dieser Seite der Schneidenden, so ist auch stets der andere äußere Winkel (GFK) auf dieser Seite, gleich dem andern innern Winkel (ABK), und auch auf der andern Seite der schneidenden Linie sind die äußern Winkel (CBD und EFK) einzeln ihren innern Gegenwinkeln (CFE und DBK) gleich.

Beweis. Aus S. 20.

24. Erklärung. Gerade Linien (AD, GE Fig. 14) heißen parallel, wenn sie gegen eine dritte Linie (CK), die sie schneidet, dieselbe Neigung haben d. h. mit dieser an der einen Seite einen äußern Winkel (CBA) bilden, der so groß als der innere Gegenwinkel (CFG) an eben dieser Seite ist.

Anmerkung 1. Der vorige Satz (23) lehrt, daß es gleichgültig ist, auf welcher Seite der schneidenden Linie man die beiden Winkel nimmt, die gleich sein sollen; entweder CBA und CFG, oder GFK und ABK, oder CBD und CFE, oder EFK und DBK.

Zus. Sind zwei oder mehrere gerade Linien unter einander parallel, so muß jede (nöthigenfalls verlängerte) Gerade, welche eine derselben schneidet, auch stets die andern (nöthigenfalls verlängerten) schneiden.

Anmerkung 2. Euclides hat diesen Zusatz zwar nicht ausdrücklich vorgetragen, macht aber nichts desto weniger stillschweigend von ihm an mehrern Stellen Gebrauch z. B. beim 30ten und 31ten Satze seines ersten Buches. Vielleicht möchte auch unser Satz nicht so unmittelbar aus der Erklärung von Parallelismus folgen, welche Euclides gegeben hat.

Anmerkung 3. Es ist nicht leicht, das Wesen des Parallelismus einfach und erschöpfend zu bestimmen. In früherer sowohl als neuerer Zeit hat man viel, ja ganze Bücher über diesen Gegenstand geschrieben, die alle hier anzuführen nutzlos sein würde. Man kann sich begnügen mit dem was d'Alembert Melanges etc. V, p. 202 so wie Tacquet und Clavius in ihren Erläuterungen zu der 34ten Erklärung des ersten Buches von Euclides über diesen Gegenstand beibringen. Die oben aufgestellte Erklärung von parallel, scheint die einfachste zu sein, die gleichwohl ausreicht, um alle Eigenschaf-

ten paralleler Linien zu erweisen, und zwar ohne, wie Euclides gethan hat, Eigenschaften der Dreiecke zu Hülfe zu nehmen.

Anmerkung 4. Euclides erklärt (I, Erkl. 35) Parallel-Linien, als solche, „die in derselben Ebene liegen und, wenn auch nach beiden Seiten hin unendlich weit verlängert, doch einander niemals schneiden." Aber es ist zu bezweifeln, ob die Begriffe „unendliche Verlängerung", und „niemals sich schneiden" deutlich genug sind, um als einfache Grundbegriffe zu dienen. Es soll unten (28, 3. 1) nachgewiesen werden, daß die Eigenschaft des „sich niemals schneiden" auch aus unserer Erklärung von Parallellinien folgt. L. G. I, Erkl. 12.

Anmerkung 5. Andere geben folgende Erklärung: Parallel-Linien sind solche, die überall gleichweit von einander entfernt d. h. so beschaffen sind, daß alle Senkrechten (BL, CK, DJ Fig. 15), die man zwischen ihnen zieht, von gleicher Größe sind. Es soll in dem Folgenden (31) gezeigt werden, daß das eben Gesagte auch aus unserer Erklärung folgt, aber es selbst als Erklärung von parallel zu gebrauchen, ist wenigstens so lange nicht zulässig, als nicht bewiesen ist, daß die Entfernung eines Punctes (B) von einer geraden Linie (MG) durch das aus jenem auf diese gefällte Perpendikel gemessen wird.

Zus. 2. Ist eine gerade Linie (GE Fig. 14) und ein Punct (B) gegeben, so läßt sich durch diesen stets eine zweite Linie (BD) ziehen, die mit der erstern parallel ist.

Bew. Zieht man durch den Punct B eine beliebige Gerade, CBK; welche GE schneidet und folglich mit ihr einen Winkel CFE bildet, so muß offenbar unter allen den Linien, die sich von B aus ziehen lassen, nothwendig eine sein, welche mit CBK einen Winkel CBD bildet, gleich dem Winkel CFE.

Wie man es anzufangen habe, um eine solche Parallele wirklich zu ziehen, wird später in den (am Ende beigefügten) Aufgaben (I, 6) gelehrt werden.

Anmerkung. Auf unsere Erklärung gründet sich auch das bekannte und übliche Verfahren, vermittelst zweier Lineale Parallel-Linien zu ziehen. Die Kante des bewegten Lineals bildet mit der des andern nach derselben Seite hin fortwährend gleiche Winkel d. h. es bewegt sich mit sich selbst parallel fort.

25. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie (CK) zwei andere parallele (AD, GL Fig. 14) schneidet, so sind stets

1) je zwei Wechselswinkel (ABF u. BFL, oder DBF u. BFG) von gleicher Größe.
2) zwei innere an derselben Seite der schneidenden Linie liegende Winkel (ABF u. GFR oder DBF und BFL) sind zusammen so groß als zwei Rechte.

Eucl. I, 29. — L. G. I, 23.

Beweis des ersten Theils aus 24 und 22; des andern aus 24 und 20.

Zus. Gerade Linien (BL, CK, DJ Fig. 15), welche auf einer (AF) von zwei parallelen Linien (AF, MG) senkrecht stehen, stehen auch auf der andern (MG) senkrecht.

26. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie (CK) zwei andere (AD, GL Fig. 14) so schneidet, daß zwei innere, oder zwei äußere Wechselswinkel (ABF u. BFL oder CBD u. GFK) von gleicher Größe sind, oder daß die Summe zweier innern Winkel an derselben Seite der schneidenden Linie (ABF u. GFB oder BFL u. FBD) gleich zwei Rechten ist, so sind diese Linien (AD, GL) parallel.

Eucl. I, 27 und 28.

Beweis des ersten Theils aus 22 und 24; des zweiten aus 20 und 24.

Anmerkung. Dieser Satz ist das Umgekehrte des vorigen; und kann auch, wie dieß bei den meisten umgekehrten Sätzen der Fall ist, indirect bewiesen werden. Wäre nämlich AD nicht parallel mit GL, so müßte es (24 Zus. 2) eine andere durch den Punct B gehende wie z. B. HJ sein; aber dann verfiele man in die Ungereimtheit, daß HBF = ABF sein müßte.

Zus. Gerade Linien (BL, CK, DJ Fig. 15), welche auf derselben Geraden (AF) senkrecht stehen, sind unter einander parallel.

27. Lehrsatz. Sind zwei oder mehrere gerade Linien (CD, EF Fig. 16) einer und derselben Geraden (AB) parallel, so sind sie auch stets unter einander parallel.

Eucl. I, 30. — L. G. I, 24.

Vorbereitung. Man zieht willkührlich die Gerade GL, welche die andern AB, CD, EF in den Puncten H, J, K schneidet.

Beweis aus 24 Zus. 1.

28. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie (CK Fig. 14) zwei andere (HJ u. GL) so schneidet, daß ein Paar der innern, an derselben Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel (JBF u. BFL) zusammen kleiner als zwei Rechte ist, so sind

1) diese beiden Linien (HJ u. GL) niemals einander parallel und
2) müssen sie auf eben dieser Seite der schneidenden Linie bei hinreichender Verlängerung in einem Puncte (E) zusammentreffen oder sich schneiden.

L. G. I, 22.

Beweis. Erster Theil. Wäre es nicht wahr, daß HJ und GL einander nicht parallel liefen, so müßte es wahr sein, daß sie parallel, und mithin JBF + BFL = 2 R. wären, was offenbar in geradem Widerspruch mit unserer Voraussetzung steht.

Zweiter Theil. Da also HJ nicht parallel mit GE ist, so läßt sich (24 Zus. 2) durch B eine andere Linie AD ziehen, welche der GE parallel läuft; HJ schneidet aber dann offenbar die Linie AD, und folglich auch stets die mit dieser parallele GL (24 Zus. 1) d. h. HJ und GL begegnen sich in irgend einem Puncte wie E.

Anmerkung. Bei Euclides findet sich dieser Satz unter den Grundsätzen, und zwar ist er der eilfte in der Reihe; allein er gehört nicht hieher; s. König über diese Stelle und über den 27ten Satz des ersten Buches, desgl. Tacquet über den 31ten Satz. Montucla (Histoire des Mathem. I, p. 209) vermuthet, nicht ohne Grund, daß derselbe durch Nachlässigkeit früherer Abschreiber aus seiner Stelle gerückt worden, und daß er ursprünglich ein Zusatz des 28ten Lehrsatzes im ersten Buche gewesen sei. Nassareddin-Al-Tussi hat in seiner, zu Rom erschienenen, arabischen Uebersetzung des Euclides einen Beweis dieses Satzes gegeben, welchen Wallis in lateinischer Uebersetzung in seine Opera Mathematica II, 667 u. 672 aufgenommen, und demselben einen eignen so wie viele Bemerkungen über diesen Gegenstand beigefügt hat. Man vergleiche auch noch über diesen Beweis, und über die gesammte Lehre von den Parallel-Linien die Abhandlungen von Castillon, die sich in den Memoires de l'Academie de Berlin für die Jahre 1786 und 1788 befinden.

Zus. 1. Parallel-Linien schneiden oder begegnen einander niemals und nirgends.

Beweis. Wäre dem nicht so, könnten mithin die Linien HJ, GL, obschon parallel, sich im Puncte E begegnen, so bildete HJE mit GLE in E den Winkel HEG. Man nehme auf HE einen beliebigen Punct B; unter allen Linien, die sich aus diesem ziehen lassen, muß

nothwendig auch eine sein, welche mit BE einen Winkel bildet, der $=$ BEF; diese Linie sei ABD, so daß also DBE $=$ BEF; dann wären (26) AD || GE, und darum 1) DBF $+$ BFE $= 2$ R.; aber weil nach Voraussetzung auch HE || GE, so ist auch 2) EBF $+$ BFE $= 2$ R.; und deshalb 3) DBF $+$ BFE $=$ EBF $+$ BFE, und mithin DBF $=$ EBF, was offenbar unrichtig ist. Es ist also nicht wahr, daß Linien, die parallel sind, sich jemals schneiden können, es ist mithin erwiesen, daß sie sich nie und nirgends schneiden.

Anmerkung. Man sieht daraus, daß die Euclidische Definition der Parallel-Linien eine Folgerung aus der unserigen ist.

Zus. 2. Zwei Linien (AD, GL Fig. 24), die sich nie begegnen oder schneiden, sind parallel.

Beweis. Wäre AD nicht || GL, so wäre auch nicht DBF $+$ BFL $= 2$ R. (25), sondern entweder größer oder kleiner als 2 R. Im erstern Falle wäre dann (20) ABF $+$ BFG $<$ 2 R., und müßten daher AD und GL nach eben dieser Seite hin hinreichend verlängert zusammentreffen und sich schneiden, was der ausdrücklichen Voraussetzung zuwider ist. Im zweiten Falle, wenn DBF $+$ BFL $<$ 2 R., müßten die Linien AD u. GL nach der Seite von L hin sich schneiden, was eben so wenig möglich ist.

Anmerkung. Hieraus sieht man, daß unsere Erklärung der Parallel-Linien als eine Folgerung aus der Euclidischen hergeleitet werden kann.

Zus. 3. Zieht man aus zwei beliebigen Puncten (F und B Fig. 14) einer und derselben Linie BF zwei andere (FE u. BE), die sich einander begegnen (in E), so ist die Summe der beiden innern Winkel (EFB, EBF), welche diese letztern Linien mit der erstern bilden, stets kleiner als 2 R.

Bew. Indirect.

Anmerkung. Dieser Satz ist die Umkehrung des Hauptsatzes.

29. Lehrsatz. Wenn mehrere gerade Linien (AB, AC, AD rc. Fig. 17) von einem Puncte (A) nach einer Geraden (EF) gezogen werden, so

1) kann unter allen diesen Linien niemals mehr als eine einzige (AB) sein, welche auf EF senkrecht steht.
2) bilden die übrigen in Beziehung auf die Senkrechte innere Winkel (ACB, ADB rc.), die desto spitzer und äußere (ACF, ADF), die desto stumpfer sind, je weiter sie sich von der Senkrechten entfernen.
3) ist die Senkrechte die kürzeste unter allen, und die übrigen werden desto länger, je weiter sie sich von ihr entfernen.

L. G. I, 15, 16.

Beweis. Erster Theil. Wenn ABC oder ABD $=$ R, so muß (28 Zus. 3) nothwendig ACB oder ADB $<$ R, also (17) ein spitzer sein, und darum (20) ACF oder ADF größer als ein Rechter, oder ein stumpfer.

Zweiter Theil. Es sei JD || AC, alsdann ist JDB $=$ ACB (24) daher ADB, weil er $<$ JDC, auch $<$ ACB, und mithin ADF $>$ ACF (20).

Dritter Theil. Ziehe CG $\perp$ auf AC und CH $\perp$ auf AC; so muß, weil, wie wir wissen, ACB spitz ist, die Linie CG unter CB

fallen, und daher die Verlängerung von AB schneiden. Dagegen muß der Punct H, weil ACD stumpf ist, zwischen A und D fallen.

AC ist nun entweder $=$ AB, oder $<$ AB; oder $>$ AB.

Wäre AC $=$ AB, so müßte offenbar, aus gleichem Grunde, AC $=$ AG, also auch AB $=$ AG sein, was unmöglich ist; wäre AC $<$ AB, so müßte aus gleichem Grunde AC $<$ AG, also um so mehr AG $<$ AB, sein, was unmöglich ist; es muß also AC $>$ AB; aber eben darum AH $>$ AC und um so mehr AD $>$ AC sein.

Zus. 1. Die Senkrechte (AB), die aus einem Puncte (A) auf eine gerade Linie (EF) gefällt wird, ist das Maaß für die Entfernung dieses Punctes von der Geraden.

Denn, eben als die kürzeste Linie hat die Senkrechte eine bestimmte Größe, während alle übrigen Linien, nach Maaßgabe des Winkels, unter welchem sie der gegebenen begegnen, bald länger, bald kürzer sein können.

Zus. 2. Aus einem Puncte (A) nach einer Geraden (EF Fig. 18) lassen sich auf derselben Seite der Senkrechten (AB) niemals zwei verschiedene Linien von gleicher Länge ziehen; aber wohl zwei gleich lange Linien (AC u. AJ), von denen die eine auf der einen und die andere auf der andern Seite der Senkrechten liegt; solche Linien bilden gleiche Winkel sowohl mit der Senkrechten, als auch mit der Geraden, nach welcher sie gezogen sind.

Bew. Beschreibt man aus A mit AC als Radius einen Kreis, der die *EF* in *J* schneidet, und zieht AJ, so ist immer AJ $=$ AC.

Denkt man sich nun BC auf die andere Seite der Senkrechten so gelegt, daß B in B bliebe und BA auf BA fiele, so müßte nothwendig der Punct C auf J fallen; denn fiele er zwischen B und J, so wäre AC kürzer als AJ und fiele er über J hinaus, so müßte AC $>$ AJ sein (Hauptsatz), während doch (nach Construction) AJ $=$ AC ist. Fällt also C auf J, so ist BC $=$ BJ, und muß AC auf AJ fallen; und ist mithin ACB $=$ AJB und BAC $=$ BAJ.

Anmerkung 1. Man ist nun im Stande, die dritte und vierte Aufgabe des ersten Buches aufzulösen.

Anmerkung 2. Unser Hauptsatz in seinen drei Theilen und die beiden Zusätze können auch durch Hülfe der Lehre von den Dreiecken erwiesen werden, und werden wirklich fast durchgängig so erwiesen; s. unten 41, Anmerkung, und 51 Zus. 4, Anm. 3.

30. Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien (AC, AB Fig. 19) sich in einem Puncte (A) schneiden, so erlangen die verschiedenen Puncte (H, F, D, C) der einen Linie (AC) eine desto größere Entfernung von der andern (AB), je weiter sie sich vom Durchschnittspuncte (A) entfernen.

Erläuterung. Da wir bereits wissen (29 Zus. 1), daß die Entfernung eines Punctes von einer Geraden gemessen wird durch das aus jenem auf diese gefällte Perpendikel, so ist zu erweisen, daß die Länge der Senkrechten (HJ, FG, DE, CB) zunimmt mit der Entfernung der Puncte H, F, D, C vom Durchschnittspuncte A.

Clavius zu Euclid. I, 28. — L. G. I, 20.

Beweis. Aus 29.

31. Lehrsatz. Zwei gerade Linien (AF, MG Fig. 15), welche parallel sind, haben überall gleiche Entfernung von einander; d. h.

die Senkrechten, die man von beliebigen Puncten der einen auf die andere fällt, sind alle von gleicher Länge.

L. G. I, 25.

Erläuterung. Der Grund der Worte „d. h." ist in 29 Zus. 1 enthalten.

Bew. Wären die Senkrechten BL und CK nicht gleich, sondern eine von ihnen z. B. CK länger als BL, so schneide man auf ihr ein Stück wie KO ab, welches gleich BL, und ziehe BO; offenbar ist dann immer LBO < R, also müssen die BO und LK in irgend einem Puncte, wie Q sich schneiden (28) und mithin ist OK < BL (30), was der Voraussetzung, daß OK = BL, geradezu widerspricht; also ist es nicht wahr, daß irgend ein Paar der Senkrechten zwischen Parallelen ungleich sind, sie sind daher alle von gleicher Länge.

Anmerkung 1. Durch Hülfe dieses Satzes kann man die zweite Auflösung der sechsten Aufgabe im ersten Buche zu Stande bringen.

Anmerkung 2. Man sieht, wie aus unserer Art, die Parallel-Linien zu betrachten, auch diese Eigenschaft folgt, die manche als Erklärung solcher Linien aufgestellt haben. s. 24 Anmerk. 5.

32. **Lehrsatz.** Wenn auf einer Geraden (MG Fig. 15) zwei Senkrechte (LB, CK) von gleicher Länge stehen, und man zieht durch deren Endpuncte (B, C) eine gerade Linie, so ist diese stets mit der erstgenannten (MG) parallel.

L. G. I, 19.

Beweis. Indirect.

Anmerkung. Dieser Satz ist die Umkehrung des vorhergehenden. —

Allgemeine Anmerkung zu der Lehre von den Parallel-Linien. Wir haben alle Eigenschaften der Parallel-Linien unmittelbar aus der aufgestellten Erklärung ohne alle Hülfe der Dreiecke hergeleitet. Manche, und unter ihnen Castillon, behaupten, daß Euclides diese Eigenschaften gleichfalls aus seiner Erklärung hergeleitet habe. Aber ist dem wohl in der That also? Offenbar hätte alsdann der erste Satz (der 27te), der von den Parallelen handelt, der Art sein müssen, daß das sich niemals schneiden oder begegnen zur Grundlage gemacht und daraus die Gleichheit der Wechselswinkel hergeleitet worden wäre, dieser Satz hätte also ungefähr so lauten müssen: „Zwei gerade Linien, die sich niemals treffen, bilden stets mit jeder beliebigen dritten, von der sie geschnitten werden, gleiche Wechselswinkel." Dann wäre in der That die Eigenschaft der Parallelen unmittelbar aus ihrer Erklärung hergeleitet. Allein Euclid's 27ter Lehrsatz enthält das völlig Umgekehrte unseres erwähnten Satzes, nämlich: „Wenn zwei gerade Linien von einer dritten unter gleichen Wechselswinkeln geschnitten werden, so sind sie parallel" d. h. sie begegnen sich nirgends, so daß also das Nichtzusammentreffen hier nicht als Grundbegriff, sondern als Folgerung aus der Gleichheit der Wechselswinkel erscheint. Im folgenden (28ten) Satze wird der Parallelismus aus der Gleichheit der correspondirenden Winkel hergeleitet, (also aus unserer Erklärung) aber mit Hülfe des vorhergehenden.

Es ist zwar wahr, der 29te Satz ist das Umgekehrte des 27ten, und scheinbar ohne Hülfe der beiden vorhergehenden erwiesen worden,

so daß ja Euclides denselben auch vor diese beiden hätte stellen können; allein es ist dieß auch nur ein Schein, da er beim Beweis seinen eilften Grundsatz d. i. unsern Lehrsatz (28) (siehe die Anmerkung dazu) anwendet, der doch weit davon entfernt ist, ein Grundsatz zu sein; und der, wenn man von der Euclidischen Definition des Parallelismus ausgeht, nicht anders erwiesen werden kann als durch Hülfe des 27ten Satzes, aus dem er eine Folgerung ist. S. König über diesen Satz.

Euclides hat wohl die Sache sich so gedacht: Zwei gerade Linien haben entweder eine solche gegenseitige Lage, daß sie sich irgendwo treffen und mithin einen Winkel bilden, oder daß sie sich niemals begegnen, und in diesem letztern Falle heißen sie parallel. Aber man muß billig zweifeln, ob der Begriff des Nichtzusammentreffens deutlich genug ist, um als Grundbegriff zu gelten; Euclides selbst scheint dieß gefühlt zu haben, da er, wie vorher bemerkt worden, anstatt dieses Nichtzusammentreffens, sich der Gleichheit der Wechselswinkel bediente.

Zweiter Abschnitt.

Von den Seiten und Winkeln der Dreiecke und Parallelogramme.

---

33. Erklärung. Figur heißt jeder Flächenraum, der zwischen geraden oder krummen Linien enthalten und durch dieselben begränzt ist.

Eucl. I, Erkl. 14. — L. G. I, Erkl. 13.

Zus. Zwei gerade Linien können nie eine Figur bilden; es werden dazu wenigstens drei erfordert.

Eucl. I, Grundsatz 12.

Anmerkung. Wir wiederholen nochmals, was schon oben (15, Anmerkung 3) bemerkt worden ist, daß alle Figuren und folglich auch alle einzelne Theile derselben als in derselben Ebene liegend betrachtet werden.

34. Erklärung. Geradlinig heißt jede Figur, welche nur von geraden Linien gebildet und begränzt wird.

Eucl. Erkl. 20. — L. G. I, Erkl. 13.

Anmerkung. Der Kreis (11) ist keine Linie, sondern eine Figur, da er von dem Umkreise ganz begränzt wird. Der Kreis ist die einzige krummlinige Figur im Gebiete der sogenannten Elementargeometrie.

35. Erklärung. Geradlinige Figuren heißen dreiseitige oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke 2c. je nachdem sie von drei, vier, fünf 2c. Seiten begränzt werden, und mithin drei, vier, fünf 2c. Ecken haben. Unter dem Namen der Vielecke begreift man gewöhnlich alle diejenigen geradlinigen Figuren, welche mehr als vier Seiten haben.

Eucl. I, Erkl. 21, 22, 23. — L. G. I, Erkl. 14.

36. Erklärung. Nimmt man eine der Seiten eines Dreiecks (ABC Fig. 20), gleichviel welche (AC), zur Grundlinie, oder Ba-

fis, so führen alsdann die beiden andern (BA, AC) den Namen Schenkel, der Scheitel (B) des Winkels, der über der Grundlinie steht, heißt die Spitze des Dreiecks.

37. Erklärung. Ein Dreieck (ABC Fig. 20) heißt gleichseitig, wenn die drei dasselbe bildenden Linien oder Seiten von gleicher Länge sind; gleichschenkelig heißt ein Dreieck (Fig. 34) wenn zwei Seiten einander gleich, und endlich ungleichseitig, wenn keine Seite der andern gleich ist (Fig. 21).

Eucl. I, Erkl. 24, 25, 26. — L. G. I, Erkl. 15.

Zus. Alle gleichseitigen Dreiecke sind auch gleichschenkelig.

Anmerkung 1. Wie man verfahren müsse, um ein gleichseitiges oder gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wird in der zweiten und dritten Aufgabe des zweiten Buches derselben gelehrt; und man ist bereits durch den Grundsatz (13) in den Stand gesetzt, sie zu lösen.

Anmerkung 2. Man kann auch nun schon ein ungleichseitiges Dreieck beschreiben (CAB Fig. 21). Aber um solches in allen Fällen thun zu können, muß man im Stande sein, aus drei gegebenen Linien, von ungleicher Länge, ein solches Dreieck zu construiren. Es ist dieß der Gegenstand der ersten Aufgabe des zweiten Buches, wird aber die Kenntniß eines spätern Satzes (43) dazu erfordert.

38. Lehrsatz. In jedem Dreieck (ABC Fig. 21) ist

1) der Außenwinkel (BCE), den eine der Seiten (BC) mit der Verlängerung der anliegenden (AC) bildet, so groß als die beiden innern gegenüberstehenden Winkel zusammengenommen (A + B), und

2) die drei Winkel jedes Dreiecks zusammen (A + B + C) sind so groß als zwei Rechte.

Eucl. I, 32. — L. G. I, 27.

Vorbereitung zum ersten Theil des Beweises. Da AB und CB einander begegnen, und daher (28, Zus. 1) nicht parallel sind, so sei eine andere CD mit AB parallel.

Beweis. Erster Theil aus (24) und (25).

Zweiter Theil aus dem ersten Theile und aus (20).

Zus. 1. In jedem Dreiecke (ABC) ist jeder Außenwinkel (BCE) größer als einer der innern Gegenwinkel (A oder B).

Eucl. I, 16.

Zus. 2. Ist in einem Dreiecke (ABD Fig. 30) die Summe zweier Winkel (A und B) gleich der Summe zweier Winkel (FEJ und F) eines andern Dreiecks (EFJ), so ist auch stets der dritte Winkel (D) des erstern Dreiecks gleich dem dritten Winkel (EJF) des letztern, und umgekehrt.

L. G. I, 27 Zus. 2.

Zus. 3. Ist in einem Dreieck (ABC Fig. 22) einer der Winkel (B) ein Rechter, so sind die beiden andern (BAC und ACB) zusammen gleich einem Rechten.

Zus. 4. Ein Dreieck kann nicht mehr als Einen Rechten, und noch weniger mehr als Einen stumpfen Winkel haben, in beiden Fällen sind die beiden andern spitze Winkel.

39. Erklärung. Rechtwinkelig heißt ein Dreieck (ABC Fig. 22), in welchem einer der Winkel ein Rechter ist. Die diesem gegenüberliegende Seite (AC) heißt Hypotenuse, die beiden andern Catheten.

Stumpfwinkelig nennt man ein Dreieck (ACD Fig. 22), wenn einer seiner Winkel (ACD) stumpf ist.

Sind in einem Dreiecke (CAB Fig. 20) alle Winkel spitze, so heißt dasselbe spitzwinkelig.

Eucl. I, Erkl. 27, 28, 29. — L. G. I, Erkl. 16.

40. Lehrsatz. Wird in einem Dreiecke aus der Spitze (A Fig. 22 u. 23) eine Linie (AB) senkrecht auf die Richtung der Grundlinie gezogen, so fällt dieselbe mit einem der Schenkel (36) zusammen, wenn das Dreieck (BAC Fig. 22) an der Grundlinie rechtwinkelig; dagegen außerhalb des Dreiecks, wenn dasselbe (CAD Fig. 22) an der Grundlinie stumpfwinkelig, und zwar nach der Seite des stumpfen Winkels (ACD) hin, und endlich innerhalb des Dreiecks (CAD Fig. 23), wenn beide Winkel an der Grundlinie spitz sind.

Bew. Indirect, durch Hülfe des frühern Satzes (29).

41. Lehrsatz. In jedem Dreiecke ist diejenige Seite die größte, welche den größten Gegenwinkel hat.

Eucl. I, 19. — L. G. I, 14.

Beweis. Ist $\triangle$ BAC (Fig. 22) rechtwinkelig, so folgt aus (29), daß AC $>$ AB; ist $\triangle$ CAD (Fig. 22) stumpfwinkelig, so ist, wenn AB $\perp$ auf CD, AC $>$ AB, AD $>$ A C (29). Wenn $\triangle$ CAD (Fig. 23) spitzwinkelig, und W. ACD $<$ ADC, so sei AB $\perp$ auf CD, und AE $=$ AC. Da nun sowohl $\triangle$ ABC als auch $\triangle$ ABD rechtwinkelig, so ist (38, Zus. 2) W. CAB $+$ ACB $=$ BAD $+$ ADB, mithin, weil W. ACB $>$ ADB (Voraussf.) W. CAB $<$ BAD, und darum, da W. BAE $=$ CAB (29 Zus. 2), auch W. BAE $<$ BAD, folglich fällt der Punct E zwischen B und D, und deshalb AD $>$ AE oder AC (29).

Anmerkung. Aus diesem Satze werden in allen Lehrbüchern die Sätze hergeleitet, welche bei uns Satz 29 und seine beiden Zusätze ausmachen.

42. Lehrsatz. In jedem Dreiecke ist derjenige Winkel der größte, welcher die größte Gegenseite hat.

Eucl. I, 18. — L. G. I, 14.

Beweis. Es sei AD (Fig. 22 und 23) größer als CD, und AB $\perp$ auf die (nöthigenfalls verlängerte) CD; alsdann zeigt man, daß, wegen (41), W. ACD nicht kleiner als ADC, und eben so wenig, wegen 38, Zus. 2 W. ACD $=$ ADC sein kann.

Anmerkung. Dieser Satz, das Umgekehrte des vorigen, wird meist indirect bewiesen; doch muß dann ein Satz, der bei uns später folgt (51), vorausgehen.

43. Lehrsatz. In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte.

Eucl. I, 20. — L. G. I, 8.

Vorbereitung. Ziehe CH (Fig. 22 und 23) senkrecht auf AD.

Beweis aus S. 29, welcher sowohl auf $\triangle$ ACH, als auf $\triangle$ CHD angewandt wird.

Anmerkung 1. Man kann nun die erste Aufgabe des zweiten Buches auflösen.

Anmerkung 2. Für alle diejenigen, welche die gerade Linie als den kürzesten Weg zwischen zwei Puncten erklären, ist dieser Satz ein Axiom, s. oben 3, Anmerkung 1.

44. Lehrsatz. Zieht man aus den Endpuncten (A und C Fig. 24) einer Seite (AC) eines Dreiecks (ABC) zwei Gerade (AD, CD) nach einem innerhalb des Dreiecks gelegenen Puncte (D), so sind diese Linien zusammen (AD $+$ CD) stets kleiner als die beiden übrigen Dreiecks-

seiten zusammen (AB+CB), aber sie bilden einen größern Winkel (ADC) als diese.

Eucl. I, 21. — L. G. I, 9.

Vorbereitung. Verlängere AD bis nach E.

Beweis. Erster Theil. Aus S. 43, angewandt auf die Dreiecke ABE und DEC.

Zweiter Theil. Aus Satz 38, Zus. 1.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß unser Satz gültig bliebe, wenn der Punct D auf eine der Seiten AB oder AG fiele.

45. Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke (BAC und GAC Fig. 25) so beschaffen sind, daß einer der Winkel (A) des einen gleich ist einem der Winkel (A) des andern, und beide Schenkel (AB, AC) dieses Winkels in dem ersten Dreiecke, einzeln gleich sind den Schenkeln dieses Winkels im andern Dreiecke, (namentlich BA = GA, AC = AC), so sind stets

1) die dritten Seiten (BC, GC) von gleicher Länge, und
2) die Winkel in beiden Dreiecken, die gleichen Seiten gegenüberstehen, von gleicher Größe (namentlich B = G, und W. ACB = ACG).

Eucl. I, 4. — L. G. I, 6.

Bew. Man denkt sich das eine der Dreiecke z. B. GAC so über das andere BAC gelegt, daß nicht nur A auf A, sondern auch die Seite AC auf AC sowie Seite AG auf AB falle (16, Anmerkung 3) und zeigt, daß dann auch alle die übrigen Stücke einzeln sich decken und mithin gleich sein müssen.

Zus. Die Flächenräume beider Dreiecke sind auch gleich, und daher sind diese Dreiecke in jeder Beziehung gleich; d. h. sie sind congruent.

Anmerkung 1. Man kann diesen Zusatz nicht umkehren und sagen, daß Dreiecke, die gleichflächig sind, auch stets gleiche Seiten und gleiche Winkel haben. Im zweiten Buche soll bewiesen werden, daß Dreiecke an Flächenraum gleich sein können, ohne es in Absicht auf ihre Seiten und Winkel zu sein d. h. ohne congruent zu sein.

Anmerkung 2. Die Voraussetzungen, welche unserm Satze zum Grunde liegen, sind:
1) die Gleichheit zweier Seiten-Paare; nämlich die beiden Seiten des einen Dreiecks einzeln gleich denen des andern und
2) die Gleichheit eines Winkelpaares (in jedem Dreieck einer) aber nicht eines beliebigen, sondern gerade der beiden Winkel, welche von den Seiten, deren gegenseitige Gleichheit man kennt, eingeschlossen werden. Man muß hierauf gebührend achten. Setzte man die Gleichheit zweier solchen Winkel voraus, die nicht die eingeschlossenen wären, sondern einem Paare der gleichen Seiten gegenüberlägen, so wäre die Congruenz der Dreiecke nicht unbedingt nothwendig, sondern würde ohne Ausnahme nur bei rechtwinkeligen Dreiecken, bei den übrigen aber nur in besondern Fällen Statt finden, welche der weiter unten folgende Satz (49) näher bestimmen wird.

46. Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke (ABC und AGC Fig. 25) so beschaffen sind, daß eine Seite (AC) des einen gleich ist einer Seite (AC) des andern, und zwei Winkel des erstern einzeln gleich sind zweien gleichgelegenen Winkeln des andern (z. B. BAC = GAC, und ACB = GCA), so ist nothwendig

1) der dritte Winkel B gleich dem dritten Winkel G und
2) die übrigen Seiten sind gleich, namentlich je zwei solche, die gleichen Winkeln gegenüberstehen (also AB = AG, und BC = GC).

Eucl. I, 26. — L. G. I, 7.

Beweis. Erster Theil aus 38, Zus. 2.

Zweiter Theil. Man denke sich △ GAC so auf △ BAC gelegt, daß die Seite AC des erstern die Seite AC des letztern deckt, und beweise, daß alsdann, weil W. GAC = BAC ist, AG in ihrer Richtung mit AB, und eben so, weil W. ACG = ACB ist, CG in ihrer Richtung mit CB zusammenfallen, und eben darum AG = AB sein muß, indem man zeigt, daß die Annahme des Gegentheils, wie z. B. AJ = AG auf die Ungereimtheit führen würde, nach welcher ACJ = ACB sein müßte ꝛc.

Zusatz. Die Dreiecke haben auch gleiche Flächenräume, und sind daher in jeder Beziehung gleich, d. h. sie sind congruent.

47. Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken (CAB, CAG Fig. 26, 27 und 28) zwei Seiten (AC, AB) des einen, einzeln gleich sind zweien Seiten (AC, AG) des andern, aber einen größern Winkel (CAB) bilden, als die ihnen gleichen Seiten des andern Dreiecks, so ist stets die dritte Seite (BC) des ersten Dreiecks größer als die dritte Seite (CG) des zweiten.

Eucl. I, 24. — L. G. I, 10.

Vorbereitung zum Beweise. Man nehme an, daß die Ecke A des △ GAC mit der Ecke A von △ BAC, und AC mit AC zusammenfalle; dann muß nothwendig AG zwischen die Schenkel des Winkels CAB fallen (16, Anmerkung 3), und der Endpunct G der Seite AG liegt entweder auf der Seite BC wie in Fig. 26, oder unterhalb derselben wie in Fig. 27, oder endlich oberhalb wie in Fig. 28.

Beweis. Im ersten Falle leuchtet die Richtigkeit unseres Satzes von selbst ein. Für den zweiten (Fig. 27) hat man aus (43) GC < GJ + JC, und AB < AJ + JB, woraus man leicht GC < BC herleitet; für den dritten Fall nimmt man Satz (44) zu Hülfe.

Anmerkung. Der umgekehrte Satz: „Wenn zwei Seiten AB und AC des Dreiecks BAC einzeln gleich sind zweien Seiten AG, AC des Dreiecks GAC aber die dritte Seite BC in dem einen größer als die dritte GC in dem andern, so ist auch stets W. BAC > GAC" wird leicht indirect bewiesen.

Eucl. I, 26. — L. G. I, 10 Anmerkung.

48. Lehrsatz. Wenn zwei Seiten (AB, BD) eines Dreiecks (ABD Fig. 29 und 30) einen Winkel (ABD) einschließen, welcher gleich ist dem Winkel (EFG), der in einem andern Dreiecke (FEG) von zwei Seiten (EF und FG) gebildet wird, von denen die eine (EF) gleich ist einer der genannten Seiten (AB) des ersten Dreiecks (ABD), aber die zweite (FG) länger ist, als die zweite (BD), so ist stets die dritte Seite (EG) des zweiten Dreiecks größer als die dritte (AD) des ersten, wenn der Winkel (D), der an dieser dritten Seite und der gleichen Seite (AB) gegenüberliegt, entweder ein Rechter, oder spitz ist; ist dagegen dieser Winkel stumpf, so kann die dritte Seite (EG) des zweiten Dreiecks, eben so wohl kleiner, als größer, als eben so groß wie die Seite (AD) des ersten Dreiecks sein.

Vorbereitung zum Beweise. Nimm FJ = BD, und ziehe EJ, welche dann gleich ist AD (45), so wie W. EJF = ADB.

Beweis. Erster Theil. Ist ADB (Fig. 29) ein Rechter oder spitz, so ist EJF auch ein Rechter, oder stumpf, mithin > EGJ ꝛc.

Zweiter Theil. Ist ADB (Fig. 30) und daher auch EJF stumpf,

so ist EJG spitz, und kann daher entweder > oder = oder < EGF sein, und daher ꝛc.

49. **Lehrsatz.** **Wenn zwei Seiten (AB, AC) eines Dreiecks (ABC Fig. 31 und 32) einzeln gleich sind zweien Seiten (GA, AC) eines andern Dreiecks (GAC) und überdieß ein Winkel (ACB), der aber nicht von den in Rede stehenden Seiten eingeschlossen ist, sondern einer derselben (AB) gegenüberliegt, gleich ist dem gleichgelegenen Winkel (ACG) des andern Dreiecks, so sind die beiden Dreiecke congruent, wenn die den gleichen Seiten (AC und AC) gegenüberstehenden Winkel (ABC, AGC) beide zugleich entweder rechte, oder stumpfe, oder spitze sind.**

Beweis. Wenn man beide Dreiecke so übereinander legt, daß die Ecke A des △ CAG auf die Ecke A des △ CAB und AC mit AC zusammenfällt; wegen der Gleichheit der Winkel wird dann auch immer CG in die Richtung von CB fallen; aber ich behaupte, es müsse dann stets auch G auf B fallen. Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet von selbst ein, wenn AGC und ABC Rechte sind; und nicht minder wahr ist sie, wenn beide Winkel spitz, oder stumpf sind. Denn gesetzt, es könnte anders sein, es fiele also der Punct G zwar auf CB, aber entweder zwischen C und B, oder über B hinaus; so müßten, wenn man auf CB die Senkrechte AJ zieht, die Puncte G und B der Linie CB auf derselben Seite dieses Perpendikels liegen, da die Winkel ABC und AGC beide entweder spitz, oder stumpf sein sollen (40); aber, da auch AG = AB ist, so würden also dann auf derselben Seite der Senkrechten zwei verschiedene Linien von gleicher Länge sich befinden, was (29, Zus. 2) unmöglich ist. Es fällt also nothwendig G auf C ꝛc.

Zus. Zwei recht- oder stumpfwinkelige Dreiecke sind congruent, wenn außer den rechten oder stumpfen Winkeln, auch noch zwei Seiten des einen den beiden gleichgelegenen Seiten des andern einzeln gleich sind.

L. G. I, 18.

Anmerkung 1. Die Verschiedenheit der Fälle hat darinn ihren Grund, daß sich aus dem Puncte A (Fig. 31) jederzeit zwei gleiche Linien AG, Ag ziehen lassen, die aber an verschiedenen Seiten der Senkrechten liegen, wodurch zwei sehr verschiedene Dreiecke CAg und CAG entstehen, obschon in ihnen AC = AC, Ag = AG = AB und W. ACB = ACG = ACg ist.

Anmerkung 2. Manche drücken unsern Satz also aus: „Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen einzeln gleich sind zweien Seiten des andern, und der der größern dieser Seiten in dem einen Dreiecke gegenüberliegende Winkel eben so groß ist als der gleichgelegene Winkel des andern, so sind diese Dreiecke stets congruent." Dann sind nämlich die beiden dem andern Paare der gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel in jedem Falle spitze.

Karsten Mathesis Theoretica. Geom. §. 87.

50. **Lehrsatz.** **Wenn in zwei Dreiecken (ABC und GAC Fig. 25) die drei Seiten des einen einzeln gleich sind den drei Seiten des andern (AB = AG, AC = AC, BC = GC), so sind auch stets je zwei solche Winkel von gleicher Größe, die entweder von gleichen Seiten eingeschlossen werden, oder gleichen Seiten gegenüberliegen (nämlich BAC = GAC, ABC = AGC, ACB = ACG).**

Eucl. I, 8. — L. G. I, 11.

Beweis. Man weist die Gleichheit für eines der drei Winkelpaare nach z. B. BAC und GAC, und zwar indirect, weil man nämlich wegen Satz 47 durch die Annahme der Ungleichheit dieser Winkel in eine Ungereimtheit verfallen würde.

Zus. 1. Unsere Dreiecke sind auch gleichflächig und darum congruent.

Zus. 2. Zieht man aus zwei Puncten (B, C) einer beliebigen Geraden (BC) zwei andere (BA, CA) die sich in irgend einem Puncte (A) begegnen, so lassen sich auf derselben Seite und aus denselben Puncten dieser Geraden nicht zwei Linien ziehen, die einzeln den erstgenannten gleich sind, und sich in einem andern Puncte als diese begegnen.

Eucl. I, 7.

Anmerkung 1. Man ist nun im Stande, folgende Aufgaben zu lösen: die 6te, 12te, und 13te des ersten Buchs, und die 4te des zweiten.

Anmerkung 2. Man kann unsern Satz nicht umkehren und sagen: „Wenn in zwei Dreiecken, die Winkel des einen einzeln den Winkeln des andern gleich sind, so sind auch nothwendig je zwei solche Seiten gleich, die gleichen Winkeln gegenüberliegen." Denn Dreiecke können in ihren Winkeln übereinstimmen, und dabei dennoch an Flächenraum sehr verschieden sein. Zöge man z. B. im Dreieck BEF (Fig. 33) die Linie AC || EF, so wäre △ BAC gleichwinkelig mit △ BEF (24). Es soll unten in dem vierten Buche gezeigt werden, daß die Gleichheit zweier Dreiecke in ihren Winkeln nicht ihre vollendete Gleichheit oder Congruenz, sondern blos die Gleichheit ihrer Gestalt, oder ihre Aehnlichkeit zur Folge hat.

51. Lehrsatz. In jedem gleichschenkeligen Dreiecke (ABC Fig. 33 und 34) sind die Winkel über der Grundlinie (BAC und BCA) von gleicher Größe, und eben so auch die durch Verlängerung der Schenkel entstehenden Winkel unter der Grundlinie (EAC und ACF).

Eucl. I, 5. — L. G. I, 12.

Erster Beweis. (Euklidischer) Fig. 33. Man verlängert die Schenkel, nimmt BF = BE, zieht AF, CE, und zeigt (45), daß AF = CE, W. AFC = AEC, W. BAF = BCE, und daraus (45) W. EAC = ACF etc.

Zweiter Beweis. Fig. 34. Man nimmt an, daß BK den Winkel an der Spitze halbire, und gebraucht dann Satz 45.

Dritter Beweis. Fig. 34. Das Einfachste, woraus sich außerdem noch mehrere Folgerungen herleiten lassen, ist, daß man ein zweites gleichschenkeliges Dreieck AJC entweder auf derselben Seite der Grundlinie AC, oder auf der entgegengesetzten, und BJ zieht, welche die AC in K schneide. Auf △ ABJ und △ JBC wendet man nun Satz 50, und darauf Satz 45 auf △ ABK und △ BCK.

Anmerkung 1. Man kann nun die 14te Aufgabe des ersten Buches auflösen.

Zus. 1. Kennt man den Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks, so sind auch die Winkel über der Grundlinie bekannt. Jeder von ihnen ist gleich dem Ueberschuß eines Rechten über die Hälfte des Winkels an der Spitze.

Zus. 2. In einem gleichschenkeligen Dreiecke kann kein anderer Winkel ein Rechter sein als der an der Spitze, und in diesem Falle ist jeder der beiden andern gleich der Hälfte eines Rechten.

Wegen S. 38, und S. 38, Zus. 3.

Zus. 3. Jedes gleichseitige Dreieck ist auch ein gleichwinkeliges, und jeder Winkel enthält zwei Drittheile eines Rechten. —

Anmerkung 1. Man ist nun im Stande, die 16te Aufgabe des ersten Buches zu lösen.

Zus. 4. Eine Senkrechte (BK Fig. 34), die man aus der Spitze eines gleichschenkeligen oder gleichseitigen Dreiecks (ABC) auf die Grundlinie (AC) fällt, halbirt sowohl die Grundlinie, als auch den Winkel an der Spitze.

Umgekehrt ist eine Gerade, die man aus der Spitze eines gleichschenkeligen oder gleichseitigen Dreiecks so zieht, daß sie entweder den Winkel an der Spitze oder die Grundlinie halbirt auf letzterer stets senkrecht.

Tacquet über den 26ten Satz im ersten Buche des Euclides.

Beweis. Aus dem Hauptsatze verbunden mit Satz 46.

Anmerkung 2. Man kann nun die Auflösung der vierten und die erste Auflösung der dritten Aufgabe des ersten Buches zu Stande bringen.

Anmerkung 3. Durch Hülfe dieses Zusatzes wird meist der Satz bewiesen, den wir oben als zweiten Zusatz aus S. 29 hergeleitet haben.

Zus. 5. Wenn man über derselben Grundlinie (AC Fig. 34) zwei verschiedene gleichschenkelige Dreiecke (ABC und AJC Fig. 34) beschreibt, und ihre beiden Spitzen (B und J) verbindet, so steht diese (nöthigenfalls verlängerte) Gerade (BJ) stets senkrecht auf der Grundlinie und halbirt dieselbe.

Der Beweis liegt im dritten Beweise des Hauptsatzes.

Anmerkung 4. Dieß setzt uns in den Stand, aus dem ersten Buche der Aufgaben, die 5te, 7te und 15te zu lösen.

Anmerkung 5. Daß dieselbe Linie, welche den Winkel an der Spitze halbirt, auch die Grundlinie in zwei gleiche Theile theilt, ist eine Eigenschaft, die keiner andern Classe von Dreiecken, als den gleichschenkeligen und gleichseitigen zukommt. In allen andern Dreiecken wird durch eine solche Linie die Grundlinie in ungleiche Stücke zertheilt, und zwar ist dasjenige das größere, welches an der größern der beiden Dreiecksseiten anliegt.

Denn es sei im $\triangle$ ABC (Fig. 35), AB $>$ BC, aber W. ABD $=$ DBC. Nimm BJ $=$ BC, ziehe DJ, so ist DJ $=$ DC (45), W. BDC $=$ BDJ, und W. AJD $=$ ABD $+$ BDJ (37) $=$ ABD $+$ BDC $=$ ABD $+$ ABD $+$ A (37), also AJD $>$ A, und deshalb AD $>$ DJ oder DC. — Diese Bemerkung ist schon von *Proclus* gemacht, und von Clavius zu Eucl. I, 19 vorgetragen worden.

Zusatz 6. Schneidet man auf den Schenkeln (AB, BC Fig. 33) eines gleichschenkeligen Dreiecks, oder deren Verlängerungen, von der Spitze B aus gleiche Stücke (BE, BF) ab, so bildet die Linie (EF) welche die Endpuncte der Stücke verbindet, mit diesen ein gleichschenkeliges Dreieck (BEF), welches mit dem gegebenen (ABC) gleichwinkelig, und dessen Grundlinie (EF) parallel ist der Grundlinie (AB) des erstern.

Beweis. Aus dem Hauptsatze in Verbindung mit (24).

52. Lehrsatz. Alle Dreiecke, in denen zwei Winkel von gleicher Größe, sind gleichschenkelig.

Eucl. I, 6. — L. G. I, 13.

Beweis. Indirect; man zeigt, daß man dem vorigen Satze zufolge durch Annahme des Gegentheils in eine Ungereimtheit verfallen würde.

Zusatz. Jedes gleichwinkelige Dreieck ist auch ein gleichseitiges.

53. Lehrsatz. Wenn man aus einem der Endpuncte (C) der Grundlinie (AC) eines gleichschenkeligen Dreiecks (AGC Fig. 37, 38

und 39) nach dem (nöthigenfalls verlängerten) Gegenschenkel (AG) eine gerade Linie (CD) so zieht, daß sie an Länge gleich dem Schenkel ist, so bildet dieselbe mit der verlängerten Grundlinie in dem genannten Puncte C einen Winkel (DCE), welcher dreimal so groß ist, als jeder Winkel (A und GCA) über der Grundlinie des in Rede stehenden Dreiecks.

Erläuterung. Es sind drei Fälle zu unterscheiden, indem CD außerhalb des Dreiecks AGC und zwar über G hinaus, (Fig. 37) oder innerhalb desselben, (Fig. 38) oder wiederum außerhalb aber über A hinaus (Fig. 39) fallen kann.

Beweis. Erster Fall. $DCE = DAC + ADC$ (38)
$= DAC + DGC$ (51)
$= DAC + 2 . GAC$ (38)
$= 3 . A.$

Zweiter Fall.
$DCE = DCG + GCE = DCG + GAC + AGC$ (38)
$= DCG + GAC + GDC$ (51)
$= DCG + DCA + DAC + GAC$ (38)
$= 3 . A.$

Dritter Fall. Der außerstumpfe Winkel
$DCE = GCE + GCA + ACD = GAC + AGC + GCA + ACD$
$= GAC + GCA + GDC + ACD$
$= GAC + GCA + GAC$
$= 3 . GAC$

Anmerkung 1. Die Linie CD trifft die Verlängerung des Gegenschenkels und zwar den über die Spitze hinaus gehenden Theil derselben, so lange AGC (Fig. 37) stumpf, und DGC spitz ist. Wäre AGC ein Rechter, so würde CD mit CG zusammenfallen, und $A = \frac{1}{2}$ R (51, Zus. 2), also $GCE = AGC + A = R + \frac{1}{2} R = 3$ A sein.

Ist AGC spitz (Fig. 38) so fällt D so lange zwischen A und G bis daß $GA = AC = GC$; oder das Dreieck gleichseitig wird. Dann ist $A = \frac{2}{3}$ R (51, Zus. 3), und, weil CD mit CA zusammenfällt, $DCE = 2$ R (21)
$= 3 . \frac{2}{3} R = 3 . A.$

Wird AGC noch spitzer (Fig. 39), so fällt CD unterhalb A, und, weil G kleiner, so wird A größer, als im vorigen Falle, oder $> \frac{2}{3}$ R, und deshalb $3 A > 2 R$, also muß Winkel DCE nun ein außerstumpfer werden, wie er in Fig. 39 durch den Kreisbogen angedeutet ist.

Anmerkung 2. Könnte man, wenn ein Winkel DCE gegeben, aus einem Puncte D seines Schenkels die Linien DGA und CG geometrisch d. h. mit Sicherheit und Genauigkeit so ziehen, daß $GC = AG = CD$ wäre, so würde $A = \frac{1}{3}$ DCE sein; und die berühmte Aufgabe, einen gegebenen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, wäre dadurch gelöst. Allein dieß läßt sich nicht bewerkstelligen. Wir werden in dem fünften und achten Buche weiter über diesen Gegenstand handeln.

Anmerkung 3. Es giebt noch verschiedene andere nicht unwichtige die Seiten und Winkel von Dreiecken betreffende Eigenschaften, für die es aber entweder passender ist, ihnen einen spätern Platz anzuweisen, oder sogar nothwendig, indem die bisher bewiesenen Sätze zu ihrer Begründung nicht hinreichen. Zu der ersten Classe gehören der zweite Satz des fünften Buchs (241) und der dritte des sechsten (272); zu der zweiten, der 13te, 41te ꝛc. Satz im vierten Buche (207—208).

54. Lehrsatz. Sind zwei gerade Linien (AB, CD Fig. 40) nicht nur unter einander parallel, sondern auch von gleicher Größe, so sind auch stets die beiden Verbindungslinien (BD, AC) unter einander gleich und parallel.

Eucl. I, 33. — L. G. I, 31.

Vorbereitung zum Beweise. Man zieht aus einer der Ecken z. B. C nach der gegenüberstehenden eine gerade Linie.

Beweis. Aus (24) und (45).

Anmerkung. Die Figur ABDC ist also dergestalt aus vier Linien gebildet, daß die gegenüberliegenden Seiten unter einander parallel sind.

55. **Erklärung.** Eine vierseitige Figur, (Fig. 40) in welcher die Gegenseiten parallel sind, führt den Namen eines **Parallelogramms.** Die Linien, welche zwei gegenüberliegende Ecken verbinden, heißen **Diagonalen.**

L. G. I, Erkl. 17, 18.

Anmerkung 1. Parallelogramm bezeichnet, seiner Abstammung nach, eine Figur, deren Seiten parallel laufen; und ist nichts anders als was Euclides in der 33ten Erklärung zu seinem ersten Buche unter dem Namen Rhomboid begreift. In diesem Sinne würden — wie man im zweiten und vierten Buche noch näher sehen wird — alle regelmäßigen Vielecke von gerader Seitenzahl zu den Parallelogrammen gehören, wenn nicht der Gebrauch diese Benennung auf die vierseitigen Figuren beschränkt hätte.

Anmerkung 2. Man kann ein Parallelogramm als durch eine gerade Linie erzeugt betrachten, welche sich mit sich selbst parallel fortbewegt; wobei die Endpuncte C und D dieser Linie offenbar die Seiten CA und DB (Fig. 40) beschreiben würden, s. oben 2, Anm. 2. Das Parallelogramm heißt schiefwinkelig wenn CD sich nicht allein in der Richtung von E nach A, sondern auch zugleich von D nach F bewegt, und mithin eine zusammengesetzte Bewegung hat. Folgte dagegen die CD blos der einfachen Bewegung von E nach A, so würde CA senkrecht auf CD stehen, und das so entstandene Parallelogramm würde wie in (58) Rechteck heißen.

Anmerkung 3. Hierauf beruht das artige Parallel-Lineal, eine schon vor Jahren gemachte Erfindung des Niederländers Eckhardt. Es besteht aus einem einfachen Lineal, das sich auf zwei kleinen Rollen, von vollkommen gleicher Größe, und darum mit sich selbst stets parallel bewegt. Die vollkommene Gleichheit der Größe beider Röllchen ist unerläßlich, denn ohne sie würde das Lineal einen Kreis beschreiben, dessen Halbmesser desto größer wäre, je kleiner der Unterschied zwischen den Durchmessern der Rollen und je größer ihre Entfernung von einander sein würde. Dieß hat schon Hero aus Alexandrien benutzt, um allerlei Kunstgebilden kreisförmige Bewegungen zu ertheilen. Man sehe seine Αὐτόματα in Mathem. Veter. p. 249. — Perrault hat von dieser Erfindung eine Anwendung gemacht, um sehr große Kreise mit kleinen Werkzeugen zu beschreiben. Man findet die dahin gehörigen Abbildungen und Beschreibungen in seiner französischen Uebersetzung des Vitruvius p. 82; woraus sie entlehnt sind von Leupold Theatr. Mach. I, Tab. XX, b, Fig. 7.

56. **Alle Parallelogramme haben folgende Eigenschaften:**

1) Die gegenüberstehenden Seiten (AB und CD; AC und BD Fig. 40) sind gleich.
2) Die gegenüberstehenden Winkel (ACD und ABD; CAB und CDB) sind gleich.
3) Zwei an derselben Seite liegende Winkel sind zusammen so groß als zwei Rechte.
4) Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.

Eucl. I, 34. — L. G. I, 29, 32.

Beweis. 1ter, 2ter und 4ter Theil aus (24) und (45) angewandt auf die Dreiecke ABC und ACD.

3ter Theil aus (25).

Zusatz 1. Der Flächenraum des Parallelogramms (ABCD) ist doppelt so groß als der Innhalt jedes der Dreiecke, in welche es durch jede der Diagonalen getheilt wird.

Anmerkung. Ueber die Flächeninnhalte von Parallelogrammen und Dreiecken werden wir noch näher handeln im 2ten Buche (83 — 84).

Zusatz 2. Ist einer der Winkel ein Rechter, so sind sie es alle; und sind zwei an einander gränzende Seiten gleich, so sind alle vier von gleicher Größe.

57. Erklärung. Raute (oder Rhombus) heißt diejenige vierseitige Figur, in welcher alle Seiten gleich sind.
Eucl. I, Erkl. 32. — L. G. I, Erkl. 17.

Zus. Die Gegenseiten einer Raute sind einander parallel.

58. Erklärung. Rechteck heißt ein Parallelogramm, dessen Winkel Rechte sind. (Fig. 41).
Eucl. I, Erkl. 31. — L. G. I, Erkl. 17.

59. Erklärung. Quadrat heißt ein Viereck, in welchem alle vier Winkel rechte und alle Seiten unter einander gleich sind. Fig. 46.
Eucl. I, Erkl. 30. — L. G. I, Erkl. 17.

Anmerkung 1. Wie man verfahren müsse, um über einer gegebenen geraden Linie ein Quadrat zu construiren, wird in der 5ten Aufgabe des 2ten Buches gelehrt, welche zu lösen man bereits in den Stand gesetzt ist.

Anmerkung 2. Jedes Viereck, wie ADCB Fig. 47, das kein Parallelogramm ist, heißt Trapezium (und Paralleltrapezium, wenn ein Paar der Gegenseiten parallel. Z.).

60. Lehrsatz. In jedem Viereck (ABDC Fig. 40), worinn je zwei Gegenseiten gleich sind, sind dieselben auch parallel.
L. G. I, 3.

Vorbereitung. Man ziehe die Diagonale CB.

Beweis. Aus (50) und (24).

Anmerkung 1. Dieser Satz ist das Umgekehrte von S. 56.

Anmerkung 2. Auf diesem Satze beruht die Construction der Parallel-Lineale, die man nicht selten in den Reißzeugen antrifft.

61. Lehrsatz. In allen Parallelogrammen wird jede Diagonale durch die andere halbirt.
Eucl. I, 30. — L. G. I, 23.

Beweis. Durch Hülfe des S. 46.

Zus. In gleichwinkeligen Parallelogrammen sind die beiden Diagonalen, und folglich auch ihre Hälften von gleicher Größe; in gleichseitigen Parallelogrammen schneiden sich die Diagonalen unter rechten Winkeln.

62. Lehrsatz. Wenn man auf der Diagonale (BC) eines Quadrates (ABLC Fig. 85) von einem ihrer Endpuncte (B) aus ein Stück (BD) abschneidet, gleich der Seite (BA) des Quadrates, in diesem Puncte (D) ein Perpendikel (DE) auf der Diagonale errichtet, und dasselbe bis zum Durchschnit (E) mit der Seite (AC) verlängert, so ist diese Linie (DE) gleich dem Ueberschuß der Diagonale über diese Seite, und eben diese Linie hat das auf der Seite (AC) abgeschnittene Stück (AE).

Vorbereitung. Ziehe DA.

Beweis. Erster Theil. Da EDC $= 1$ R; DCE $= \frac{1}{2}$ R, so ist DEC $= \frac{1}{2}$ R (38) etc.

Zweiter Theil. Da $\triangle$ABD gleichschenkelig und BAD $= \frac{1}{2}$ R, so ist BAD $= \frac{3}{4}$ R (51, Zus. 1), also DAE $= \frac{1}{4}$ R etc.

Anmerkung 1. Hieraus ergiebt sich, wie man verfahren müsse, um die achte Aufgabe des zweiten Buches zu lösen.

Anmerkung 2. Wir werden uns dieses Satzes bedienen, um später zu beweisen,

daß die Seite und Diagonale eines Quadrates zu einander incommensurabel sind. s. 126, Anm. 2.

63. Lehrsatz. Wenn man auf einem der Schenkel (DA Fig. 45) eines beliebigen Winkels (DAE), drei Puncte J, B, F so nimmt, daß JB = BF, und durch dieselben drei unter einander parallele Linien (JN, BC, FL) zieht, so sind auch die zwischen diesen Parallelen enthaltenen Stücke (NC, CL) des andern Schenkels (AE) stets von gleicher Größe. Umgekehrt, wenn zwei Parallelen (FL, BC) die Schenkel eines Winkels schneiden, und man zieht eine dritte (JN), so daß sie auf jedem der Schenkel ein Stück abschneidet, welches gleich ist dem zwischen den beiden Parallelen liegenden (nämlich FB = BJ, und LC = CN), so ist auch diese dritte Linie mit den beiden ersten parallel.

Simpson I, 27.

Vorbereitung. Man nehme an, daß durch C eine Parallele mit AD gezogen sei, welche der FL in O, so wie der verlängerten JN in P begegne.

Beweis. Man zeigt, daß PC = CO (56) und daher NC = CL (46) sei. Der zweite Theil, oder das Umgekehrte des ersten, wird durch Hülfe dieses ersten indirect erwiesen; denn in eine Ungereimtheit würde man verfallen durch die Annahme, daß nicht JN, sondern eine andere wie Jh || BC sein könnte.

Zusatz. Ist eine Seite (AD) eines Dreiecks DAE in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, und man zieht aus diesen Theilpuncten mit einer der beiden andern Seiten (DE) Parallelen nach der dritten (AE), so wird diese in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt.

Anmerkung. Dadurch kann man die 8te und 9te Aufgabe des ersten Buches lösen.

64. Lehrsatz. Wenn man jede der Seiten eines Trapeziums (DCBA Fig. 47) halbirt, so bilden die vier diese Halbirungspuncte verbindenden Geraden (HG, GF, FE, EH) ein Parallelogramm.

Simpson I, 29.

Vorbereitung. Man ziehe die Diagonalen DB, AC.

Beweis. HG und EF sind || AC (63) ꝛc.

Anmerkung 1. Es soll später gezeigt werden, daß der Flächenraum des Parallelogramms die Hälfte von dem des Trapeziums ist.

Zusatz 1. Ist das gegebene Viereck ein Rechteck oder Quadrat, so ist das erhaltene Parallelogramm gleichseitig.

Zusatz 2. Wenn DCBA Fig. 46 ein Quadrat ist, so müssen die Puncte, E, F, G, H nicht nothwendig die Halbirungspuncte seiner Seiten sein, damit EFGH ein Quadrat werde, sondern es ist dazu hinreichend, daß AE = BF = CG = DH d. h. daß beliebige, aber gleiche Stücke auf den Seiten von den Winkelspitzen aus gleichmäßig abgeschnitten werden.

Simpson I, 28.

Anmerkung 2. Dieser Satz soll später auf alle Vielecke ausgedehnt werden. —

Anhang zum ersten Buche.
(vom Uebersetzer.)

Bemerkung. Die unmittelbar hinter den meisten Sätzen dieses und der folgenden Anhänge befindlichen Zahlen, weisen auf die frühern, und daher als bekannt anzusehenden Sätze hin, die man zum Beweise des zugehörigen Satzes zu Hülfe nehmen muß, oder doch wenigstens kann. Gehört der frühere Satz, auf den verwiesen wird, einem der Anhänge selbst an, so soll dieß durch ein neben die Zahl gesetztes A. bemerklich gemacht werden. Sind es mehrere Sätze, deren man zu einem Beweise bedarf, so sollen sie in der Reihenfolge citirt werden, in welcher sie zur Anwendung kommen. —

Lehrsätze.

1. Die aus den Endpuncten der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks auf die Schenkel oder deren Verlängerungen gefällten Perpendikel sind von gleicher Länge.
51. — 46.
Frage 1. Wovon hängt es ab, ob die Perpendikel die Schenkel selbst oder deren Verlängerungen treffen sollen? Giebt es nicht Fälle, wo Schenkel und Perpendikel zusammenfallen?
Frage 2. Wie ändert sich unser Satz, wenn das Dreieck nicht blos gleichschenkelig, sondern gleichseitig ist?

2. Wenn die aus zwei Ecken eines Dreiecks auf die Gegenseiten oder deren Verlängerungen gefällten Perpendikel von gleicher Länge sind, so sind auch die beiden Dreiecksseiten gleich, auf welche die Senkrechte gezogen worden.
49 — 52.
Frage 1. In welcher Beziehung steht dieser Satz zum vorigen?
Frage 2. Wie müßten sich in unserm Satze die Bedingungen ändern, um aus ihnen folgern zu können, daß das in Rede stehende Dreieck gleichseitig sei?

3. Wenn man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von den Winkelspitzen aus beliebige, aber gleiche Stücke gleichmäßig abschneidet, und diese Durchschnittspuncte unter einander verbindet, so ist das so erhaltene Dreieck ebenfalls gleichseitig.
51. — 45.
Frage 1. Kann die Länge der abgeschnittenen Stücke in der That völlig beliebig, namentlich auch größer als die Länge der Seiten des Urdreiecks sein?
Frage 2. Bleibt der Satz noch wahr, wenn man die Abschnitte anstatt auf den Seiten selbst auf ihren Verlängerungen nimmt?
Frage 3. Wird, wenn man mit einem gleichschenkeligen Dreiecke auf ähnliche Weise verfährt, das nun entstandene Dreieck noch stets gleichschenkelig sein?

4. Zwei Winkel sind gleich, wenn die Schenkel des einen einzeln den Schenkeln des andern parallel sind, und beide Paare dieser parallelen Schenkel zugleich entweder nach derselben oder nach entgegengesetzten Richtungen vom Scheitel aus fortgehen.
24.
Frage: Was wird von den Winkeln gelten, wenn das eine Paar der parallelen Schenkel nach derselben Richtung vom Scheitel aus fortläuft, das andere dagegen nach entgegengesetzten?

5. Wenn man einen der Schenkel eines gleichschenkeligen Dreiecks über die Spitze hinaus verlängert und den so entstandenen Außenwinkel halbirt, so ist diese Halbirende der Grundlinie des Dreiecks parallel.

38. — 24.

6. Ist die einen der Außenwinkel eines Dreiecks halbirende Gerade parallel mit einer der Dreiecksseiten, so sind die beiden andern Dreiecksseiten von gleicher Größe.

24 und 25. — 52.

7. Zieht man durch die Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks eine Gerade parallel mit der Grundlinie, so halbirt dieselbe die an der Spitze liegenden Außenwinkel.

24 und 25. — 51.

Frage: In welcher gegenseitigen Beziehung stehen die drei letzten Sätze?

8. Halbirt man sowohl einen der Außenwinkel eines Dreiecks als auch den ihm anliegenden innern, so stehen diese beiden Halbirenden stets senkrecht auf einander.

20.

Frage 1. Gilt der Satz auch für andere als dreiseitige Figuren?

Frage 2. Läßt sich unser Satz umkehren?

9. Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn ein Höhenperpendikel des einen dem des andern gleich ist.

46. — 50.

10. Wenn man auf einem der Schenkel (AN Fig. 1) eines beliebigen Winkels MAN einen beliebigen Punct (C) nimmt, in demselben auf AN eine Senkrechte (CL) errichtet, zugleich auch aus ihm auf den andern Schenkel (AM) ein Perpendikel (CK) fällt, und den Winkel (KCL), welchen diese beiden Linien bilden, durch CB halbirt, so ist Dreieck ABC gleichschenkelig.

38, Z. 3.

Frage: Erleidet unser Satz eine wesentliche Veränderung, je nachdem der gegebene Winkel ein spitzer, rechter oder stumpfer ist?

11. Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn zwei an einander anliegende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln in beiden gleich sind.

12. Wenn man je zwei von den Halbirungspuncten der Seiten eines Dreiecks durch gerade Linien verbindet, so wird durch dieselben das Dreieck in vier unter einander congruente Dreiecke zertheilt.

63.

13. Wenn in einem gleichschenkeligen Dreiecke irgend einer der drei Winkel $\frac{2}{3}$ R. beträgt, so ist das Dreieck gleichseitig.

14. Theilt man jede der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks in drei gleiche Theile und verbindet von diesen Theilpuncten je zwei solche, die einer und derselben Winkelspitze zunächst liegen, so entsteht ein Sechseck, welches regelmäßig ist d. h. in welchem alle Seiten sowohl als alle Winkel unter einander gleich sind.

Frage: Den wievielten Theil vom Innhalt des Dreiecks macht der Flächenraum des Sechsecks aus?

15. Zwei Quadrate sind congruent, wenn eine Diagonale des einen einer Diagonale des andern gleich ist.

16. In jedem schiefwinkeligen Parallelogramm ist die Diagonale, welche die Scheitel der beiden spitzen Winkel verbindet, größer als die andere.

47.

Zusatz. Umkehrung dieses Satzes.

17. Wenn man jede von zwei Seiten eines Dreiecks über ihren gemeinschaftlichen Endpunct hinaus um die Größe der andern verlängert, und die Endpuncte dieser Verlängerungen mit den Endpuncten der dritten Dreiecksseite verbindet, so sind diese beiden verbindenden Geraden stets einander parallel.

22. — 38. — 51. — 26.

Frage 1. Kann es in einzelnen Fällen auch geschehen, daß die Gerade, welche die Endpuncte der Verlängerungen unter sich verbindet, parallel mit der dritten Dreiecksseite ist?

Frage 2. Könnte man nicht unsern Verlängerungen solche Größe geben, daß in jedem Falle nicht blos die im Hauptsatze, sondern auch die in der vorigen Frage genannten Linien einander parallel wären?

18. Zwei gerade Linien, welche von einem Puncte aus nach entgegengesetzten Seiten auslaufen und beide einer dritten Linie parallel sind, bilden eine einzige gerade Linie.

— 24 oder 25. — 20. — 21. Nachdem man zuvor von dem gemeinschaftlichen Puncte der beiden ersten Linien nach der dritten eine beliebige Gerade als Hülfslinie gezogen hat.

19. Wenn man auf jeder von zwei oder mehrern geraden Linien eine Senkrechte errichtet und diese Perpendikel alle unter einander parallel sind, so bilden jene Geraden

entweder (bei hinreichender Verlängerung) eine einzige gerade Linie, oder sie sind auch unter einander parallel.

Frage: Läßt sich dieser Satz umkehren?

20. Errichtet man auf jeder von zwei Dreiecksseiten oder deren Verlängerungen ein Perpendikel, so müssen diese beiden bei hinreichender Verlängerung stets einander schneiden. —

Indirecter Beweis.

21. Die drei auf den Seiten eines Dreiecks in ihren Halbirungspuncten errichteten Perpendikel haben bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Vorbereitung zum Beweise. Man errichte zwei solcher Perpendikel, fälle aus ihrem Durchschnittspuncte (A. 20) auf die dritte Dreiecksseite eine Senkrechte und beweise, daß jene durch diese halbirt wird.

45. — 49.

Frage: Der in Rede stehende gemeinschaftliche Durchschnittspunct unserer drei Perpendikel, kann innerhalb, im Umfange, und außerhalb des Dreiecks liegen. Wovon hängt es ab, ob das eine, oder das andere, oder das dritte Statt haben soll?

Zusatz. Dieser gemeinschaftliche Durchschnittspunct der drei Perpendikel hat gleiche Entfernung von den drei Winkelspitzen des Dreiecks.

22. Die drei Höhenperpendikel jedes Dreiecks d. h. die aus den Winkelspitzen auf die Gegenseiten (oder deren Verlängerungen) eines Dreiecks (ABC Fig. 2) gefällten Perpendikel haben (nöthigenfalls verlängert) einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

A. 21.

23. Wenn man eine von zwei ungleichen Dreiecksseiten über ihren gemeinschaftlichen Endpunct hinaus verlängert und den so entstandenen Außenwinkel halbirt, so ist diese Linie niemals mit der dritten Dreiecksseite parallel, sondern schneidet stets die über die kleinere der beiden ersten hinausgehende Verlängerung derselben.

38. — 42. — 20. — 28.

24. *Wenn man auf den Seiten eines beliebigen Parallelogramms von den Winkelspitzen aus gleichmäßig Stücke von beliebiger aber gleicher Länge abschneidet*, so ist das durch Verbindung dieser Durchschnittspuncte entstandene Viereck gleichfalls ein Parallelogramm.

45. — 60.

Frage: Kann die Länge der abgeschnittenen Stücke auch größer als die eine oder die andere der Seiten des Urparallelogramms werden?

25. Alle auf die im vorigen Satze angegebene Weise entstandenen Parallelogramme haben mit dem Urparallelogramm einen gemeinschaftlichen Diagonalen-Durchschnittspunct. —

61.

26. Wenn man die Halbirungspuncte der Seiten eines beliebigen Rhombus unter einander verbindet, so ist das so entstandene Parallelogramm stets rechtwinkelig.

27. Die drei geraden Linien, welche die Winkel eines beliebigen Dreiecks halbiren, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Vorbereitung zum Beweise. Man halbire zwei von den Dreiecks-Winkeln, verlängere diese Halbirenden bis sie sich schneiden (28), verbinde diesen Durchschnittspunct mit der Spitze des dritten Winkels und zeige durch Hülfe der Senkrechten GH, GJ, GK (Fig. 3), daß derselbe durch diese Linie halbirt wird.

46. — 46. — 49.

Zusatz. Der Punct G ist gleich weit von den drei Seiten des Dreiecks entfernt.

29, 1.

28. Wenn man eine der Seiten eines Dreiecks über beide Endpuncte hinaus verlängert, und nicht nur beide so entstandene Außenwinkel, sondern auch den der verlängerten Seite gegenüberliegenden innern Winkel des Dreiecks halbirt, so haben diese drei Halbirenden bei hinreichender Verlängerung gleichfalls einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Der Beweis dem des vorigen Satzes ganz ähnlich.

Zusatz 1. Auch dieser Durchschnittspunct ist von allen Dreiecksseiten gleich weit entfernt.

Frage: Wie viel lassen sich für jedes Dreieck solcher Puncte finden, von denen jeder gleiche Entfernung von allen drei Seiten hat?

Zusatz 2. Fällt man aus allen Puncten der Art, die es für ein Dreieck giebt, auf alle seine Seiten, oder deren Verlängerungen Perpendikel, und verbindet eben diese Puncte mit seinen Ecken, so entstehen zwölf Paare congruenter Dreiecke.

29. Fällt man aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte (G Fig. 3) der die Winkel eines Dreiecks halbirenden Linien (AD, BE, CF) auf die Dreiecksseite Senkrechte, so ist von den Winkeln, welche dieselben mit den nach derselben Dreiecksseite gezogenen Halbirenden bilden, einer (EGJ) so groß als die beiden andern zusammen (FGK + HGD).

Frage 1. Wie würde man denjenigen der drei genannten Winkel, welcher so groß als die beiden andern zusammen ist, unabhängig von einer Figur mit Worten bezeichnen?

Frage 2. Bleibt unser Satz auch noch richtig für gleichschenkelige und gleichseitige Dreiecke?

Frage 3. Findet vielleicht für die Winkelhalbirungen, von denen im vorigen Satze (28) die Rede war, etwas Aehnliches Statt?

29. Wenn man von einem der Endpuncte (B Fig. 4) der Grundlinie (BC) eines gleichschenkeligen Dreiecks (ABC) nach einem beliebigen Puncte (D) des Gegenschenkels (AC) eine gerade Linie (BD) zieht, auf diesem (verlängerten) Schenkel von diesem Puncte (D) aus nach der Grundlinie hin ein Stück (DE) abschneidet, welches gleich ist der vorhergenannten Linie (BD) und endlich den so erhaltenen Durchschnittspunct (E) mit eben jenem Endpuncte (B) der Grundlinie verbindet, so ist der Winkel (EBC), welchen diese letztere Linie mit der Grundlinie bildet, stets halb so groß als derjenige (ABD), welchen die zuerst gezogene Linie mit dem Schenkel (BA) bildet, der mit ihr von demselben Endpunct der Grundlinie ausläuft.

38. — 51. — 51.

30. Wenn man auf der größern (AE) von zwei ungleichen Dreiecksseiten (AE, AB Fig. 4) von ihrem gemeinschaftlichen Endpuncte (A) aus ein Stück (AC) abschneidet, welches gleich ist der kleinern (AB) und diesen Durchschnittspunct (C) mit der Spitze des Gegenwinkels (B) verbindet, so ist der Winkel (EBC), welchen diese Linie mit der dritten Dreiecksseite (BE) bildet, gleich dem halben Unterschiede der beiden Dreiecks-Winkel (ABE und AEB), welche unsern in Rede stehenden Seiten gegenüber liegen, also ½ [ABE — AEB].

31. Wenn man sowohl von den beiden Endpuncten als auch von dem Halbirungspuncte einer beliebigen geraden Linie nach einer beliebigen andern drei Linien zieht, die unter einander parallel, so ist die mittlere derselben halb so groß als die beiden äußern zusammen. Fig. 5.

Zusatz. Verbindet man daher die Halbirungspuncte zweier Seiten eines Dreiecks, so ist diese Linie halb so groß als die dritte Seite.

32. Zieht man eine Gerade durch den Halbirungspunct (D Fig. 6) der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks, und verlängert sie so weit, daß sie den einen Schenkel (AC) selbst und des andern Verlängerung schneidet, so ist das außerhalb des Dreiecks liegende Stück (DF) derselben stets größer als das andere (DE).

33. Verbindet man die Ecke eines Dreiecks, von welcher zwei ungleiche Seiten auslaufen, mit dem Halbirungspuncte der Gegenseite, so bilden diese beiden Linien in diesem Puncte stets schiefe Winkel, und zwar ist der stumpfe derjenige, welcher der größern der beiden genannten ungleichen Dreiecksseiten gegenüberliegt.

47, 1 Zus.

34. Umkehrung des vorigen Satzes.

35. Zu dem bekannten Satze: „Die aus der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks auf die Grundlinie gezogene Senkrechte halbirt nicht nur diese letztere, sondern auch den Winkel an der Spitze" lassen sich nicht weniger als neun Umkehrungen bilden.

36. Ein Viereck ist nicht nothwendig ein Parallelogramm, wenn das eine Paar seiner Gegenseiten parallel, und das andere gleich ist.

Frage: Welches ist wohl die einfachste dritte Bedingung, die man den beiden genannten hinzufügen muß, damit diese Nothwendigkeit eintrete?

37. Erklärung. Ein Viereck, in welchem ein Paar Gegenseiten parallel, das andere Paar gleich, und welches dennoch kein Parallelogramm ist, soll Antiparallelogramm heißen.

Anmerkung. Antiparallel heißt eine Linie (DC Fig. 51) einer andern (AB), wenn W. CDE = ABC und W. DCE = BAC.

38. In jedem Antiparallelogramm sind die an jeder der parallelen Seiten liegenden Winkel gleich. (nämlich BAC = DCB und BAD = ADC Fig. 7).

39. In jedem Antiparallelogramm sind die beiden Diagonalen einander gleich.

40. In jedem Antiparallelogramm sind diejenigen Segmente der Diagonalen, die zwischen ihrem gegenseitigen Durchschnittspuncte und den beiden Endpuncten einer der parallelen Seiten liegen, von gleicher Größe.

41. In jedem Antiparallelogramm läuft die Gerade, welche die Halbirungspuncte der beiden nicht parallelen Seiten verbindet, mit den beiden andern Seiten parallel, und ist halb so groß als diese zusammen.

42. Das Stück der im vorigen Satze bezeichneten Linie, welches zwischen den beiden Diagonalen enthalten ist, ist halb so groß als der Ueberschuß der größern von den parallelen Seiten über die kleinere.

A. 31, Zus.

43. Wenn in einem Vierecke sowohl die beiden Diagonalen von gleicher Größe, als auch ein Paar Gegenseiten einander gleich sind, so ist das andere Paar der Gegenseiten parallel.

50. — 50. — 26.

44. Sind in einem Vierecke die Diagonalen gleich und ein Paar der Gegenseiten parallel, so sind die beiden andern Gegenseiten von gleicher Größe. Fig. 7.

49. — 45.

45. Wenn in einem Vierecke sowohl das eine, als das andere Paar nicht gegenüberliegender Winkel einzeln gleich sind, (nämlich ABC = DCB, und BAD = ADC Fig. 7) so ist das Viereck ein Antiparallelogramm.

46. Jedes Viereck ist ein Antiparallelogramm, wenn die beiden Segmentenpaare der Diagonalen die zwischen ihrem gegenseitigen Durchschnittspunct und zwischen den Endpuncten sowohl der einen als der andern von zwei Gegenseiten liegen, einzeln gleich sind (nämlich AG = GD, und BG = CG Fig. 7).

26. — 49. — 45.

47. Jedes Viereck ist ein Parallelogramm, in welchem die Diagonalen sich gegenseitig halbiren.

45. — 26.

48. Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen gleich sind, ist gleichwinkelig, also ein Rechteck.

50. — 25.

49. Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen sich unter Winkeln schneiden, die alle unter einander gleich, d. h. Rechte sind, ist gleichseitig.

50. Gleichseitig ist auch jedes Parallelogramm, in welchem ein Paar Gegenwinkel durch die ihre Spitzen verbindende Diagonale halbirt werden.

Zusatz. Umkehrung dieses Satzes.

51. Wenn man alle Seiten eines Antiparallelogramms halbirt und diese Halbirungspuncte unter einander zu einem Viereck verbindet, so ist dieß stets ein Rhombus.

64. — A. 31, 3.

52. Das auf die im vorigen Satze angegebene Weise entstandene gleichseitige Parallelogramm wird auch gleichwinkelig, also ein Quadrat, wenn das Antiparallelogramm so beschaffen ist, daß die beiden parallelen Seiten um die halbe Summe ihrer eignen Längen von einander entfernt sind. Fig. 8.

A. 48.

53. In zwei an einander angränzenden Seiten unseres Rhombus (A. 51) bilden mit der Seite des Antiparallelogramms, von deren Halbirungspuncte sie auslaufen, zwei Winkel, deren Unterschied eben so groß ist, als der Unterschied der beiden Winkel des Antiparallelogramms, die an eben dieser Seite liegen. — Fig. 8.

24. — A. 50, 3.

54. Erklärung. Zugeordnete Seiten eines Vierecks heißen je zwei solche, die keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben; also jedes Paar der Gegenseiten und die Diagonalen.

55. Werden zwei beliebige Paare zugeordneter Seiten eines Vierecks halbirt, so bilden die diese Halbirungspuncte verbindenden Geraden ein Parallelogramm.

63, Zus. 1. — 55.

Frage 1. Von welchem frühern Satz ist dieser als Erweiterung zu betrachten?

Frage 2. Wie ändert sich unser Satz für Parallelogramme und Antiparallelogramme?

56. Wenn man von den Endpuncten der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks (ABC Fig. 9) auf dem einen Schenkel selbst, und auf des andern Verlängerung zwei Stücke von beliebiger aber gleicher Länge abschneidet, so wird die Gerade, welche diese beiden Durchschnittspuncte verbindet, durch die Grundlinie halbirt.

Zusatz. Dieser Satz läßt sich zweimal umkehren.

57. Zieht man aus der Spitze eines von zwei ungleichen Seiten gebildeten Dreiecks-

winkels eine Gerade nach dem Halbirungspuncte der Gegenseite, so theilt diese den Winkel in zwei ungleiche Stücke und zwar ist der größere dieser beiden Winkel derjenige, welcher die kleinere Dreiecksseite zu einem seiner Schenkel hat. — Fig. 10.

46. — 42.

58. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind congruent, wenn die Hypotenuse und die Cathetensumme des einen einzeln den entsprechenden Stücken des andern gleich sind. Fig. 11.

49. ꝛc.

59. Wenn man auf der Hypotenuse (BC Fig. 12) eines gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecks (ABC) von einem ihrer Endpuncte (C) aus ein Stück (CD) gleich der Schenkellänge abschneidet, diesen Punct mit der Spitze des Gegenwinkels verbindet und zugleich in ihm auf der Hypotenuse eine Senkrechte (DE) errichtet und bis zum Durchschnitt mit dem nähern Schenkel (AB) verlängert, durch diesen Punct (E) eine Parallele mit der Hypotenuse zieht, welche die erstere der gezogenen Linien (DA) in H und den andern Catheten (AC) in F schneidet, endlich aus F eine Senkrechte (FG) auf die Hypotenuse fällt und GH zieht, so entstehen außer dem ursprünglichen noch acht gleichschenkelige Dreiecke.

60. Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck einer der spitzen Winkel doppelt so groß ist als der andere, so ist auch stets die Hypotenuse doppelt so groß als die kleinere Cathete. Fig. 13.

45. — A. 13.

Zusatz. Zweimalige Umkehrung dieses Satzes.

61. Verbindet man in einem rechtwinkeligen Dreieck den Halbirungspunct der Hypotenuse mit der Spitze des Gegenwinkels, so ist diese Linie gleich der halben Hypotenuse. —

Indirecter Beweis. Oder directer mittelst 61, Zus.

Zusatz. Der Satz läßt sich zweimal umkehren.

62. Wenn in einem gleichschenkeligen Dreiecke jeder der Winkel über der Grundlinie doppelt so groß ist, als der dritte, und man halbirt einen der erstern, so wird durch diese Linie das Urdreieck in zwei ebenfalls gleichschenkelige Dreiecke zertheilt. —

Frage: Ob der Satz sich umkehren läßt?

63. Fällt man von einem beliebigen Puncte innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks Perpendikel auf dessen Seiten, so ist die Summe derselben so groß als eines der Höhenperpendikel dieses Dreiecks. Fig. 14.

56, 1. — A. 1. — 56, 1. — 46.

Frage 1. Gilt unser Satz selbst noch, oder ein ihm verwandter, wenn der Punct, von welchem die Perpendikel auf die Seiten (oder deren Verlängerungen) gefällt werden, nicht innerhalb, sondern außerhalb des gleichseitigen Dreiecks liegt?

Frage 2. Findet nicht in besondern Fällen etwas unserm Satze Aehnliches auch bei gleichschenkeligen Dreiecken Statt?

64. Verbindet man die Halbirungspuncte (E und F) zweier Gegenseiten (AB und CD) eines Quadrates (ABCD Fig. 15) durch eine Gerade (EF), zieht darauf nach derselben von einer Winkelspitze (B) eine zweite Gerade (BG) so, daß sie der Seite des Quadrates gleich ist, und endlich aus eben dieser Winkelspitze die Diagonale (BD), so ist der Winkel (GBD), welchen die beiden letzten der drei genannten Linien (BG und BD) mit einander bilden, doppelt so klein als der von den beiden ersten (EF und BG) gebildete, und dreimal so klein als derjenige, welchen die erste und dritte (EF und BD) mit einander machen.

51, Zus. 3.

65. Schneidet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks von den Winkelspitzen aus Stücke von beliebiger, aber gleicher Länge gleichmäßig ab, und verbindet diese Durchschnittspuncte mit den Gegenecken, so ist das durch diese drei Linien gebildete Dreieck ebenfalls gleichseitig.

45. — 46. — 52. Zus.

Frage: Darf man die gleichen Stücke nicht blos auf den Seiten selbst, sondern auch auf ihren Verlängerungen abschneiden?

66. Wenn man auf der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks von jedem ihrer Endpuncte aus ein Stück gleich der anliegenden Cathete abschneidet, und diese Durchschnittspuncte mit der Spitze des rechten Winkels verbindet, so wird derselbe in drei Stücke getheilt, von denen das mittlere so groß ist als die beiden äußern zusammen.

51. — 38. —

Frage: Läßt sich der Satz umkehren?

67. Wenn man auf der größten Seite eines ungleichseitigen Dreiecks von jedem

ihrer Endpuncte aus ein Stück abschneidet gleich der anliegenden kleinern Seite, und diese Durchschnittspuncte mit der Spitze des Gegenwinkels verbindet, so ist der Winkel, den diese beiden Linien mit einander bilden, so groß als die halbe Summe der beiden kleinern Dreieckswinkel.

51. — 38.

Frage 1. In welchem Zusammenhange steht dieser Satz mit dem vorhergehenden?

Frage 2. Läßt sich der Satz umkehren?

68. Jede gerade durch den Durchschnittspunct der Diagonalen eines Parallelogramms hindurchgehende und von den Seiten desselben begränzte Linie wird in jenem Durchschnittspuncte halbirt.

61. — 46.

Anmerkung. Daher pflegt man wohl auch den Diagonalendurchschnittspunct eines Parallelogramms dessen Mittelpunct zu nennen.

69. Wenn man über jeder Seite eines rechtwinkeligen Dreiecks (ABC Fig. 16), abwärts von den beiden andern ein Quadrat beschreibt, und die nicht gemeinschaftlichen Endpuncte (E und F) zweier solchen Quadratseiten, die von demselben Endpuncte (C) der Hypotenuse auslaufen, mit den Spitzen derjenigen Dreiecks-Winkel (A und B) verbindet, welche den Seiten, über denen diese Quadrate beschrieben, gegenüberliegen, so schneiden sich diese beiden Linien (EA und BF) stets unter rechten Winkeln.

45. — 38, Zus. 2.

70. Bleibt Alles wie im vorigen Satze und verbindet man die Endpuncte (J und F) der von den Endpuncten der Hypotenuse auslaufenden Seiten der Cathetenquadrate mit den Spitzen (C und B) der diesen Catheten gegenüberliegenden Dreieckswinkel, so schneiden sich diese Linien in einem Puncte (L), welcher auf dem Perpendikel (AR) liegt, das man aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse fällt.

A. 22 angewandt auf △ BMC (Fig. 16), wo AM = RK.

71. Die drei geraden Linien, welche die Halbirungspuncte von je zwei zugeordneten Seiten (A. 54) eines Vierecks verbinden, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct. Fig. 17.

A. 55. — 61.

72. Wenn man in einem spitzwinkeligen Dreiecke (ABC Fig. 18) sowohl die drei Höhenperpendikel (A. 22) als auch gerade Linien von dem Puncte (M), der gleich weit von den Winkelspitzen entfernt ist (A. 21, Zus.) nach diesen Ecken zieht, so

1) sind je zwei solche Winkel (BAD und CAE oder BAE und CAD), welche zwei von derselben Winkelspitze auslaufende Linien (AD und AE ꝛc.) mit den beiden Seiten (AB und AC) des Dreiecks bilden, von gleicher Größe;

2) der Winkel (DAE), welcher von einem der genannten Linienpaare gebildet wird, ist so groß als die von den beiden andern Paaren gebildeten zusammen genommen (GAF + HCJ).

51. — 38.

Frage 1. Welchem frühern Satze dieses Anhanges kömmt der vorstehende, besonders in seinem zweiten Theile nahe?

Frage 2. Könnte man diese Verwandtschaft nicht zu einer Verallgemeinerung beider Sätze benutzen?

Frage 3. Gilt unser Satz auch noch für recht- und stumpfwinkelige, für gleichschenkelige und gleichseitige Dreiecke?

73. Zwei Dreiecke (ABC und DEF Fig. 19) sind congruent, wenn ihre Umfänge (Summen aller drei Seiten) und alle ihre Winkel einzeln gleich sind. —

38. — 46.

74. Verbindet man in einem Parallelogramm die Halbirungspuncte (E und F Fig. 20) zweier Gegenseiten (AB und CD) mit den Endpuncten einer Diagonale (A und C), so wird durch diese Linien die andere Diagonale (BD) in drei gleiche Theile getheilt.

54. — 63.

75. Wenn man eine der Seiten (BC) eines Quadrates (ABCD Fig. 21) um ihre eigne Größe verlängert, über der ganzen so entstandenen Linie (BE) ein gleichseitiges Dreieck (BHE) beschreibt, und von einer Ecke (C) des Quadrates aus, auf den von ihr auslaufenden Seiten Stücke (CH und CG) abschneidet gleich dem Ueberschuß der Höhe des gleichseitigen Dreiecks über die Quadratseite, so ist das Dreieck (AGH), welches durch

Verbindung dieser beiden Puncte unter einander und mit der Gegenecke des Quadrates entsteht, gleichseitig. —

A. 35. — 46. — 51. — 38. — A. 13.

76. Fällt man in einem gleichschenkeligen Dreiecke aus einem der Endpuncte der Grundlinie ein Perpendikel auf den Gegenschenkel, so ist der Winkel, welchen dasselbe mit der Grundlinie bildet, halb so groß als der Winkel an der Spitze.

77. Wenn man entweder alle innere oder alle äußere Winkel eines Rechtecks halbirt, so bilden die vier Halbirenden, bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, ein Quadrat.

78. Schneidet man auf den Seiten eines Quadrates (ABCD Fig. 22) von den Winkelspitzen aus Stücke (AH, BE, CF, DG) von beliebiger aber gleicher Länge gleichmäßig ab, und verbindet diese Durchschnittspuncte sämmtlich entweder mit den nähern, oder den entferntern Gegenecken des Quadrates, so ist das von diesen Verbindenden (AC, BF, CG, DH) gebildete Viereck (JKLM) gleichfalls ein Quadrat.

45. — 46. — 38, Zus. 2.

Frage: Ist die Größe der abgeschnittenen Stücke ohne alle Einschränkung beliebig, darf sie namentlich die Länge der Seiten des Urquadrates übersteigen?

79. Wenn in einem Antiparallelogramm (ABCD Fig. 23) eine der parallelen Seiten (BC) gleich ist jeder der beiden Diagonalen (A. 39) und man errichtet auf einer der nicht parallelen Seiten (AB) in dem an der genannten von den parallelen Seiten anliegenden Endpuncte (B) ein Perpendikel, so ist der Winkel, welchen diese Senkrechte mit der parallelen Seite bildet (EBC), halb so groß als der Winkel, welchen eben diese Seite (BC) mit der Diagonale in dem erwähnten Endpuncte bildet (DBC).

80. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind congruent, wenn eine Cathete und die Summe der beiden andern Seiten in ihnen einzeln gleich sind. Fig. 24. —

45. — 46.

81. Zwei spitzwinkelige Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern, und ein der erstern anliegender Winkel des einen Dreiecks den entsprechenden Stücken des andern einzeln gleich sind. Fig. 25. —

46. — A. 80.

82. Zwei Quadrate sind congruent, wenn die Summe der Seiten und Diagonale in dem einen eben so groß ist als in dem andern. Fig. 26. —

46. —

83. Zwei Quadrate sind congruent, wenn der Ueberschuß der Diagonale über die Seite in dem einen eben so groß ist als in dem andern. Fig. 26. —

46.

84. Zwei gleichschenkelige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe des Schenkels und der Grundlinie, so wie der Winkel an der Spitze in beiden einzeln gleich sind. Fig. 27. —

46. —

85. Zwei gleichschenkelige Dreiecke sind congruent, wenn der Unterschied zwischen Schenkel und Grundlinie, so wie der Winkel an der Spitze einzeln gleich sind. Fig. 27. —

46. —

86. Zwei gleichschenkelige Dreiecke sind congruent, wenn die beiden Höhenperpendikel d. h. das Perpendikel aus der Spitze auf die Grundlinie und eines der Perpendikel aus dem Endpuncte der Grundlinie auf den Gegenschenkel oder dessen Verlängerung (A. 1) in dem einen Dreieck den entsprechenden Senkrechten des andern einzeln gleich sind. Fig. 28. —

50. — 46.

87. Zwei gleichschenkelige Dreiecke sind congruent, wenn die Summe des Schenkels und des aus der Spitze auf die Grundlinie gefällten Perpendikels, so wie der Winkel an der Spitze in ihnen einzeln gleich sind. — Fig. 28.

A. 84. —

88. Zwei gleichschenkelige Dreiecke sind congruent (ABC und DEF Fig. 29), wenn die Summe der Grundlinie und ihres Höhenperpendikels in dem einen Dreieck eben so groß als die Summe dieser Stücke des andern, und außerdem die Winkel an der Spitze in beiden gleich sind.

Indirecter Beweis.

89. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und die auf die beiden andern gefällten Höhenperpendikel in ihnen einzeln gleich sind.

46.

90. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und das Höhenperpendikel der dritten in ihnen einzeln gleich sind, und die beiden Seiten in beiden Dreiecken zugleich entweder auf verschiedenen oder auf derselben Seite des genannten Höhenperpendikels liegen.

49.

91. Zwei gleichschenkelige Dreiecke sind congruent, wenn ihre Umfänge (Summen aller drei Seiten) und die aus den Spitzen auf die Grundlinien gefällten Höhenperpendikel in ihnen einzeln gleich sind. Fig. 30. —

49. — 46.

92. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern und der von den letztern eingeschlossene Winkel in ihnen einzeln gleich sind. Fig. 31. —

49.

93. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden andern und der von den letztern eingeschlossene Winkel in ihnen einzeln gleich sind. Fig. 32. —

49.

94. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden andern und der kleinere der beiden Gegenwinkel dieser letztern einzeln in ihnen gleich sind. Fig. 32. —

45. — 46.

95. Halbirt man alle Winkel eines Dreiecks und fällt aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der halbirenden Senkrechte auf die Seiten, so werden letztere in solche Stücke getheilt, daß

1) je zwei von derselben Ecke des Dreiecks auslaufende von gleicher Länge sind und
2) jedes derselben halb so groß ist als der Ueberschuß der Summe der beiden Seiten, von denen sie Stücke sind, über die dritte Seite.

96. Zwei Dreiecke sind congruent, *wenn eine Seite*, der Unterschied der beiden andern und der *größere ihrer Gegenwinkel einzeln in ihnen gleich* sind. Fig. 33.

Vorbereitung zum Beweise. Man halbire in beiden Dreiecken die beiden an der einen und andern der gleichen Seiten liegenden Winkel und fälle aus den Durchschnittspuncten der halbirenden Senkrechte auf eben diese gleichen Seiten. —

X. 95. — 46. — 45. — 46.

97. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden andern und der Unterschied der Gegenwinkel dieser letztern einzeln in ihnen gleich sind. — Fig. 32.

X. 31. — 49. —

98. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern, und der Unterschied der Gegenwinkel der letztern einzeln in ihnen gleich sind. Fig. 34.

51. — 51. — X. 31. — 49.

99. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern, und das zu der größern oder kleinern dieser letztern in beiden Dreiecken gehörige Höhenperpendikel einzeln gleich sind. —

49. — Und entweder X. 81, oder X. 96 je nachdem das Höhenperpendikel innerhalb oder außerhalb des Dreiecks fällt.

*100. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden andern, und das zur größern oder kleinern dieser letztern in beiden Dreiecken gehörige Höhenperpendikel einzeln gleich sind. —

49. — X. 94 oder X. 96.

101. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn der Umfang, ein Winkel, und das zu einer von den diesen Winkel einschließenden Seiten gehörige Höhenperpendikel des einen Dreiecks einzeln den entsprechenden Stücken des andern Dreiecks gleich sind. — Fig. 30.

Frage: Macht es einen wesentlichen Unterschied, ob die Höhenperpendikel innerhalb oder außerhalb ihrer Dreiecke liegen?

102. Zwei Paralleltrapezia sind congruent, wenn die vier Seiten des einen einzeln denen des andern gleich sind.

103. Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die beiden zwischen denselben liegenden Winkel einzeln in ihnen gleich sind.

104. Zwei Vierecke sind congruent, wenn alle Seiten und der dem größern Paare gegenüberliegende Winkel einzeln in beiden gleich sind.

Anmerkung 1. Man könnte auch den Satz so aussprechen: Zwei Vierecke sind congruent, wenn alle Seiten und ein Paar gleichgelegener Winkel einzeln gleich, und die diesen gleichen Winkeln gegenüberliegenden zugleich kleiner oder größer als zwei Rechte sind.

Anmerkung 2. Wird stillschweigend oder ausdrücklich vorausgesetzt, daß alle Winkel der in Rede stehenden Vierecke ausspringende sein sollen, so reicht die Gleichheit aller Seiten und eines beliebigen — natürlich in beiden Figuren gleichgelegenen — Winkels zur unbedingten Congruenz der Vierecke hin.

Anmerkung 3. Man vergleiche mit unserm Satze den frühern Satz 49 im ersten Buche.

105. Zwei Vierecke sind congruent, wenn diejenigen Segmente eines Paares zugeordneter Seiten, welche zwischen ihren eignen Durchschnittspuncten und den mit den beiden andern zugeordneten Seitenpaaren liegen, in derselben Reihenfolge genommen einzeln gleich und außerdem die Winkel gleich sind, welche von je zwei gleichen Segmentenpaaren gebildet werden.

Anmerkung. Man muß beim Beweise zwei Fälle unterscheiden, je nachdem das Paar zugeordneter Seiten, welches in Betracht kommt, die beiden Diagonalen, oder zwei Gegenseiten sind.

106. Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die beiden nicht eingeschlossenen Winkel in ihnen einzeln gleich sind, und außerdem die Summe dieser beiden Winkel größer ist als die Summe der beiden andern.

Anmerkung. Ist die Summe der beiden nicht eingeschlossenen Winkel kleiner als die Summe der beiden andern, so findet die Congruenz der Vierecke zwar oft, aber nicht immer und unbedingt Statt; und es mag dem schon geübteren Schüler überlassen bleiben, das Nähere darüber selbst zu erforschen.

107. Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten, einer von den eingeschlossenen Winkeln und sein Gegenwinkel in dem einen den entsprechenden Stücken des andern einzeln gleich sind.

108. Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten, einer der eingeschlossenen Winkel und der mit diesem an derselben Seite liegende nicht eingeschlossene des einen Vierecks einzeln den entsprechenden Stücken des andern gleich, und außerdem die beiden Gegenwinkel des erstern Paares zugleich kleiner oder größer als ein Rechter sind.

109. Zwei Vierecke sind congruent, wenn zwei Seiten und alle Winkel einzeln gleich sind.

110. Zwei Rauten sind congruent, wenn ihre Umfänge und ihre Diagonalsummen einzeln gleich sind.

111. Jedes Parallelogramm wird durch jede gerade Linie, welche man durch seinen Mittelpunct (A. 68, Anm.) zieht und bis zum Durchschnitt mit den Seiten beiderseits verlängert, in zwei congruente Hälften getheilt.

112. Erklärung. Hat man ein Paar beliebiger congruenter Figuren und nimmt innerhalb oder außerhalb derselben zwei Puncte so, daß der eine derselben von jeder Seite sowohl als Ecke der einen Figur eben so weit entfernt ist als der andere Punct von der entsprechenden Seite oder Ecke der andern Figur, so sollen diese Puncte den Namen von Congruenzpuncten in Beziehung auf diese geradlinigen Figuren führen.

113. Wenn zwei Puncte eine solche Lage gegen zwei congruente Dreiecke haben, daß die Entfernungen des einen von den Ecken des einen Dreiecks einzeln gleich sind den Entfernungen des andern Punctes von den entsprechenden Ecken des andern Dreiecks, so sind diese Puncte Congruenzpuncte für diese Dreiecke, d. h. sie sind auch von jedem Paare entsprechender Seiten gleich weit entfernt.

114. Umkehrung des vorigen Satzes.

Für congruente Dreiecke sind Congruenzpuncte

115. Die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der Perpendikel, die man auf den Seiten in ihren Halbirungspuncten errichtet;

116. Die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der Höhenperpendikel;

117. Die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte sowohl der Linien, welche die innern Winkel halbiren, als auch derjenigen, welche zwei äußere und einen innern — die in beiden Dreiecken einander entsprechen — halbiren.

118. Hat man zwei Paare von Congruenzpuncten, die auf zwei Seiten oder deren Verlängerungen der zugehörigen Dreiecke liegen und verbindet dieselben mit den Gegenecken, so sind die Durchschnittspuncte dieser Geraden gleichfalls Congruenzpuncte.

119. Hat man zwei Paare von Congruenzpuncten und verbindet die zu jedem Dreiecke gehörigen, so sind je zwei entsprechende Durchschnittspuncte dieser Geraden mit den Dreiecksseiten oder deren Verlängerungen ebenfalls Congruenzpuncte.

120. Die Durchschnittspuncte gerader Linien, welche Congruenzpuncte verbinden, sind gleichfalls Congruenzpuncte.

121. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Cathetensumme um die doppelte Länge des Perpendikels, welches man aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der die innern Winkel halbirenden Linien auf eine der Seiten fällt, größer als die Hypotenuse.

122. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke aus den vier Puncten, von denen jeder gleichweit von allen drei Seiten entfernt ist (A. 28 und 29) auf die Seiten Perpendikel, und zwar aus dem innern dieser Puncte ein Perpendikel auf eine beliebige Seite, von jedem der drei äußern aber auf diejenige Seite, welche von dieser Senkrechten selbst (nicht ihrer Verlängerung) getroffen wird, so ist stets

1) jede Cathete um die Länge des innern Perpendikels größer als das auf sie gefällte äußere;
2) die Hypotenuse dagegen, um die Länge eben dieses innern Perpendikels kürzer als das auf sie gefällte äußere Perpendikel und daher
3) dieses äußere Hypotenusenperpendikel eben so groß, als die beiden äußern Cathetenperpendikel und das innere Perpendikel zusammen genommen.

Aufgaben.

123. Ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn dessen Hypotenuse gegeben ist.

124. Ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe der Hypotenuse und des zu ihr gehörigen Höhenperpendikels gegeben ist.

125. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, in welchem der eine der spitzen Winkel doppelt so groß als der andere ist, wenn gegeben ist

a) die Hypotenuse, oder
b) die größere Cathete, oder
c) die kleinere.

126. Ein Dreieck zu construiren, in welchem die Winkel dieselbe Beschaffenheit haben wie bei der vorhergehenden Aufgabe, und dessen Umfang eine vorgeschriebene Größe hat.

127. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei seiner Seiten gegeben sind, und in welchem die dritte Seite um eben so viel kleiner als die größere der beiden gegebenen Seiten ist als sie selbst die kleinere übertrifft.

Frage: Darf jede der beiden gegebenen Seiten eine völlig beliebige Länge haben?

128. Eine gerade Linie so zu ziehen, daß sie mit einer gegebenen Geraden parallel und das zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels enthaltene Stück derselben eine vorgeschriebene Länge hat.

129. Wenn ein Winkel und ein beliebiger Punct gegeben ist, durch letztern eine Gerade so zu ziehen, daß die Stücke, welche durch sie von den Schenkeln (vom Scheitel aus gerechnet) abgeschnitten werden, von gleicher Größe sind.

130. Wenn zwei Puncte und eine gerade Linie gegeben sind, auf letzterer den Punct zu finden, welcher gleich weit von den beiden gegebenen entfernt ist.

Frage: Ist die Auflösung dieser Aufgabe unter allen Umständen möglich?

131. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und ein Höhenperpendikel gegeben sind.

Anmerkung. Es sind vier Fälle zu unterscheiden.

132. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn sein Umfang und einer seiner Winkel gegeben sind.

133. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn sein Umfang und das Höhenperpendikel aus der Spitze auf die Grundlinie gegeben sind.

134. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn eines der Höhenperpendikel, die sich aus den Endpuncten der Grundlinie auf die Gegenschenkel fällen lassen, und einer seiner Winkel gegeben sind.

135. Ein Quadrat zu construiren, wenn die Summe seiner Seite und Diagonale gegeben ist.

136. Einen Rhombus zu construiren, wenn seine beiden Diagonalen gegeben sind.

137. Ein Parallelogramm zu construiren, wenn die beiden Diagonalen und eine Seite gegeben sind.

138. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn eines seiner Höhenperpendikel gegeben ist.

139. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten und das zur dritten gehörige Höhenperpendikel gegeben sind.

Frage: Ist nicht vielleicht mehr als ein Dreieck für diese Bedingungen möglich?

140. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und die Summe der Catheten gegeben sind.

141. Ein solches Dreieck zu beschreiben, wenn die Hypotenuse und der Unterschied der Catheten gegeben sind.

142. Ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn sein Umfang (BC Fig. 12) gegeben sind.

Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind:

143. Die Cathetensumme und einer der spitzen Winkel;

144. Der Cathetenunterschied und einer der spitzen Winkel;

145. Die Hypotenuse und der Unterschied der beiden spitzen Winkel;

146. Die Cathetensumme und der Unterschied der spitzen Winkel;

147. Der Unterschied sowohl der Catheten, als ihrer Gegenwinkel;

148. Der Umfang und einer der spitzen Winkel;

149. Der Umfang und der Unterschied der beiden spitzen Winkel.

150. Einen Rhombus zu construiren, wenn eine Seite und die Summe der beiden Diagonalen gegeben sind.

151. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, in welchem jeder Winkel unter der Grundlinie anderthalbmal so groß ist als der Winkel an der Spitze.

152. Durch einen von drei gegebenen Puncten eine Gerade so zu ziehen, daß die Perpendikel, die auf sie aus den beiden andern gefällt werden, gleiche Stücke auf ihr (vom erstern Puncte aus gerechnet) abschneiden.

153. Durch einen innerhalb eines Winkels gegebenen Punct eine Gerade so zu ziehen, daß das zwischen den Schenkeln enthaltene Stück derselben in dem genannten Puncte halbirt wird.

154. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn seine beiden Höhenperpendikel gegeben sind. Fig. 28.

155. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn der Ueberschuß der Cathetensumme über die Hypotenuse und einer der spitzen Winkel gegeben sind.

156. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe einer Cathete und des zur Hypotenuse gehörigen Höhenperpendikels nebst einem der spitzen Winkel gegeben ist.

157. Ein solches Dreieck zu beschreiben, wenn der Ueberschuß einer Cathete über das zur Hypotenuse gehörige Höhenperpendikel nebst einem der spitzen Winkel gegeben ist.

158. Ein Dreieck zu construiren, wenn ein Höhenperpendikel, der Unterschied der von ihm auf der zugehörigen Seite gebildeten Segmente und der größere von den an dieser Seite liegenden Winkeln gegeben sind.

Frage: Welchen Unterschied würde es machen, wenn anstatt des größern der beiden anliegenden Winkel der kleinere gegeben wäre?

159. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe der Grundlinie und des Schenkels nebst einem seiner Winkel gegeben ist.

160. Einen Rhombus zu construiren, wenn die Summe der Seite und einer Diagonale nebst einem der Winkel gegeben ist.

161. Einen Rhombus zu construiren, wenn die Summe seiner Diagonalen nebst einem der Winkel gegeben ist.

162. Ein Dreieck zu construiren, wenn ein Höhenperpendikel und sowohl Summe als Unterschied der beiden Segmente der zu ihm gehörigen Seite gegeben sind, welche zwischen dem Fußpuncte des Perpendikels und den Endpuncten der Seite enthalten sind.

Frage 1: Ist nicht vielleicht mehr als ein Dreieck für diese Bedingungen möglich?

Frage 2: Welcher Unterschied wäre dadurch in unserer Aufgabe herbeigeführt worden, wenn es anstatt „Summe der Segmente" geheißen hätte: „Seite des Dreiecks, auf welche das Perpendikel gefällt wird"?

163. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe seiner beiden Höhenperpendikel nebst einem seiner Winkel gegeben ist.

164. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn die Summe der Seite und des Höhenperpendikels gegeben ist.

165. Ein solches Dreieck zu beschreiben, wenn der Ueberschuß der Seite über das Höhenperpendikel gegeben ist.

166. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe eines Schenkels und des zu ihm gehörigen Höhenperpendikels nebst einem der Winkel gegeben ist.

167. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern, und der von letztern eingeschlossene Winkel gegeben sind.

168. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden andern und der von letztern eingeschlossene Winkel gegeben sind.

169. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern, und einer der Gegenwinkel dieser letztern gegeben sind.

Frage: Macht es keinen Unterschied, ob der größere oder kleinere dieser Gegenwinkel gegeben ist.

170. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden andern, und der kleinere von den Gegenwinkeln dieser letztern gegeben sind.

171. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden andern und der größere von den Gegenwinkeln dieser letztern gegeben sind.

172. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, die Summe der beiden andern, und der Unterschied der Gegenwinkel dieser letztern gegeben sind.

173. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, der Unterschied der beiden andern, und der Unterschied ihrer Gegenwinkel gegeben sind.

174. In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes ebenfalls gleichseitiges zu beschreiben, dessen Seiten einzeln senkrecht auf den Seiten des erstern stehen.

Zweites Buch.

Von dem Inhalte geradliniger Figuren.

Einleitung.

65. **Erklärung.** Der Raum, der zwischen den eine ebene Figur bildenden geraden Linien begriffen ist, heißt der **Innhalt** oder **Flächenraum** der Figur.

L. G. III, Erkl. 7.

66. **Erklärung.** Figuren, welche gleichen Inhalt oder Flächenraum haben, werden **gleichflächig** genannt.

Anmerkung 1. Es ist fast allgemein üblich, anstatt „gleichflächig" das einfache „gleich" zu gebrauchen, so wie man sich zur Bezeichnung der Gleichflächigkeit des einfachen Gleichheitszeichens (=) bedient.

Anmerkung 2. Nicht selten gebraucht man die Namen: Dreieck, Viereck rc. anstatt Flächenraum des Dreiecks, Flächenraum des Vierecks rc. wie z. B. wenn man sagt: dieses Dreieck, oder Viereck ist doppelt, oder halb so groß als dieses oder jenes; und in ähnlichen Fällen.

67. **Erklärung.** Wenn man in einer geradlinigen Figur eine der Seiten zur **Grundlinie** oder **Basis** nimmt, so heißt das Perpendikel, welches aus der Spitze auf sie gefällt wird, die **Höhe** der Figur. Im Dreieck CAD (Fig. 22) ist AB die Höhe, wenn CD als Grundlinie, und CH die Höhe, wenn AD als Grundlinie betrachtet wird.

Eucl. VI, Erkl. 4. — L. G. III, Erkl. 5.

Anmerkung. Der Grund, warum ein solches Perpendikel den Namen Höhe führt, ist in 29, Zus. 1 zu suchen.

Zus. Wenn eine Figur so beschaffen ist, daß über der Grundlinie (CD) keine Spitze, sondern eine ihr parallele Seite (AB Fig. 40) sich befindet, so wird die Höhe der Figur bestimmt durch die Senkrechte (AE), welche zwischen der Grundlinie und der ihr parallelen Seite gezogen wird.

L. G. III, Erkl. 4 und 6.

68. **Erklärung.** Parallelogramme (MBCL, MDEL, JDEH Fig. 50) heißen zwischen denselben Parallelen stehend, wenn sie eine derselben (GN) oder beliebige Theile (ML, JH) von ihr zu Grundlinien und die andere (AF) oder Theile (BC, DE) von ihr zu den den Grundlinien gegenüberstehenden Seiten haben.

Von Dreiecken (ADJ, AEJ, HKL Fig. 51) sagt man, daß sie zwischen denselben Parallelen stehen, wenn eine dieser Parallelen (AL) oder beliebige Theile derselben (AJ, HL) ihnen zu Grundlinien dienen, und die Spitzen (D, E, K) aller auf der andern Parallele liegen.

Anmerkung. Dieselbe Erklärung, wie für Parallelogramme, findet für alle diejenigen geradlinigen Figuren Statt, in denen ein Paar paralleler Seiten vorhanden, und eine davon die Grundlinie ist; und eben so verhält es sich mit dem, was über Dreiecke gesagt worden ist.

Zus. Figuren, welche zwischen denselben Parallelen stehen, haben gleiche Höhe, und umgekehrt, haben sie gleiche Höhe, so können sie immer zwischen dieselben Parallelen gestellt werden.

31.

69. **Erklärung. Ein Rechteck heißt das Rechteck zweier Linien, wenn von zwei an einander gränzenden Seiten desselben die eine gleich der einen und die andere gleich der andern dieser Linien ist.**
Eucl. II, Erkl. 1.

Anmerkung 1. Sind die beiden Linien des Rechtecks (AC, CD Fig. 41) bestimmt, so ist das ganze Rechteck vollkommen bestimmt. Da die Winkel alle Rechte sind (58), so haben sie eine bestimmte, für alle gleiche, Größe (19); ferner läßt sich in demselben Puncte (C oder D) nur ein einziges Perpendikel errichten (29, Zus. 2), so daß sich aus zwei gegebenen Linien nur ein einziges Rechteck construiren läßt. Hieraus folgt:

Zus. 1. Alle Rechtecke, aus denselben, oder gleichen Linien construirt, sind in jeder Beziehung gleich d. h. congruent.

Anmerkung 2. Dieser Zusatz wird mit Recht in die Reihe der Grundsätze gestellt, da wir genöthigt sind, Dinge als vollkommen gleich zu betrachten, bei denen auch für kein einziges Paar entsprechender Theile irgend ein Unterschied Statt findet.

Anmerkung 3. Unser Zusatz gilt nicht für Parallelogramme überhaupt, darum weil hier außer der Größe der Seiten auch die Größe der von ihnen gebildeten Winkel in Betracht kommt. Der Innhalt zweier in ihren Seiten gleichen Parallelogramme ist nach der größern oder geringern Schiefe ihrer Winkel verschieden, und zwar wird derselbe desto kleiner, je mehr die Schiefe zunimmt; so ist z. B. in Fig. 43 CABD > CabD > CaβD (wie im Zusatze des folgenden Lehrsatzes gezeigt werden soll), obschon die Seiten CA, Ca, und Cα von gleicher Größe sind.

Anmerkung 4. Sehr häufig bezeichnet man ein Rechteck (ABDC Fig. 41) mit den drei Buchstaben, die einen seiner Winkel bestimmen; indem man z. B. sagt: Rechteck ACD. Der Grund davon liegt darinn, daß bei vielen, namentlich den alten Mathematikern und denen, welche ihrer Methode treu folgen, drei an einer Linie stehende Buchstaben (Fig. 1) das Rechteck aus den durch die Buchstaben angegebenen Linien bezeichnen wie z. B. Rechteck ACB, anstatt zu sagen Rechteck aus AC und CB. Der mittlere von diesen drei Buchstaben ist derjenige, der mit jedem der äußern verbunden werden muß, um die beiden Seiten des Rechtecks zu bezeichnen. Daher auch der Sprachgebrauch der Alten, nach welchem man sagt Rechteck aus zwei Linien, oder begriffen unter zwei Linien, anstatt Flächenraum des aus diesen Linien construirten Rechtecks. So ist Fig. 41 ABCD das Rechteck aus den Linien E und F.

Zus. 2. Das über einer Linie GE befindliche Quadrat ACEG (Fig. 48) d. h. das Quadrat von dieser Linie kann betrachtet werden als ein aus zwei gleichen Linien, wie AG, GE, oder CE, EG, oder EG, EG beschriebenes Rechteck.

Zus. 3. Quadrate von oder auf gleichen Linien sind in jeder Beziehung gleich; oder congruent, und umgekehrt, sind zwei Quadrate gleich, so sind es auch die Linien, über denen sie construirt worden.

70. **Erklärung. Zieht man durch einen Punct (G Fig. 52) auf der Diagonale (CB) eines Parallelogramms (ABDC) Linien (HE, FJ) parallel mit dessen Seiten, so heißen die beiden Parallelogramme (AFGH und DEGJ), durch welche die Diagonale nicht geht, Ergänzungen; die beiden andern (CHGJ und BEGF) heißen Parallelogramme um die Diagonale. Der gesammte Raum (AFGEDCA) aus den beiden Ergänzungen und einem der Parallelogramme um die**

Diagonale gebildet, führt bei den Alten noch den besondern Namen: γνώμων

71. Erklärung. Rechtwinkeliges Trapezium heißt jedes unregelmäßige Viereck (CAFE Fig. 52, b), in welchem zwei Seiten (CA, FE) senkrecht auf der Grundlinie (AF) stehen. —

Erster Abschnitt.

Ueber den Inhalt von Rechtecken und Quadraten, die über gegebenen Linien oder einzelnen Stücken derselben stehen.

---

72. Lehrsatz. Die Summe mehrerer Rechtecke (LJ, QH, PG Fig. 44), welche gleiche Höhe aber verschiedene Grundlinien haben, ist gleich einem einzigen Rechtecke (LG), dessen Höhe ebendieselbe, die Grundlinie aber so groß als die Summe aller gegebenen Grundlinien ist.

Eucl. II, 1.

Vorbereitung zum Beweise. Man stellt die verschiedenen Rechtecke mit ihren gleichen Seiten, welche die gemeinschaftliche Höhe darstellen, neben einander; alsdann machen diese nur ein einziges Rechteck LFGK aus (21 und 32).

Beweis. Leicht.

Zus. 1. Das Quadrat (AE Fig. 48) über der Linie GE ist so groß als die Rechtecke (AF, BE) zusammen genommen, die man aus der Verbindung der ganzen Linie (GE) mit jedem der Stücke (GF, FE) erhält, in die sie getheilt ist.

Eucl. II, 2.

Zus. 2. Wird eine Gerade (GE Fig. 48) in zwei beliebige Stücke (GF, FE) getheilt, so ist das Rechteck (GD) aus der ganzen Linie und einem dieser Stücke (FE) so groß als das Quadrat von eben diesem Stücke und das Rechteck aus beiden Stücken zusammen genommen.

Eucl. II, 3.

Zus. 3. Wenn von zwei Rechtecken (JHPQ und NOHJ Fig. 49), welche dieselbe oder gleichgroße Grundlinien haben, das eine (JHPQ) zur Höhe eine Linie (JQ) hat, die halb so groß ist, als die Höhe (JN) des andern, so ist auch stets der Flächenraum des erstern, die Hälfte von dem Flächenraume des letztern. Dasselbe findet Statt, wenn bei gleichen Höhen, die Grundlinie (JQ) des einen (PQJH) halb so groß ist als die Grundlinie (NJ) des andern (JHON).

Anmerkung. Allgemein ist bei zwei Rechtecken der Flächenraum des einen genau der so vielte Theil von dem Innhalte des andern, der wie vielte Theil, bei gleichen Grundlinien, die Höhe des erstern von der Höhe des andern, oder bei gleichen Höhen, die Grundlinie jenes von der Grundlinie dieses ist.

73. Lehrsatz. Der Unterschied der Flächenräume zweier Rechtecke (KLPH und QPHJ Fig. 44), die zwar verschiedene Grundlinien

(KH, HJ) aber gleiche Höhe haben, ist gleich einem Rechtecke (LQJK) von eben dieser Höhe, dessen Grundlinie (KJ) gleich dem Unterschiede beider gegebener Grundlinien ist.

Vorbereitung zum Beweise. Man legt das kleinere Rechteck QPHJ so innerhalb eines der Winkel KPH vom größeren, daß die Seite JH auf KH und mithin PH auf PH falle.

Beweis. Leicht.

Anmerkung. Dieser und der vorhergehende Satz lassen sich, wie man leicht sieht, in einen einzigen allgemeinern Satz vereinigen, nämlich: die algebraische Summe mehrerer Rechtecke, die verschiedene Grundlinien aber gleiche Höhen haben, ist gleichflächig einem Rechtecke von eben dieser Höhe und einer Grundlinie, die gleich der algebraischen Summe aller gegebenen Grundlinien ist.

74. Lehrsatz. **Wird eine Gerade (GE Fig. 48) in zwei beliebige Stücke (GF, FE) getheilt, so ist das Quadrat (AE) der ganzen Linie so groß als die Summe der Quadrate (AJ und JE) der beiden Stücke und des doppelten Rechtecks (JG und JC) aus diesen Stücken.**

Eucl. II, 4. — L. G. III, 8.

Beweis. Aus 69, 72 und den beiden Zusätzen.

Anmerkung 1. Dieser Lehrsatz ist der geometrische Ausdruck der algebraischen Formel: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, weßhalb auch in der Figur die einzelnen Stücke demgemäß bezeichnet sind. Es wird freilich, wie man nicht übersehen mag, dabei etwas vorausgesetzt, was erst später (203) bewiesen werden kann, daß man nämlich für das Quadrat von einer Linie, und für das Rechteck aus zwei Linien beziehungsweise setzen darf die zweite Potenz einer Zahl und das Product zweier Zahlen *).

Zus. 1. **Theilt man eine Gerade in zwei gleiche Theile, so ist das Quadrat jedes derselben viermal so klein als das Quadrat der ganzen Linie.**

Zus. 2. **Das Quadrat (AJ) von dem einen der Theile (GF) ist so groß als der Unterschied zwischen dem Quadrat der ganzen Linie und zwischen der Summe des Quadrates von dem andern Theile und des doppelten Rechtecks aus beiden Theilen.**

Anmerkung 2. Man kann die Linie GF als den Unterschied von zwei gegebenen Linien GE, FE betrachten, und unsern letzten Zusatz daher auch so ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
(GE - FE)_q &= GF_q - FE_q - 2GF_rFE \\
&= GE_q - FE_q - 2GE_rFE + 2FE_q \\
&= GE_q + FE_q - 2GE_rFE \text{ d. h.}
\end{aligned}
$$

Zus. 3. **Das Quadrat von dem Unterschiede zweier Linien ist gleich dem Ueberschusse der Summe der Quadrate beider Linien über das doppelte Rechteck aus beiden.**

Anmerkung 3. Dieser dritte Zusatz ist die geometrische Uebersetzung der algebraischen Formel: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

L. G. III, 9.

Anmerkung 4. Dieser Lehrsatz (74) kann noch viel allgemeiner auf folgende Weise ausgesprochen werden: Theilt man eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl beliebiger Theile, so ist das Quadrat der ganzen Linie, gleich der Summe der Quadrate aller einzelnen Theile vermehrt um die doppelte Summe aller derjenigen Rechtecke, welche sich aus je zweien dieser Theile construiren lassen. Wäre z. B. die Linie in die Stücke a, b, c, d getheilt, so hätte man:

$$(a + b + c)_q = a_q + b_q + c_q + 2a_rb + 2a_rc + 2b_rc.$$

Anmerkung 5. Unter Berücksichtigung dessen, was wir in der ersten Anmerkung

---

*) Der Einfachheit halber soll künftig das über einer Linie, wie z. B. AB, beschriebene Quadrat, durch ABq und das aus zwei Linien, wie z. B. AB und CD, als bestimmenden Seiten construirte Rechteck durch AB_rCD bezeichnet werden.

Anm. d. U.

erinnert haben und später (203, Z. 2 und Z. 5) erweisen werden, daß man Quadrate durch zweite Potenzen von Zahlen, und Rechtecke durch Produkte aus zwei Zahlen darstellen kann, können wir unsern in der vorigen Anmerkung angeführten Satz, durch die algebraische Formel: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ ausdrücken. f. Fig. 53.

75. **Lehrsatz.** **Wird eine Gerade (AD Fig. 56) in zwei beliebige Stücke (AC, CD) getheilt, so sind das Quadrat der ganzen Linie und das eines der Theile (CD) zusammen so groß als das doppelte Rechteck aus der ganzen Linie und eben diesem Abschnitte (CD) und das Quadrat des andern Abschnitts (AC) zusammen.**

Eucl. II, 7.

Vorbereitung zum Beweise. Beschreibe über AD das Quadrat ADFK; nimm ED = CD, ziehe EL und CJ (verlängert) parallel mit AD und DF; nimm auf der verlängerten DF, FG = CD = JF und vollende das Quadrat FGHJ.

Erster Beweis. Aus der Betrachtung, daß ALED = MHGE.

Anmerkung. Man kann diesen und die fünf folgenden Sätze sehr leicht durch Hülfe der Formeln erweisen, deren in der 1ten und 5ten Anmerkung zum vorigen Satze Erwähnung geschah. Da man die Hülfe einer Figur dabei ganz entbehren kann, so wollen wir diese Beweise *Beweise ohne Figur* nennen.

Zweiter Beweis. Es sei $(a+b)$ die ganze Linie, a und b ihre Stücke; so ist

$$\begin{aligned}(a+b)^2+b^2 &= a^2+2ab+b^2+b^2\\ &= a^2+2ab+2b^2\\ &= 2\,(a+b)\,b+a^2.\end{aligned}$$

76. **Lehrsatz.** **Wird eine Gerade (AB Fig. 58) in einem (C) von zwei Puncten (C und D) in zwei gleiche Theile (AC, CB) und in dem andern (D) in zwei ungleiche Stücke (AD, DB) getheilt, so sind das Rechteck aus den beiden ungleichen Stücken und das Quadrat des zwischen den beiden Theilpuncten liegenden Stückes (CD) zusammengenommen, so groß als das Quadrat von jeder der Hälften (AC oder CB).**

Eucl. II, 5.

Vorbereitung. Beschreibe über AC ihr Quadrat AFHC; nimm AE = AD; vollende das Rechteck AEJB, und ziehe DG parallel mit AF, so ist: BDLJ das Rechteck aus den ungleichen Stücken und GHKL das Quadrat von CD.

Erster Beweis. Aus der Betrachtung der Figur, wo BCKJ = AFGD.

Zweiter Beweis. Ohne Figur. Die ganze Linie sei $a+b$; also jede ihrer Hälften $\frac{a+b}{2}$; und das zwischen den Theilpuncten enthaltene Stück $\frac{a+b}{2} - b$. Nun ist

$$\begin{aligned}ab+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2 &= ab+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\,\frac{a+b}{2}.b+b^2\\ &= ab+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab - b^2 + b^2\\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\end{aligned}$$

77. **Lehrsatz.** **Theilt man eine gerade Linie (AB Fig. 59) in zwei gleiche Theile (AC, CB) und verlängert sie beliebig (bis D), so ist das Rechteck aus der ganzen so verlängerten Linie (AD) und aus der Verlängerung (BD) mit dem Quadrate von der Hälfte (BC) der gegebenen Linie (AB) zusammengenommen so groß als das Quadrat der Linie (CD), die aus der Hälfte und der Verlängerung besteht.**
Eucl. II, 6.

Vorbereitung zum Beweise. Beschreibe über CD das Quadrat CDHG, nimm DL = DB; vollende das Rechteck ADLJ; ziehe aus B BF || DG, so ist ADLJ das Rechteck aus AD und BD, so wie KEFH das Quadrat von BC.

Erster Beweis. Aus Betrachtung der Figur, wo Rechteck CKJA = Rechteck LGFE.

Zweiter Beweis. Ohne Figur. Die gegebene Linie sei a, ihre Verlängerung b, so ist

$$(a+b)\,b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=ab+b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\cdot\frac{a}{2}\,b+b^2$$
$$=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$$

Anmerkung 1. Man sieht leicht, daß dieser und der vorige Satz (76) eigentlich nur einen einzigen Satz ausmachen, indem sie sich blos darin unterscheiden, daß während AD in jenem der Unterschied von AB und DB war, so ist es in diesem die Summe eben dieser Linien.

Anmerkung 2. In unserm Satze ist $CD_q = CB_q + BD_r AD$
und mithin $BC_q = CD_q - BD_r AD$
während im vorhergehenden Satze war $BD_q = CD_q + BD_r AD$
Es ist also das Quadrat der halben Linie einmal dem Unterschiede, und das andere mal der Summe von einem Quadrate und einem Rechtecke gleich. In der Algebra würde man sagen: da die BD in dem einen Satze auf der entgegengesetzten des Punctes D als in dem andern liegt, so ist die eine in Beziehung auf die andere negativ und daher auch das ganze Rechteck aus AB, BD in dem einen Satze von entgegengesetzter Beziehung als in dem andern.

78. **Lehrsatz.** **Theilt man eine Gerade AD (Fig. 57) in zwei beliebige Stücke (AC, CD) und verlängert sie um die Länge eines derselben (DB = DC), so ist das Quadrat der ganzen so entstandenen Linie (AB) so groß als das vierfache Rechteck aus der ursprünglich gegebenen Linie (AD) und dem der Verlängerung gleichen Stücke (DC) zusammengenommen mit dem Quadrate des andern Stückes (AC).**
Eucl. II, 8.

Vorbereitung. Beschreibe über AB das Quadrat ABGK, nimm EF = EB = DB = DC, ziehe EO und FL || AB, und DH, CJ || BG.

Erster Beweis. Es ist KJML = AC_q; ferner LMPO = OPCA = JHNM = HGFN; thut man jedem derselben eins der vier Quadrate DBEQ ꝛc. hinzu, so erhält man vier gleiche Rechtecke, jedes gleichflächig mit ADQO ꝛc.

Zweiter Beweis. Ohne Figur. Es sei a + b die gegebene Linie, ihre Verlängerung b, so ist

$$(a+b+b)^2 = (a+2b)^2 = a^2+4ab+4b^2 = 4\,(a+b)\,b+a^2$$

79. **Lehrsatz.** **Wenn man eine gerade Linie (AB Fig. 60) in einem (C) von zwei Puncten halbirt, und in dem andern (D) in zwei ungleiche Stücke theilt, so ist die Summe der Quadrate der beiden ungleichen Stücke (AD, DB) doppelt so groß als die Summe der Qua-**

drate von der halben Linie und von dem zwischen beiden Theilpuncten enthaltenen Stücke (CD).

Eucl. II, 9.

Vorbereitung. Errichte auf AB in D die Senkrechte DJ = AB, vollende das Rechteck ADJL; nimm DG = AC = CB; und DF = DB; ziehe durch G und F die Geraden GM und FN || AB; vollende das Quadrat DFEB, mache endlich KH = DB, und ziehe HQ || AB.

Erster Beweis. Es ist NFJL = AD_q, FEBD = DB_q, MPKL = ACPM = AC_q, HQPG = OFGP = CD_q, und BEFD = BEOC — CDFE = ACON — HQJK ꝛc.

Zweiter Beweis. Ohne Figur. Die in Rede stehende Linie sei $a+b$, so ist ihre Hälfte $\frac{a+b}{2}$, und das zwischen den beiden Theilpuncten enthaltene Stück $\frac{a+b}{2}-b$ oder $\frac{a-b}{2}$, also

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
$$=\frac{a^2+2\,ab+b^2}{4}+\frac{a^2-2\,ab+b^2}{4}$$
$$=\frac{2\,a^2+2\,b^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}$$

und daraus

$$a^2+b^2=2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right]$$

80. Lehrsatz. Theilt man eine gerade Linie (AB Fig. 61) in zwei gleiche Theile, und verlängert sie um ein beliebiges Stück (BD), so ist das Quadrat von der ganzen verlängerten Linie (AD) und das von der Verlängerung (DB) zusammengenommen doppelt so groß als die Summe der Quadrate von der Hälfte (CB) und von der Linie (CD), die aus der Hälfte und der Verlängerung gebildet wird.

Eucl. II, 10.

Vorbereitung. Construire über AD das Quadrat ADJL; nimm Db = DB, ferner DF = BD; FG = BC = AC, ziehe durch F und G Parallelen mit AD, und eben so durch B und C Parallelen mit AL, und vollende endlich das Quadrat DFeb.

Erster Beweis. Es ist LKPM = MPON = AC_q, PGDC = CD_q, und KGJP, NACO und FebD sind zusammen auch so groß als CD_q ꝛc.

Zweiter Beweis. Ohne Figur. Die gegebene Linie sei a; ihre Hälfte also $\frac{a}{2}$; die Verlängerung b, dann ist

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+b\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+ab+b^2$$
$$=\frac{a^2+2\,ab+2\,b^2}{2}=\frac{(a+b)^2+b^2}{2},\ \text{also}$$

$$(a+b)^2+b^2=2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+b\right)^2\right]$$

Anmerkung. Man sieht sowohl aus dem Beweise, als aus der Figur, daß dieser Satz mit dem vorigen wiederum nur einen einzigen Satz ausmacht, indem allein hier $AD > AB$ ist, während dort $AD < AB$ war.

81. **Lehrsatz.** **Der Unterschied zweier Quadrate (GCAH und KJBC Fig. 62), die über zwei ungleichen Linien (GC, KC) beschrieben sind, ist so groß als das Rechteck aus der Summe (GC + KC) und dem Unterschiede (GC — KC) dieser Linien.**

L. G. III, 10.

Vorbereitung. Bringe das kleinere Quadrat KJBC so in das größere, daß zwei ihrer Ecken zusammenfallen; verlängere HG, AC so, daß $GF = CD = CK$ wird. Ziehe FD ꝛc.

Beweis. Aus 74, 72, und 69, Zus. 1.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist der geometrische Ausdruck der Formel: $a^2 - b^2 = (a + b) . (a - b)$.

Zus. 1. **Das Quadrat (AFHC Fig. 58) über der Hälfte (AC) einer Linie (AB) construirt, ist größer als das Rechteck (LB) aus zwei beliebigen ungleichen Stücken (AD, DB), deren Summe gleich derselben Linie (AB) ist; es ist demnach das größte Rechteck unter allen, die sich überhaupt aus zwei Stücken construiren lassen, in die man eine Gerade zerlegen kann.**

Beweis. Es ist $BD_r BJ = CD_r CK + BC_r BJ = CD_r CK + AD_r AF < AC_q$.

Anmerkung 1. Dieser Zusatz hätte auch, und fast noch einfacher aus 76 gefolgert werden können. J.

Zus. 2. **Die Summe der Quadrate von zwei ungleichen Stücken (AD, DB Fig. 58) einer Geraden ist größer, als die Summe der Quadrate ihrer beiden Hälften (AC, CB).**

Beweis. Nach (74) ist

$$DB_q + AD_q + 2\,AD_r DB = AB_q$$
$$= 4\,AC_q,$$

aber nach dem vorigen Zusatze ist,

$$2\,AD_r DB < 2\,AC_q, \text{ mithin}$$
$$DB_q + AD_q > 2\,AC_q.$$

Anmerkung 2. So wie also das Quadrat über der Hälfte einer Linie ein Maximum für alle Rechtecke ist, die sich aus zwei Stücken der Linie construiren lassen, so ist das doppelte Quadrat eben dieser Hälfte ein Minimum für die Summe der Quadrate von diesen Stücken.

Zweiter Abschnitt.

Von dem Flächenraume der Dreiecke und Parallelogramme.

---

82. **Lehrsatz.** **Parallelogramme (MBCL und MDEL Fig. 50), welche auf derselben Grundlinie (ML) und zwischen denselben Parallelen (AF, GN) stehen, und mithin (68, Zus.) gleiche Höhe haben, sind gleichflächig.**

Eucl. I, 35. — L. G. III, 1.

Beweis. Da △ MBD = △ LCE (45, Zus.), so braucht man

nur △ CDK von beiden abzuziehen, und darauf △ MKL zu addiren, um die Richtigkeit unseres Satzes einleuchtend zu machen.

Zus. 1. Ein Parallelogramm (MC) ist gleichflächig, mit dem Rechtecke, OPLM, das auf derselben Grundlinie (ML) steht, und dessen andere Seite der Höhe (MO, oder PL) des Parallelogramms gleich ist. Die Rechtecke sind daher das eigentliche Maaß für die Parallelogramme.

L. G. III, 1, Zus.

Anmerkung 1. Durch Hülfe dieses Satzes wird der erste Theil der zwölften Aufgabe im zweiten Buche gelöst.

Zus. 2. Jedes Parallelogramm (MOPL, MBCL, MDEL) ist das Doppelte von einem Dreieck (MRL), mit welchem es auf derselben Grundlinie (ML) und zwischen denselben Parallelen steht.

Eucl. I, 41. — L. G. III, 2, Zus. 1.

Beweis. Aus 56, Zus. 1 und unserm Hauptsatze, nachdem MA || RL gezogen worden.

Anmerkung 2. Vergleicht man diesen Zusatz mit dem ersten Zusatze des frühern Satzes (56), so sieht man, daß das was dort von Dreiecken erwiesen wurde, welche mit den Parallelogrammen einen gemeinschaftlichen Winkel haben, hier auf Dreiecke ausgedehnt wird, deren Winkel ganz beliebig von denen der Parallelogramme verschieden sein können.

83. Lehrsatz. Parallelogramme (MBCL und JDEH Fig. 50), welche auf gleichen Grundlinien (ML, JH) und zwischen denselben Parallelen (GN und AF) stehen, also gleiche Höhe haben (68, Zus.), sind gleichflächig.

Eucl. I, 36.

Vorbereitung. Ziehe MD, LE.

Beweis. Aus 54 und 82.

Zus. 1. Von zwei Parallelogrammen, die auf derselben, oder auf gleichen Grundlinien stehen, ist dasjenige das größere, welches die größere Höhe hat; eben so ist bei gleichen Höhen aber verschiedenen Grundlinien, dasjenige das größere, welches auf der größern Grundlinie steht.

Zus. 2. Wenn die Höhe eines Parallelogrammes ein aliquoter Theil von der Höhe eines andern ist, während ihre Grundlinien gleich sind, oder wenn bei gleichen Höhen die Grundlinie des einen ein aliquoter Theil von der des andern ist, so ist das erste Parallelogramm derselbe aliquote Theil von dem zweiten, welcher die Höhe von der Höhe, oder die Grundlinie von der Grundlinie ist. (82, Zus. 1 und 72, Zus. 3)

84. Lehrsatz. Dreiecke (ADJ, AEJ, HKL Fig. 51), die auf derselben Grundlinie (AJ), oder auf gleichen Grundlinien (AJ, HL) und zwischen denselben Parallelen (BK und AL) stehen und mithin gleiche Höhe haben (68, Zus.) sind gleichflächig.

Eucl. I, 37. — L. G. III, 2, Zus.

Vorbereitung. Vollende die Parallelogramme BJ, CJ, GL.

Beweis. Aus 82, und 56, Zus. 1.

Anmerkung 1. Leicht ist es, durch indirecten Beweis das Umgekehrte unseres Satzes darzuthun, nämlich: zwei gleichflächige Dreiecke, welche auf derselben oder auf gleichen Grundlinien stehen, lassen sich stets zwischen dieselben Parallelen legen. Fig. 51.

Eucl. I, 39, 40.

Zus. 1. Der Flächenraum eines Dreiecks ist die Hälfte von dem eines Rechtecks, wenn beide gleiche Grundlinien und Höhen haben

(82, Zus. 1 und 2), so daß die Rechtecke das natürliche Maaß für den Inhalt eben so der Dreiecke, wie der Parallelogramme sind.

Anmerkung 2. Ausführlicher wird über diesen Gegenstand im vierten Buche gehandelt werden. s. 203, Z. 1, 3, 5.

Anmerkung 3. Man kann nun aus dem zweiten Buche der Aufgaben folgende lösen: 12 (zweiter Theil), 21, und 29.

Zus. 2. Von zwei Dreiecken, die gleiche Höhe haben, ist dasjenige das größere, welches die größere Grundlinie hat, und eben so ist bei Gleichheit der Grundlinien das Dreieck das größere, welches die größere Höhe hat.

Zus. 3. Wenn die Höhe eines von zwei Dreiecken, welche gleiche Grundlinien haben, ein aliquoter Theil von der Höhe des andern, oder wenn, bei gleichen Höhen, die Grundlinie des einen ein aliquoter Theil von der des andern ist, so bildet das erstere Dreieck selbst denselben aliquoten Theil von dem zweiten, welchen die Höhe von der Höhe oder seine Grundlinie von der Grundlinie des zweiten ausmacht. (Zus. 1, und 72, Zus. 3)

Anmerkung 4. Man kann nun die 13te Aufgabe des zweiten Buches lösen.

85. Lehrsatz. In jedem Parallelogramm (ABCD Fig. 52) sind die Ergänzungen (70) AFGH und GEDJ gleichflächig.

Eucl. I, 43.

Beweis. Aus 45, Zus., angewandt auf die drei Dreieckspaare, CAB, BCD — GFB, BGE — CHG, CGJ.

Anmerkung. *Auf diesem Satze beruht die Auflösung aller Aufgaben, wo man ein Parallelogramm oder Dreieck auf einer gegebenen Grundlinie construiren soll, so daß sein Flächenraum dem einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist; und man kann daher nun aus dem zweiten Buche folgende Aufgaben lösen:* 14, 15, 16, 23, und 24.

86. Lehrsatz. Der Flächenraum eines Paralleltrapeziums d. h. eines solchen unregelmäßigen Vierecks (ECAB Fig. 55a), in welchem zwei Gegenseiten (AC, EB) parallel laufen, ist gleich der Hälfte des Rechtecks aus der Summe der beiden parallelen Seiten und ihrer Entfernung von einander d. h. dem Perpendikel (CD), das man von einem beliebigen Puncte der einen dieser Parallelen auf die andere fällt.

Vorbereitung. Ziehe die Senkrechten CD, AF, die gleich sind.

Beweis. $ECAB = ECD + CDFA + FAB$

$= \frac{1}{2} ED_r DC + DF_r DC + \frac{1}{2} FB_r FA$ (82, Z. 2)

$= \frac{1}{2} CD_r (CA + EB)$. (72)

Anmerkung 1. Dieser Satz wird von Pappus in seinen Lehnsätzen zu Apollonius Kegelschnitten (I, 8) als bekannt vorausgesetzt.

Anmerkung 2. Wäre das Paralleltrapez rechtwinkelig, so würde AF mit AB zusammenfallen, also AB = CD sein, woraus sich ergiebt folgender

Zus. Der Flächenraum eines rechtwinkeligen Paralleltrapeziums (CEFA Fig. 55b) ist gleich dem eines Rechtecks, dessen eine Seite gleich der an den rechten Winkeln anliegenden Seite des Vierecks, die andere gleich der halben Summe seiner beiden parallelen Seiten ist.

Anmerkung. Im vierten Buche (203, Zus. 8) soll dieser Satz noch auf eine andere Weise ausgedrückt werden.

87. Lehrsatz. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke (BCA Fig. 63) ist das Quadrat der Hypotenuse (AB) so groß als die beiden Quadrate der Catheten (BC, AC) zusammen genommen.

Eucl. I, 47. — L. G. III, 11.

Vorbereitung. Man ziehe die Gerade CLK || AD oder BE, mithin senkrecht auf AB, und außerdem noch, AF, CE, BJ, CD.

Beweis. Durch Hülfe des frühern Satzes (45) beweist man, daß △ BAJ ≅ △ CAD und △ ABF ≅ △ CBE; und daher, wegen 84, Zus. 1, $AD_r DK = AC_q$ und $BE_r EK = BC_q$ rc.

Anmerkung 1. Dieser Satz heißt der pythagoräische Lehrsatz und ist unter diesem Namen allgemein bekannt. Einen sehr einfachen Beweis desselben kann man durch Hülfe der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke führen; wir werden ihn in dem vierten Buche (209, Anm. 3) mittheilen *).

Anmerkung 2. Unser Satz ist nur ein besonderer Fall eines allgemeinern alle Dreiecke, wie auch ihre Winkel beschaffen sein mögen, betreffenden Lehrsatzes, der zuerst von Pappus in seinen mathematischen Sammlungen (IV, 1) aufgestellt und später von Castillon sehr erweitert wurde. Man sehe des letztern schöne Abhandlung in den Mem. de l'Acad. de Berlin 1766 p. 351. Wir werden diesen Satz etwas später (90) folgen lassen.

Anmerkung 3. Unser Lehrsatz giebt ein schon von Pythagoras gefundenes und von Vitruvius (Archit. IX, 2) vorgetragenes Mittel an die Hand, die Richtigkeit eines Winkelhakens zu prüfen. Man trage durch Hülfe eines beliebigen aber genauen Maßstabes von der Spitze des rechten Winkels aus auf der Kante des einen Arms drei Längen auf, und auf der des andern eben solcher Längen vier. Die beiden so erhaltenen Endpuncte auf den beiden Armen müssen, soll der Winkelhaken richtig sein, genau um fünf der genannten Längen von einander entfernt sein. — In dem fünften Buche werden wir noch ein anderes Mittel zu dieser Prüfung angeben.

Anmerkung 4. Man kann nun die Aufgaben: 25, 27, und 28 des zweiten Buches auflösen.

Zus. 1. Fällt man aus der Spitze (C) des rechten Winkels ein Perpendikel (CL) auf die Hypotenuse, so ist das Quadrat einer Cathete (CA) gleich dem Rechtecke aus der ganzen Hypotenuse und demjenigen von den beiden durch das Perpendikel gebildeten Segmenten derselben, welches an der Cathete anliegt (AL).

Eucl. X, 1ter Lehnsatz zu S. 34.

Anmerkung 5. Dieser Satz ist offenbar schon in dem Beweise des Hauptsatzes enthalten, und wird hier nur noch besonders hervorgehoben. Er kann auch aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke, oder aus dem Ptolemäischen Lehrsatz hergeleitet werden; siehe 209, Zus. 2, und 275, Anm. 4.

Zus. 2. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat jeder Cathete gleich dem Ueberschuß des Hypotenusenquadrates über das Quadrat der andern Cathete, und demnach (81) gleich dem Rechtecke aus der Summe der Hypotenuse und der andern Cathete und aus dem Unterschiede eben dieser beiden Linien.

L. G. III, 11 Zus. 1.

Zus. 3. Das Rechteck aus der ganzen Hypotenuse und einem ihrer Abschnitte (AL) ist gleich dem Rechtecke aus der Summe und dem Unterschiede der Hypotenuse und der an dem genannten Abschnitte (AL) nicht anliegenden Cathete (CB).

Zus. 4. Wenn zwei rechtwinkelige Dreiecke (ABC, ABD Fig. 22 und 23) dieselbe Höhe haben, so sind:

1) die Summen der Quadrate von der Hypotenuse des einen und von der Grundlinie des andern Dreiecks von gleicher Größe; also $AD_q + BC_q = AC_q + BD_q$;

2) der Unterschied der Quadrate der Hypotenuse und der Grundli-

---

*) Außer diesen beiden giebt es wenigstens noch ein Paar Dutzend sogenannter verschiedener Beweise für unsern Lehrsatz, von denen freilich oft mehrere nur in sehr unbedeutenden Nebenumständen von einander abweichen. Man sehe die in der Einleitung angeführten beiden Schriften von Hoffmann und Müller.

Anmerk. des Uebers.

nie in dem einen Dreieck ist gleich dem Unterschiede der Quadrate der entsprechenden Seiten des andern Dreiecks; also $AD_q - BD_q = AC_q - BC_q$.

Anmerkung 6. Der zweite Theil unseres Zusatzes könnte auch so ausgedrückt werden:

Zus. 5. In jedem Dreiecke (ACD) ist der Unterschied der Quadrate zweier Seiten (DA, CA) gleich dem Unterschiede der Quadrate von den beiden Abschnitten (DB, BC) der dritten (nöthigenfalls verlängerten) Seite, welche durch das aus der Spitze ihres Gegenwinkels auf sie gefällte Perpendikel bestimmt werden.

Anmerkung 7. Dieser letzte Satz findet sich schon bei Pappus (VII, 120). Da er blos den Fall betrachtet, wo (Fig. 23) das Perpendikel innerhalb des Dreiecks fällt, so fügt er, nachdem er die Seite CD in F halbirt hat, noch hinzu: „Der Unterschied der Quadrate der Seiten (AC, AD) ist doppelt so groß als das Rechteck aus der dritten Seite (CD) und demjenigen Stücke (BF) von ihr, welches zwischen dem Fußpuncte des Perpendikels und dem Halbirungspuncte enthalten ist." Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich leicht nachweisen.

Zus. 6. In einem gleichschenkeligen und rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse doppelt so groß als das Quadrat jeder Cathete.

L. G. III, 11 Zus. 2.

Anmerkung 8. Die Diagonale eines Quadrates ist eine solche Hypotenuse in Beziehung auf die Quadratseite als Cathete.

88. Lehrsatz. Wenn in einem Dreiecke (DEH Fig. 64) die Quadrate zweier Seiten zusammen so groß sind als das Quadrat der dritten Seite, so ist der Gegenwinkel der letztern ein Rechter.

Eucl. I, 48.

Vorbereitung. Man errichte auf EH in H die Senkrechte HJ, mache sie gleich DH und ziehe EJ.

Beweis. Aus 87 und 50.

Anmerkung. Man kann den Beweis auch indirect führen.

89. Lehrsatz. Fällt man in einem rechtwinkeligen Dreiecke (ACB Fig. 65) aus der Spitze des rechten Winkels ein Perpendikel (CL) auf die Hypotenuse, so ist das Quadrat desselben gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten (AL, LB), in welche die Hypotenuse durch das Perpendikel getheilt wird, und umgekehrt: wenn in einem Dreiecke das Quadrat eines Höhenperpendikels gleich ist dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten, in welche die zugehörige Seite durch dasselbe getheilt wird, so ist der Winkel, von dessen Spitze das Perpendikel ausläuft, ein Rechter.

Eucl. X, Lehns. zu S. 34.

Beweis. Aus 87, Zus. 2; 87, Zus. 1 und 73.

Beweis für die Umkehrung. Entweder indirect durch Hülfe des ersten Theiles vom Satze, oder indirect aus S. 87, angewandt auf die Dreiecke BCL und ACL, und damit verbunden S. 74 und S. 88.

Anmerkung 1. Man kann diesen Satz auch durch Hülfe von Eigenschaften sowohl ähnlicher Dreiecke, als des Kreises beweisen, wie dieß in dem vierten Buche (209, 3. f) und im fünften (252) geschehen soll.

Anmerkung 2. Unser Satz ist der erste Hülfssatz des Pappus zum fünften Buche des Apollonius; er fügt noch hinzu: „ist das Quadrat des Perpendikels kleiner als das Rechteck aus den Abschnitten der Seite, so ist der Winkel ein stumpfer, im entgegengesetzten Falle aber ein spitzer" was sich durch Hülfe des S. 44 leicht darthun läßt.

Zus. Die gerade Linie (CH), welche man aus der Spitze des rechten Winkels nach dem Halbirungspuncte der Hypotenuse zieht, ist

gleich der halben Hypotenuse; und umgekehrt ist die Gerade, welche man aus dem Halbirungspuncte einer Seite nach der Spitze des Gegenwinkels zieht, der Hälfte dieser Seite gleich, so ist jener Winkel ein Rechter.

Beweis. $CH_q - HL_q = CL_q$ (87, Z. 2) $= BL_r LA$ (89)
$= (BH - LH)_r (BH + LH)$
$= BH_q - LH_q$ (81)

also $CH_q = BH_q$, und mithin
$CH = BH$.

Beweis für die Umkehrung. Ziehe CL senkrecht auf AB, so ist
$CL_q = CH_q - HL_q = AH_q - LH_q = AL_r LB$ (76)
also Winkel BCA ein Rechter.

Anmerkung 3. Man kann nun die 16te und 20te Aufgabe des zweiten Buches auflösen.

90. Lehrsatz. **In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer Seite (AB Fig. 66) größer oder kleiner als die Summe der Quadrate der beiden andern (AC, BC), je nach dem der von ihnen eingeschlossene Winkel ein stumpfer oder spitzer ist, und zwar größer oder kleiner um das doppelte Rechteck aus einer der beiden letztern Seiten (AC) und dem Stücke (CD) von ihr oder ihrer Verlängerung, welches zwischen der Spitze des genannten Winkels und dem Fußpuncte ihres Höhenperpendikels (BD) enthalten ist.**

Eucl. II, 12, 13. — L. G. III, 12, 13.

Beweis. Im Dreiecke ADB nimmt man für AB_q seinen Werth nach (87), darauf im Dreiecke DCB den Werth für BD_q nach 87, Zus. 2, und endlich den Werth für den Unterschied der Quadrate von AD und DC nach 74, Zus. 2, oder nach 75.

Anmerkung 1. Wäre der Winkel BCA ein Rechter, so fiele das Perpendikel BD mit der Seite BC zusammen, und man käme dann auf S. 87 zurück; indem nämlich alsdann der Abschnitt CD Null würde, so würde auch der ganze Flächenraum, um welchen das Quadrat von AB größer oder kleiner als die Summe der Quadrate von AC und BC ist, gleich Null.

Anmerkung 2. Für den ersten Theil unseres Lehrsatzes fällt das Perpendikel BD außerhalb, für den zweiten Theil dagegen innerhalb des Dreiecks, wie aus (40) folgt. Man sieht daher, daß dieser zweite Theil auch für recht- und stumpfwinkelige Dreiecke gilt, wenn man das Perpendikel aus der Spitze des rechten oder stumpfen Winkels auf seine Gegenseite fällt.

Anmerkung 3. Der S. 87, oder der pythagoräische Lehrsatz ist eigentlich nur ein besonderer Fall unseres 90ten Satzes, und dieser letztere kann nicht bewiesen werden ohne Hülfe des erstern, so daß man auch hier wiederum die Wahrheit der von den Logikern aufgestellten Behauptung bestätigt findet: sehr oft könne die Allgemeinheit eines Satzes nicht bewiesen werden, bevor man nicht seine Richtigkeit für einen besondern Fall nachgewiesen habe. Wir werden in dem Folgenden noch mehrere Belege für die Richtigkeit dieser Behauptung finden und sie bemerklich machen. Inzwischen ist unser in Rede stehender, so wie der pythagoräische Lehrsatz nur ein besonderer Fall von dem Lehrsatze des Pappus, den wir nachher in einer allgemeinen Anmerkung mittheilen wollen.

Anmerkung 4. Der Satz, daß in allen Dreiecken (Fig. 66) $AB_q = AC_q + BC_q \pm 2\, AC_r CD$, ist einer der wichtigsten der ganzen Geometrie, wie man sich in der Folge überzeugen wird. Man kann aus ihm verschiedene Folgerungen nach der verschiedenen Beschaffenheit des Dreiecks CAB herleiten. Wäre z. B. Dreieck ABC (Fig. 67) gleichschenkelig, so daß $AB = AC$, so hätte man:

$$BC_q = AB_q + AC_q - 2\, AB_r AD$$
$$= 2\, AB_q - 2\, AB_r AD$$
$$= 2\, AB_r\, (AB - AD), \text{ also}$$
$$\tfrac{1}{2}\, BC_q = AB_r BD, \text{ also}$$

Zus. Wenn man in einem gleichschenkeligen Dreieck aus einem der Endpuncte der Grundlinie ein Perpendikel auf den Gegenschenkel fällt, so ist die Hälfte des Quadrates der Grundlinie so groß als das Rechteck aus dem ganzen Schenkel und dem Abschnitte desselben, der zwischen dem Perpendikel und der Grundlinie enthalten ist.

Pappus V, 24, Theor. 1.

Allgemeine Anmerkung über die Sätze 87 und 90.

Es ist schon bemerkt worden, daß diese beiden Sätze nur besondere Fälle sind von einem schönen Satze, den zuerst Pappus vorgetragen, und später Castillon erweitert hat. Letzterer hat auch, was Pappus nicht gethan, nachgewiesen, wie unsere beiden Sätze aus dem allgemeinern hergeleitet werden können. Der Satz des Pappus, obschon einfach, und bereits von Clavius zu Euclides I, 47, Nro. 7 mitgetheilt, ist wenig bekannt, weshalb wir ihn hier mittheilen wollen.

91. Lehrsatz des Pappus. Wenn man über zwei beliebigen Seiten (AB, BC Fig. 69) eines beliebigen Dreiecks (ABC) zwei beliebige Parallelogramme (ABDE, BCGF) beschreibt, die beiden Seiten (ED, GF) in ihnen, welche den genannten Dreiecksseiten gegenüberliegen, bis zum Durchschnitt (H) verlängert, diesen Punct mit dem gemeinschaftlichen Endpuncte (B) eben dieser Dreiecksseiten verbindet, und diese Gerade bis zum Durchschnitt (J) mit der dritten Dreiecksseite (AC) verlängert, wo beide einen bestimmten Winkel (HJC) bilden werden, so ist, *wenn HJ innerhalb des Dreiecks fällt*, das Parallelogramm (ACKL), welches man über der dritten Dreiecksseite (AC) unter dem genannten Winkel (HJC) so beschreibt, daß seine Ecken auf den Seiten der beiden erstern liegen, so groß als diese beiden andern Parallelogramme zusammengenommen.

Vorbereitung. Ziehe AK und CL || HJ, und verbinde K mit L.

Beweis. AK = BH = CL (56, 1), also AKLC ein Parallelogramm (54), und zwar das in unserm Satze bezeichnete. Ferner:

AKMJ = AKHB = ABDE (82), und eben so

CLMJ = CLHB = CBFG (82) ꝛc.

Anmerkung 1. Fällt die Linie HJ nicht innerhalb, sondern (Fig. 70) außerhalb des Dreiecks ABC, so ist AKLC = CGFB — AEDB — ein Fall, mit welchem Castillon den Lehrsatz des Pappus bereichert hat.

Zus. 1. W. KAC (Fig. 69) = KAB + BAC = BAC + ABJ.

Anmerkung 2. Fällt die Linie HJ außerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 70), so ist W. KAC = BAC — BAK
= BAC — ABJ.

Zus. 2. Anwendung unseres Satzes auf den Pythagoreischen Lehrsatz.

Es sei △ ABC (Fig. 71) rechtwinkelig in B; man beschreibe nicht über zwei beliebigen Seiten, sondern über den beiden Catheten, AB und BC, nicht beliebige Parallelogramme, sondern Quadrate AEDB und CGFB; verlängere ED und GF bis zum Durchschnitt in H; dann ist DHFB ein Rechteck und HB dessen Diagonale.

Verlängere HB bis J, ziehe AK und CL || HJ, und verbinde K mit L. Alsdann ist HL = BC = FG (56, 1), mithin auch GL = FH = BD = BA, also △ ABC ≌ △ CGL (45), also LC = CA und W. BCA + LCB = LCG + LCB = 1 R., mithin ACLK ein Quadrat,

und folglich, nach dem Satze des Pappus (91): $AC_q = AB_q + BC_q$ d. h. der Pythagoräische Lehrsatz ist ein besonderer Fall des mehrerwähnten Lehrsatzes von Pappus.

Zus. 3. Anwendung auf Satz 90.

Ist das Dreieck ABC in B stumpfwinkelig (Fig. 71) oder spitzwinkelig (Fig. 72), so beschreibe man über AC das Quadrat AKLC; ziehe durch B die Senkrechte BJH auf AC, nehme BH = AK = CL = AC, und ziehe die Geraden HKE und HLG, welche offenbar den Seiten AB und BC einzeln parallel sein müssen (54). In A, B und C errichte man die Senkrechten AE und BD auf AB, BF und CG auf BC, um die Rechtecke AEDB und BCGF zu erhalten. Alsdann ist nach dem Satze des Pappus:

I. AC_q oder AKLC = ABDE + BCGF.

Fällt man jetzt aus den Puncten A und C auf die, nöthigenfalls verlängerten, Seiten CB und AB die Perpendikel ATX und CSU, so ist △ EAK ≌ △ ASC (46), also ASUE ein Quadrat, und, aus ähnlichem Grunde, eben so CGXT. Man nehme nun AO = AB, und CR = CB, ziehe ON ∥ AB, und RP ∥ CB, so sind ABNO und BCRP die Quadrate über AB und BC; und zugleich ist (85) EOND = BSVN und RGFP = BTZP. Das Rechteck EOND aber ist der Unterschied zwischen dem Rechtecke AEDB und dem Quadrate AONB, und etwas Aehnliches gilt vom Rechtecke RGPF. Ist nun (Fig. 72) W. ABC stumpf, so sind die Quadrate der Seiten AB und BC kleiner als die über eben diesen Seiten stehenden Rechtecke, und zwar ist der Unterschied für beide zusammen EOND + RGFP = BSVN + BTZP; ist dagegen (Fig. 73) W. ABC spitz, so sind die Quadrate größer als die Rechtecke, und zwar ist der Ueberschuß für beide zusammen EOND + RGFP = BSVN + BTZP. Das erstere dieser Rechtecke hat zu seinen Seiten BN oder AB, und das Stück zwischen dem W. B und dem auf AB gefällten Perpendikel; das andere hat zu seinen Seiten CR oder CB, und das Stück zwischen W. B und der auf CB gezogenen Senkrechten, woraus also folgt

II. $AC_q = AB_q + BC_q \pm [AB_r BS + BC_r BT]$

So weit kann man durch Hülfe der bisher erwiesenen Sätze gelangen. Allein um darzuthun, daß die beiden im vorstehenden Satze erscheinenden Rechtecke unter einander gleich sind, muß man noch folgende drei Sätze zu Hülfe nehmen:

1. Die Winkel des △ ABT sind einzeln den Winkeln des △ BSC — was leicht nachgewiesen werden kann.
2. Die Linien AB, BT, BC, BS sind proportionirt — ein Satz, der aus dem erstern folgt, aber erst im vierten Buche erwiesen werden wird und zwar aus Gründen, die mit keinem der frühern Sätze etwas gemein haben; — und daher ist
3. das Rechteck aus AB, BS, gleich dem Rechtecke aus BT, BC.

Dieß als richtig angenommen, verwandelt sich unser Satz II, in

III. $AC_q = AB_q + BC_q \pm 2\ AB_r BS$ d. h. in unsern frühern Satz (90).

Anmerkung 3. Aus dem Bisherigen kann man ersehen:

1) Wie man den 90ten Satz ohne Hülfe des Pythagoräers (87) erweisen kann;

2) daß man sowohl den 87ten als 90ten Satz als besondere Fälle des 91ten d. h. des Lehrsatzes von Pappus ansehen kann;
3) daß der Euclidische Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes merklich einfacher ist, als die Art, wie wir diesen Satz aus dem des Pappus hergeleitet haben;
4) daß man unsern 90ten Satz aus dem des Pappus nicht herleiten kann, ohne etwas hier Fremdartiges, nämlich Eigenschaften ähnlicher Dreiecke zu Hülfe zu nehmen, was beim Euclidischen Beweise nicht nöthig ist, woraus sich endlich
5) ergiebt, daß, wiewohl es sehr nützlich ist, besondere Sätze, so viel als möglich auf allgemeinere zu bringen, und jene aus diesen herzuleiten, um so das Band, welches alle verbindet, genau kennen zu lernen — doch diese Herleitungen nicht selten zusammengesetztere Beweise erfordern und daher beim Unterrichte nicht immer zu wählen sind.

92. **Lehrsatz.** **Fällt man aus den beiden Endpuncten (A, und C Fig. 67) einer Dreiecksseite (AC) Perpendikel (AE, CD) auf die Gegenseiten (BC, und AB), so sind die Rechtecke, die man aus einer dieser beiden Dreiecksseiten und dem Stücke von ihr bildet, das zwischen dem gemeinschaftlichen Endpuncte beider und der Senkrechten enthalten ist, gleichflächig, also $AB_r BD = BC_r BE$.**

Beweis. Aus 90, indem man für AC_q einen Werth nimmt, einmal so, daß AE, und das andere mal so, daß CD das erforderliche Höhenperpendikel ist.

Anmerkung 1. Ist W. ACB ein Rechter, so ist $AB_r BD = BC_q$, wie dies früher (89) gezeigt worden, und im vierten Buche noch einmal bewiesen werden soll.

Anmerkung 2. Ueber diese Linien soll überhaupt noch ausführlicher im vierten Buche gehandelt werden.

93. **Lehrsatz.** *Zieht man von einer Winkelspitze (C) eines Dreiecks (ACB Fig. 67) nach dem Halbirungspuncte (H) der Gegenseite (AB) eine Gerade (CH), so ist das Quadrat derselben und das Quadrat einer der Hälften (AH, BH) der genannten Dreiecksseite zusammengenommen so groß als die halbe Summe der Quadrate von den beiden andern Dreiecksseiten.*

L. G. III, 14.

Beweis. Aus 90, indem man in $\triangle$ ACH einen Werth für AC_q, und in $\triangle$ CBH für BC_q nimmt rc.

Anmerkung. Dieser Satz findet sich schon bei Serenus, in seiner Schrift de sectione coni, S. 16, und bei Pappus VII, 122. Aufs Neue hat denselben vorgetragen Beaufort in den Mem. de l'Academ. des Sciences 1723, wo er ihn aus einer Eigenschaft des Kreises (s. 255) ohne Hülfe des Pythagoräers herleitet, und im Gegentheil erst letztern daraus folgert, so wie auch unsern S. 94. — Mehr über diese Linien im vierten Buche.

Zus. Es ist: $$\frac{AC_q + CB_q}{2} - CH_q = AH_q = \tfrac{1}{4} AB_q$$

d. h. Wird in einem Dreiecke eine der Seiten durch eine Linie aus der Spitze des Gegenwinkels halbirt, so ist der vierte Theil vom Quadrate dieser Seite so groß als der Ueberschuß der halben Summe der Quadrate von den beiden andern Seiten über das Quadrat der Halbirenden.

94. **Lehrsatz.** **In jedem Parallelogramm (Fig. 40) ist die Summe der Quadrate beider Diagonalen so groß als die Summe der Quadrate aller vier Seiten.**

L. G. III, 14, Zus.

Beweis. Aus 50 und 90.

Anmerkung 1. Ist das Parallelogramm ein Rhombus oder ein Quadrat, so ist die Quadratsumme der Diagonalen das Vierfache von dem Quadrate einer der Seiten.

Anmerkung 2. Diesen Satz behandelt unter andern auch Lagny in den Mem. de l'Acad. des Sciences 1706, und folgert daraus, daß, wenn man von einem Rhombus die Seite und eine der Diagonalen kennt, auch stets die andere Diagonale gefunden werden könne.

95. **Lehrsatz.** Wenn man von einem beliebigen Puncte innerhalb eines Rechtecks (Fig. 54) gerade Linien nach den Ecken zieht, so ist die Summe der Quadrate zweier solchen, die nach zwei Gegenecken gezogen sind, so groß als die Quadratsumme der beiden andern.

Beweis. $JE_q - JG_q = EF_q - GF_q = BC_q - AB_q = JC_q - JA_q$ rc.

Anmerkung. Der Satz behält seine Gültigkeit auch dann, wenn der Punct außerhalb des Vierecks liegt. J.

96. **Lehrsatz.** Wenn man über einer Geraden (AB Fig. 68a), welche (in L) halbirt ist, als Cathete ein rechtwinkeliges Dreieck beschreibt, so daß die andere Cathete gleich einer der Hälften (AL, LB) ist, alsdann von der Hypotenuse (AG) ein Stück (GH) gleich eben dieser Hälfte abschneidet, und endlich den Ueberschuß der Hypotenuse (AH) auf der gegebenen Geraden abschneidet ($AC = AH$), so wird diese letztere dadurch in zwei solche Stücke getheilt, daß das Quadrat des größern gleichflächig ist mit dem Rechtecke aus dem kleinern und der ganzen Linie.

Beweis. $AH_q + \frac{1}{4} AB_q + 2\, AH_r HG = AG_q = AB_q + \frac{1}{4} AB_q$, also
$AC_q + AC_r AB = AB_q$, mithin
$$AC_q = AB_q - AC_r AB = AB_r (AB - AC) = AB_r BC.$$

Anmerkung. Man sieht also, wie man verfahren müsse, um eine Gerade zu schneiden, so daß das Quadrat des größern Stücks gleich ist dem Rechtecke aus dem kleinern Stücke und der ganzen Linie; oder, wie wir es im vierten Buche ausdrücken werden, nach dem äußern und mittlern Verhältnisse; womit sich die 10te Aufgabe des ersten Buches beschäftigt.

97. **Lehrsatz.** Wenn man eine Gerade (AB Fig. 68) in zwei solche Stücke (AC, CB) theilt, daß das Quadrat des größern (AC) gleich ist dem Rechteck aus dem kleinern und der ganzen Linie, darauf zwei Kreise beschreibt, den einen aus dem Theilpuncte (C) mit dem größern Stücke als Halbmesser, und den zweiten aus dem andern Endpuncte (A) dieses größern Stücks, dessen Radius die ganze gegebene Linie ist, und endlich den Durchschnittspunct (D) beider sowohl mit den beiden Endpuncten als auch mit dem Theilpuncte der genannten Linie verbindet, so entstehen zwei gleichschenkelige Dreiecke, in denen beiden jeder Winkel über der Grundlinie doppelt so groß, als der Winkel an der Spitze. In dem größern dieser beiden Dreiecke ist jeder Schenkel gleich der ganzen Linie, in dem kleinern gleich dem größern Stücke derselben.

Vorbereitung. Ziehe DE senkrecht auf AB.

Beweis. Aus 90, angewandt auf AD (und mithin auch auf AB) in $\triangle$ ADC; verbunden mit 74, angewandt auf AB, als in C getheilt, findet man $BE = EC$, also auch $BD = CD = AC$ (51, Zus. 4), und mithin W. $DBC = DCB = 2\, BAD$ (38) $= 2\, BDC$.

Zus. 1. Aus unserm Satze ergiebt sich, daß W. ADB durch DC halbirt wird.

Zus. 2. Eben so folgt daraus, daß in einem gleichschenkeligen Dreiecke, wo jeder Winkel über der Grundlinie doppelt so groß als der an der Spitze ist, die Gerade, welche einen der erstern Winkel

halbirt, 1) den Gegenschenkel so theilt, daß das Quadrat des größern Stückes gleich ist dem Rechtecke aus dem kleinern und der ganzen Linie; 2) das größere Schenkelstück gleich der Grundlinie ist.

Zus. 3. Jeder Winkel über der Grundlinie in einem solchen Dreiecke ist $\frac{4}{5}$ R, der dritte $\frac{2}{5}$ R.

Zus. 4. Die Construction eines gleichschenkeligen Dreiecks, in welchem jeder Winkel über der Grundlinie doppelt so groß als der dritte ist, hängt also davon ab, eine Gerade so zu schneiden, daß das Quadrat des größern Stücks gleich ist dem Rechtecke aus dem kleinern Stücke und der ganzen Linie.

Anmerkung. Man kann nun die 11te Aufgabe des zweiten Buches lösen.

98. Lehrsatz. Wenn man in einem gleichschenkeligen Dreiecke, wo jeder Winkel über der Grundlinie doppelt so groß ist als der dritte, aus der Spitze eines der beiden ersten eine Gerade nach dem Gegenschenkel zieht, welche gleich ist der Grundlinie, so ist

1) das Stück dieses Schenkels, das zwischen dieser Geraden und der Spitze enthalten ist, ebenfalls der Grundlinie gleich;
2) das Quadrat eben dieses Schenkelstücks ist gleich dem Rechtecke aus dem andern Stücke und dem ganzen Schenkel;
3) in dem kleinern gleichschenkeligen Dreiecke, das die Grundlinie des gegebenen zu einem seiner Schenkel hat, ist auch jeder Winkel über der Grundlinie doppelt so groß als der dritte;
4) der Winkel an der Spitze dieses kleinern gleichschenkeligen Dreiecks, ist der dritte Theil von dem Außenwinkel (ACD Fig. 68), welchen die gezogene Gerade mit dem Schenkel bildet;

Vorbereitung. DE sei senkrecht auf BC, also BE = EC = 2 BC (51, Zus. 4).

Beweis. Für 1 aus 51 und 52; für 2 aus 90, 74 und 72; für 3 aus 90, und 38, Zus. 2; für 4 aus 51 und 38.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß dieser Satz die Umkehrung des vorigen ist.

Dritter Abschnitt.

Von den Vielecken.

---

99. Erklärung. In allen Vielecken nennt man ausspringende Winkel (GHF, FDA, BCA ꝛc. Fig. 76) diejenigen, deren Spitzen nach außen hin stehen; dagegen heißen einspringende Winkel (HFD, CAD, CBK, KMQ) solche, deren Spitzen nach innen gekehrt sind.

Anmerkung. Wir werden keine andern Vielecke betrachten, als solche, deren Winkel alle ausspringende sind.

100. Erklärung. Innere Winkel eines Vielecks sind diejenigen, welche dessen Seiten an der innern Seite mit einander bilden, äußerer Winkel oder Außenwinkel dagegen ist jeder, welchen eine Seite mit der Verlängerung der angränzenden nach außen bildet.

Erläuterung. In Fig. 75 sind W. EAC, DCA, CDF, DFE, FEA die **innern** Winkel des Vielecks DCAEF; aber ACM, CDJ, DFG, FEK, LAE sind die **äußern**.

Anmerkung. Es ist völlig gleichgültig (22), ob man unter dem Außenwinkel der Seiten CD und JD den Winkel CDJ versteht, welchen CD mit der Verlängerung von FD bildet, oder FDH, welchen FD und die Verlängerung von CD mit einander machen.

101. **Erklärung.** **Umfang** eines Vielecks ist die Summe aller seiner Seiten.

102. **Erklärung.** Ein **regelmäßiges** oder **reguläres** Vieleck ist dasjenige, dessen Seiten unter einander gleich sind, und gleiche Winkel mit einander bilden.

L. G. IV, Erkl. 1.

Anmerkung. Man achte wohl auf die doppelte Bedingung, die in dieser Erklärung ausgesprochen wird; denn in einem Vieleck können alle Winkel gleich sein, ohne daß es die Seiten sind, wie z. B. im Vieleck AGHDEFA (Fig. 74) und umgekehrt können, wie im Vieleck CDJMNKC (Fig. 74) alle Seiten gleich sein, ohne daß es die Winkel sind. In keinem von beiden Fällen ist das Vieleck regelmäßig, sondern nur dann, wenn, wie in ABCDEF eben sowohl die Seiten, als auch die Winkel unter einander gleich sind. S. Clavius zum vierten Buche des Euclides.

Zus. 1. Das gleichseitige Dreieck, und Quadrat können auch zu den regulären Vielecken gezählt werden.

Zus. 2. In einem regelmäßigen Vieleck ist der Umfang gleich dem Sovielfachen von einer Seite, als die Zahl Einheiten hat, welche die Menge der Seiten des Vielecks bezeichnet (101).

103. **Lehrsatz.** Jedes beliebige Vieleck, dessen Winkel alle ausspringende sind, läßt sich durch Gerade, die man von einer Ecke (C Fig. 75) nach allen übrigen zieht, in so viel Dreiecke zerlegen, als Seiten vorhanden sind, weniger zwei.

Beweis. In jedem Falle werden zur Bildung des ersten und letzten solcher Dreiecke vier Vielecksseiten erfordert, zu jedem der übrigen aber nur eine, woraus die Richtigkeit unseres Satzes sich ergiebt.

104. **Lehrsatz.** In jedem beliebigen Vielecke beträgt die Summe aller **innern** Winkel noch einmal so viel Rechte als Seiten vorhanden sind, weniger vier Rechte.

Tacquet zum 32ten Satze im ersten Buche des Euclides

Vorbereitung. Man zerlegt das Vieleck (ACDFE Fig. 75) durch Diagonalen von einer der Ecken aus in Dreiecke.

Beweis. Aus 103 und 38.

Anmerkung. Dasselbe gilt auch für Dreiecke. Doch hätte man unsern allgemeinern Satz nicht beweisen können, ohne die Richtigkeit für einen besondern Fall, namentlich für Dreiecke vorher, durch Hülfe anderer Gründe dargethan zu haben. Es bestätigt sich also hier wiederum das schon oben (90, Anmerk. 3) Gesagte.

Zus. 1. Ist das Vieleck regelmäßig, und bezeichnet n die Anzahl seiner Seiten, so wird jeder Winkel, weil sie alle von gleicher Größe sind, so viel Rechte in sich fassen, als durch die Zahl $\frac{2n-4}{n}$ ausgedrückt werden.

Zus. 2. Es giebt nur drei Arten von regelmäßigen Figuren, das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, und das regelmäßige Sechseck, welche um einen und denselben Punct herum gelegt, den Raum genau, und ohne eine Lücke zu lassen, ausfüllen; es geschieht dieß namentlich durch sechs Dreiecke, vier Quadrate und drei Sechsecke.

Tacquet zum letzten Satze im 4ten Buche des Euclid.

Anmerkung. Ueber die genannten Figuren soll in dieser Beziehung noch weiter gehandelt werden im vierten Buche.

105. **Lehrsatz.** **Die Außenwinkel jedes beliebigen Vielecks, das keinen einspringenden Winkel hat, betragen zusammen vier Rechte.**

Tacquet zu Euclid. I, 32.

Beweis. Aus 20 und 105.

106. **Lehrsatz.** **Wenn man einen beliebigen Punct (P Fig. 77) innerhalb eines beliebigen Vielecks sowohl mit den Ecken als auch mit den Halbirungspuncten der Seiten verbindet, so ist der Ueberschuß von der Summe der Quadrate der nach den Ecken gehenden über die Quadratsumme der die Seiten halbirenden Linien, gleich dem vierten Theile von der Summe der Quadrate aller Seiten des Vielecks.**

Fagnano, Opera Mathem. II, p. 206.

Beweis. Man wendet den Zusatz zu 93 auf jedes der Dreiecke BPA, APD ꝛc. an.

107. **Lehrsatz.** **Wenn man in einem regelmäßigen Vielecke (Fig. 78) alle Winkel halbirt, so**

1) **haben diese Halbirenden (AC, EC ꝛc.) stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct (C);**
2) **sie sind alle von gleicher Länge, und theilen daher das Vieleck in so viel gleichschenkelige unter einander congruente Dreiecke als es Seiten hat;**
3) **sie bilden um den Punct C herum gleiche Winkel (ACE, ECF ꝛc.);**
4) **der Punct C hat von allen Seiten des Vielecks gleiche Entfernung d. h. (29, Zus. 1) die Senkrechten, die man von ihm auf diese Seiten fällt, sind von gleicher Länge.**

Beweis. Für 1 aus 46; für 2 und 3 aus 1; für 4 aus der Congruenz der Dreiecke BCE ꝛc. nach 46.

Anmerkung. Aus diesem unsern Satze ergeben sich die folgenden drei Erklärungen.

108. **Erklärung.** **Mittelpunct oder Centrum eines regelmäßigen Vielecks heißt derjenige Punct innerhalb desselben, der so beschaffen ist, daß die von ihm nach den Ecken gezogenen Geraden alle von gleicher Länge sind und die Vieleckswinkel halbiren. Diese Linien selbst heißen Halbmesser oder Radien.**

Anmerkung. Beschreibt man von diesem Mittelpuncte mit einem solchen Halbmesser einen Kreis, so müssen alle Ecken der Figur auf dessen Umkreise liegen.

109. **Erklärung.** **Perpendikel des Vielecks sind diejenigen Senkrechten, die man aus dem Mittelpuncte auf die Seiten fällt.**

110. **Erklärung.** **Die gleichschenkeligen Dreiecke, in welche ein regelmäßiges Vieleck durch seine Radien zerlegt werden kann, heißen Mittelpunctsdreiecke, und ihre Winkel an der Spitze Mittelpunctswinkel.**

Anmerkung 1. Durch die Perpendikel des Vielecks werden seine Mittelpunctswinkel halbirt (51, Zus. 4), weshalb auch die Winkel am Mittelpuncte, welche Perpendikel und Halbmesser mit einander bilden, den Namen halber Mittelpunctswinkel führen.

Zus. 1. **Jeder Mittelpunctswinkel eines regelmäßigen Vielecks, welches n Seiten hat, beträgt $\frac{4\,R}{n}$; und der Winkel, welchen zwei**

Seiten des Vielecks mit einander bilden, ist gleich (n — 2) halben Mittelpunctswinkeln.

Anmerkung 2. Das erstere folgt aus 107 und 22 Zus., das zweite aus dem erstern und aus 38.

Zus. 2. Die Mittelpunctsdreiecke eines regelmäßigen Sechsecks sind gleichseitig.

Anmerkung 3. Es folgt dieß aus dem vorigen Zusatze und aus 51, Zus. 3; und es wird dadurch sehr leicht, über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

111. Lehrsatz. Wenn man in einem regelmäßigen Fünfeck (Fig. 79) aus den Endpuncten einer Seite (KH) nach der Gegenecke (B) gerade Linien zieht, so bilden diese mit der genannten Seite ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem jeder Winkel über der Grundlinie doppelt so groß ist, als der an der Spitze.

Vorbereitung. Man ziehe die Radien GK, GB, GH, und verlängere BG bis nach J, so wird (51, Zus. 5) BGJ senkrecht auf KH stehen.

Beweis. Gleichschenkelig ist △BKH, weil △BCK ≌ △BEH; ferner GKH = $\frac{3}{2}$ KGJ (110, Zus. 1) = 3 KBJ (38), also
BKJ = 4 KBJ = 2 KBH.

Anmerkung. Zur Construction eines regelmäßigen Fünfecks wird also erfordert, daß man zuerst, nach Anleitung von 97, Zus. 2, und der zehnten Aufgabe des zweiten Buches ein gleichschenkeliges Dreieck (BKH) beschreibt, in welchem jeder Winkel über der Grundlinie doppelt so groß ist, als der dritte, und dann über jedem seiner Schenkel (KB, BH) als Grundlinie ein gleichschenkeliges Dreieck beschreibt, in welchem jeder Schenkel gleich der Grundlinie (KH) des genannten Dreiecks ist.

112. Lehrsatz. Wenn ein regelmäßiges Vieleck (Fig. 80) eine gerade Anzahl von Seiten hat, so bilden zwei gerade Linien, die man vom Mittelpuncte nach zwei gegenüberstehenden Ecken zieht, eine einzige gerade Linie, welche das Vieleck in zwei congruente Hälften theilt; eben dasselbe gilt für zwei Senkrechte, die man aus dem Mittelpuncte auf zwei Gegenseiten fällt; ja jede durch den Mittelpunct gehende und bis zum Durchschnitt mit den Seiten verlängerte Gerade theilt das Vieleck in zwei congruente Hälften, und endlich sind je zwei Gegenseiten parallel.

Beweis. Das erste und zweite aus 21, und das letzte aus 107, und 26.

Anmerkung. Es geschieht daher nicht ohne Grund, daß man die regulären Vielecke, deren Seitenzahl gerade ist, auch symmetrische Vielecke zu nennen pflegt.

Zus. Hieraus folgt, daß in allen symmetrischen Vielecken die Geraden (AD, GE Fig. 80), welche die Endpuncte gegenüberstehender, und mithin paralleler Seiten verbinden, mit diesen rechte Winkel bilden.

113. Lehrsatz. Wenn man in einem regelmäßigen Vielecke von gerader Seitenzahl (Fig. 80) die Endpuncte je zweier paralleler Seiten durch Gerade verbindet, die nicht durch den Mittelpunct gehen, so bestimmen die gegenseitigen Durchschnittspuncte derselben die Ecken eines Vielecks, das gleichfalls regelmäßig ist, denselben Mittelpunct und eben so viel Seiten hat, als das Urvieleck, und dessen Perpendikel halb so groß als die Seite des Urvielecks ist.

*) Du Fay Mem. de l'Acad. 1727 p. 299.

Beweis. Die Regelmäßigkeit des entstandenen Vielecks ergiebt sich aus 112, Zus., 22, 52, 46, 37.

Daß es denselben Mittelpunct hat, aus 51, Zus. 5, und 45; das letzte endlich aus 112 und 54.

Anmerkung. Diese innern Vielecke sollen noch näher betrachtet werden im sechsten Buche.

114. Lehrsatz. Wenn man in einem regelmäßigen Vielecke von ungerader Seitenzahl (Fig. 79) von jeder Ecke nach den Endpuncten der Gegenseite gerade Linien zieht, so bilden die gegenseitigen Durchschnittspuncte derselben die Ecken eines neuen regelmäßigen Vielecks um denselben Mittelpunct, von eben so viel Seiten, als das Urvieleck, aber von umgekehrter Lage in Beziehung auf dasselbe.

Beweis. Aus 46, 38, 46, 54, und 112, Zus.

115. Lehrsatz. Errichtet man auf jeder Seite eines regelmäßigen Vielecks von ungerader Seitenzahl (Fig. 81) in ihrem Anfangspuncte sowohl als in ihrem Endpuncte ein Perpendikel, so bilden die gegenseitigen Durchschnittspuncte sowohl der in den Anfangspuncten (A von AB, B von BD ꝛc.) als der in den Endpuncten (B von AB, D von DB ꝛc.) errichteten die Ecken eines neuen regelmäßigen Vielecks, von gleicher Seitenzahl und gemeinschaftlichem Mittelpuncte mit dem Urvieleck; beide Vielecke sind unter einander congruent, und liegen, wenn das Urvieleck mehr als drei Seiten hat, ganz innerhalb desselben.

Du Fay Mem. de l'Acad. 1727 p. 299; aber nicht so allgemein; er spricht blos von einem Vieleck.

Beweis. Aus 46, 37, 46, 54, und 112, Zus.

Anmerkung. Im sechsten Buche (300 u. ff.) soll über diese innern Vielecke noch weiter gehandelt werden.

116. Lehrsatz. Nimmt man auf allen Seiten eines regelmäßigen Vielecks (Fig. 82) Puncte (E, F, G, J, L), so daß sie gleiche Entfernungen von den nächsten Ecken (A, D, C, B, Q) haben, so bestimmen diese die Ecken eines gleichfalls regelmäßigen Vielecks von gleicher Seitenzahl und gemeinschaftlichem Mittelpuncte mit dem Urvieleck.

Beweis. Die Regelmäßigkeit folgt aus der Congruenz der Dreiecke AEL, EDF ꝛc. (45); daß der Mittelpunct gemeinschaftlich ist, aus der Congruenz der Dreiecke AOL, EOD ꝛc. ꝛc.

Anmerkung. Simpson (I, 28) hat dieß blos für Quadrate erwiesen; s. oben 64, Zus. 2.

117. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks ist gleich dem Flächenraume eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange, und dessen Höhe gleich dem Perpendikel (109) des Vielecks ist.

L. G. IV, 7.

Beweis. Aus 107 und 102.

Zus. Daher ist der Inhalt eines solchen Vielecks auch gleich dem Inhalt eines Rechtecks, dessen Höhe gleich dem Perpendikel des Vielecks, und dessen Grundlinie gleich dem halben Umfange des Vielecks ist (84, Zus. 1.)

Anmerkung. Der Flächenraum von Vielecken wird also auch auf den Flächeninhalt von Rechtecken zurückgeführt.

118. Lehrsatz. Der Inhalt aller geradlinigen Figuren kann auf den Inhalt von Rechtecken zurückgebracht werden, indem man jederzeit ein Rechteck construiren kann, das mit einer gegebenen Figur gleichflächig ist.

Beweis. Man zerlegt die Figur in Dreiecke; jedes derselben ist nach (84, Zus. 1) einem bestimmten Rechtecke gleichflächig; man kann nun immer ein Rechteck construiren, was so groß ist als die Summe mehrer gegebener Rechtecke und mithin auch gleich dem Vieleck.

Anmerkung. Diese Constructionen sind lästig, weil alle Rechtecke nach dem ersten, welches mit dem ersten Dreiecke gleichflächig ist, so construirt werden müssen, daß sie mit jenem gleiche Grundlinie oder Höhe haben, also über einer gegebenen Linie, was umständlich ist (Aufgg. II, 14). Man kann sich zwar die Sache in etwas erleichtern, indem man die zu verwandelnden Dreiecke paarweise nimmt, und ihre gemeinschaftliche Seite zur Grundlinie oder Höhe der gesuchten Rechtecke macht, allein viel einfacher erreicht man das Ziel, wenn man durch Hülfe der 29ten Aufg. im zweiten Buche das gegebene Vieleck in ein Dreieck und dieses in ein Rechteck verwandelt.

Anhang zum zweiten Buche.

175. Zwei Dreiecke sind gleichflächig, wenn zwei Seiten des einen einzeln zweien Seiten des andern gleich sind, der eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck aber das Supplement von dem entsprechenden Winkel des andern Dreiecks ist.

84.

176. Verbindet man in einem Paralleltrapez die Halbirungspuncte der beiden parallelen Seiten, so wird durch diese Gerade das Viereck halbirt.

84.

Frage: Wie muß das Paralleltrapez beschaffen sein, damit diese Halbirende senkrecht auf den beiden parallelen Seiten stehe?

177. Ein Paralleltrapez ist gleichflächig einem Parallelogramme, das mit ihm zwischen denselben Parallelen liegt, und dessen Grundlinie gleich der Geraden ist, welche die Halbirungspuncte der beiden nichtparallelen Seiten verbindet. Fig. 35.

178. Das aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel beschriebene Parallelogramm ist gleichflächig dem Rechteck, welches man aus der dritten Dreiecksseite und dem zu ihr gehörigen Höhenperpendikel construirt.

179. Verbindet man die Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks mit einem beliebigen Puncte auf der Grundlinie oder deren Verlängerung, so ist das Rechteck, das zu einer Seite die Summe dieser Verbindenden und des Schenkels, zur andern den Unterschied eben dieser Linien hat, gleich dem Rechteck aus den Segmenten der Grundlinie, die zwischen dem angenommenen Puncte und ihren Endpuncten enthalten sind. Fig. 36.

81.

Frage: Von welchem bekannten Satze kann der vorstehende als eine Verallgemeinerung angesehen werden?

180. Jedes Dreieck, welches in ein Parallelogramm und zwar dergestalt beschrieben ist, daß höchstens eine seiner Ecken mit einer der Ecken des Parallelogramms zusammenfällt, ist kleiner als die Hälfte des Parallelogramms.

181. Wenn in einem Vierecke eins von den drei Paaren zugeordneter Seiten sich (nöthigenfalls verlängert) unter rechten Winkeln schneidet, so sind die Quadratsummen des zweiten und dritten Paares unter einander gleich.

87.

Anmerkung. Man kann diesen Satz als eine Art pythagoräischen Lehrsatzes für die Vierecke ansehen.

182. Schneiden sich in einem Vierecke alle drei Paare zugeordneter Seiten unter rechten Winkeln, so sind die Quadratsummen derselben alle unter einander gleich.

183. Ist in einem Dreiecke einer der Winkel halb so groß als die Summe der beiden andern, so ist das Quadrat seiner Gegenseite um das Rechteck aus den beiden andern Seiten kleiner, als die Summe der Quadrate eben dieser beiden andern Seiten.

90. — A. 60.

Zus. Ist dagegen einer der Winkel doppelt so groß, als die Summe der beiden andern, so ist das Quadrat seiner Gegenseite um das Rechteck aus den beiden andern Seiten größer als die Quadratsumme eben dieser beiden Seiten.

90. — A. 60.

184. Hat man eine beliebige Gerade, zieht eine zweite, die auf ihr senkrecht steht, so ist der Unterschied der Quadrate aller derjenigen Linienpaare, die man von beliebigen Puncten der zweiten nach den beiden Endpuncten der ersten Geraden zieht, eine constante von der Lage des Punctes auf der zweiten Geraden unabhängige Größe.

185. Wenn man in einem Dreiecke die Halbirungspuncte zweier Seiten nicht nur unter einander verbindet, sondern auch von ihnen ein Paar beliebiger Parallelen nach der dritten Seite zieht, so ist das so entstandene Parallelogramm stets halb so groß als das Dreieck.

186. Zieht man in einem Paralleltrapez von dem Halbirungspuncte einer der nichtparallelen Seiten nach den Endpuncten der zweiten gerade Linien, so ist das von denselben und der Viereckseite gebildete Dreieck halb so groß als das Viereck. Fig. 37.

187. Zwei Dreiecke sind gleichflächig, wenn zwei Seiten des einen einzeln gleich zwei Seiten des andern sind, die dritte Seite des einen aber doppelt so groß ist als die Gerade, welche man aus dem Halbirungspuncte der dritten Seite des andern nach der Gegenecke zieht.

188. Halbirt man in einem Rechtecke alle vier Winkel und verlängert die Halbirenden bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so ist das von ihnen gebildete Viereck stets ein Quadrat, dessen Flächeninhalt halb so groß ist als das Quadrat, welches den Ueberschuß der größern Rechtecksseite über die kleinere zur Seite hat.

189. Halbirt man die Außenwinkel eines Rechtecks und verlängert die Halbirenden bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so ist das von ihnen gebildete Viereck ein Quadrat, dessen Inhalt halb so groß ist, als das über der Summe der beiden Rechtecksseiten beschriebene Quadrat.

190. Beide Quadrate zusammen sind daher so groß als das Quadrat einer der Diagonalen des Rechtecks, der Ueberschuß des äußern über das innere aber doppelt so groß als das gegebene Rechteck.

191. Wenn man eine gerade Linie halbirt, über einer der Hälften als Hypotenuse ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck construirt, und von dem Halbirungspuncte aus ein Stück gleich der Cathetenlänge abschneidet, so ist das Rechteck aus den beiden ungleichen Stücken der Geraden gleichflächig dem Quadrate des Stückes, welches zwischen den beiden Theilpuncten enthalten ist.

192. Zwei Dreiecke (ABC, und DEF Fig. 38) sind gleichflächig, wenn ihre Grundlinien (BC und EF) auf derselben Geraden liegen, und die Geraden, (AE, AF, DB, DC) welche man von der Spitze eines jeden Dreiecks nach den Endpuncten der Grundlinie des andern zieht, einzeln unter sich parallel sind (AE || DB und AF || DC).

193. Schneidet man auf den Seiten eines Dreiecks (ABC Fig. 39) von den Ecken aus gleichmäßig Stücke (AF, BD, CE) ab, von denen jedes gleich dem dritten Theile der Seite ist, auf der es abgeschnitten worden, und man verbindet die so erhaltenen Puncte (D, E, F) mit den Gegenecken, so sind die drei Dreiecke AFH, BDJ, CEG zusammen so groß als das mittlere Dreieck GHJ.

194. Halbirt man zwei Gegenseiten eines Vierecks, und verbindet den Halbirungspunct einer jeden mit den Endpuncten der andern Seite, so sind die beiden so entstandenen Dreiecke zusammen so groß als das Viereck.

84.

Frage: Von welchem frühern Satze kann dieser als eine Verallgemeinerung angesehen werden?

195. In jedem Dreiecke haben die Geraden, welche die Halbirungspuncte der Seiten mit den Gegenecken verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, und zwar so, daß das Stück jeder Verbindenden zwischen diesem Puncte und der Ecke doppelt so groß ist als das andere.

84. nebst Umkehrung. — 84. 3. 3.

Anm. Ein anderer Beweis dieses Satzes findet sich im dritten Buche.

196. Fällt man von einem Puncte innerhalb eines Dreiecks Senkrechte auf dessen Seiten, so ist die Summe der Quadrate von drei solchen Seiten-Stücken, die keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben, gleich der Quadratsumme der drei übrigen.

87.

Frage: Bleibt der Satz auch dann noch richtig, wenn der Punct, von welchem die Senkrechten auslaufen, im Umfange des Dreiecks, oder außerhalb desselben liegt?

197. Theilt man jede der Seiten eines Dreiecks in zwei solche Stücke, daß die Summe der Quadrate dreier nicht an einander angränzender gleich der Summe der Quadrate der drei übrigen ist, und errichtet auf den Seiten in diesen Theilpuncten Senkrechte, so haben diese bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

198. Beschreibt man über jeder der Seiten eines Dreiecks, und zwar abwärts von den beiden andern, ein Quadrat, fällt von einem Puncte innerhalb des Dreiecks auf

dessen Seiten Senkrechte und verlängert sie, bis sie die Gegenseiten der Quadrate schneiden, so ist von den sechs so entstandenen Rechtecken die Summe dreier nicht an einander angränzender gleich der Summe der drei übrigen.

Zus. 1. Daher ist jede dieser Rechtecks-Summen halb so groß als die Summe der Quadrate der drei Dreiecksseiten.

Zus. 2. Umkehrung des Hauptsatzes.

199. Theilt man eine beliebige Gerade (AB Fig. 40) in drei beliebige Stücke (AC, CD, DB), so ist das Rechteck aus der ganzen Linie (AB) und dem mittlern Stücke (CD) vermehrt um das Rechteck aus den beiden äußern Stücken (AC, DB), gleich dem Rechteck aus den beiden Stücken (AD, CB), von denen jedes zwischen einem der Endpuncte und dem entferntern Theilpuncte liegt.

85.

200. Wird eine der Seiten (BC) eines Dreiecks (ABC) in zwei solche Stücke (BD, DC) getheilt, daß die m fache Länge des einen (DC) gleich der n fachen Länge des andern (BD) ist, und man verbindet diesen Theilpunct (D) mit der Gegenecke, so ist stets: $n \cdot AB_q + m \cdot AC_q = n \cdot BD_q + m \cdot DC_q + (m+n)\ AD_q$.

90.

Frage: Von welchem Satze des zweiten Buches kann der vorstehende als Erweiterung angesehen werden?

201. Schneidet man von zwei Gegenecken eines beliebigen Parallelogramms aus auf den von ihnen auslaufenden Seiten beliebige Stücke so ab, daß je zwei, die auf parallelen Seiten genommen werden, gleich sind, und verbindet diese vier Durchschnittspuncte, so ist das so entstandene Parallelogramm gleichflächig mit dem Parallelogramme, welches entsteht, indem man dieselben Stücke auf dieselbe Weise von den beiden andern Gegenecken aus abschneidet.

Frage: Können nicht in einzelnen Fällen unsere beiden in Rede stehenden Parallelogramme sogar congruent sein?

202. Beschreibt man über jeder Seite eines beliebigen Dreiecks, abwärts von den beiden andern, ein Quadrat und verbindet die Endpuncte je zweier von derselben Ecke des Dreiecks auslaufender Quadratseiten, so sind die Dreiecke, welche diese Verbindenden mit den genannten Quadratseiten bilden, stets unter einander und mit dem Urdreiecke gleichflächig. Fig. 41.

84.

203. Errichtet man auf zwei Seiten (AB, AC Fig. 41) eines beliebigen Dreiecks (ABC) in ihrem gemeinschaftlichen Endpuncte Senkrechte (AH, AG), macht sie an Länge gleich den Dreiecksseiten, auf welchen sie senkrecht stehen, und verbindet ihre Endpuncte (G, H), so ist das Quadrat dieser Verbindenden (GH) und das Quadrat der dritten Dreiecksseite (BC) zusammen doppelt so groß als die Summe der Quadrate der beiden genannten Dreiecksseiten.

90.

204. Construirt man über den im vorvorigen Satze näher bezeichneten Verbindungslinien (EF, GH, DJ Fig. 41) Quadrate, so ist die Summe derselben dreimal so groß als die Summe der über den Seiten des Urdreiecks (ABC) beschriebenen Quadrate.

90. A. 203.

205. Auch die Dreiecke DEK, DEL, GFM, GFN, OHJ, HJP sind untereinander und mit dem Urdreiecke gleichflächig.

A. 175.

206. Daher sind die Vierecke KDEL, GFMN, und HJOP Paralleltrapeze.

207. Jedes derselben ist fünfmal so groß als das Urdreieck ABC; alle drei sind also unter einander gleichflächig.

Fig. 41. GQ = GF = FR = RS.

208. Jede der drei Geraden KL, MN, OP ist gleich dem Umfange eines der über den Seiten des Urdreiecks beschriebenen Quadrate.

209. Beschreibt man über den genannten Linien KL, MN, OP wiederum Quadrate, so ist die Summe derselben viermal so groß, als die über den Seiten des Urdreiecks und die über den Verbindungslinien EF, GH, DJ construirten sechs Quadrate zusammengenommen.

Anmerkung. Die Untersuchung läßt sich noch weiter fortführen. Vielleicht kommen wir in einem spätern Anhange noch einmal auf diesen Gegenstand zurück.

210. Wenn man über jeder Seite eines Vierecks (ABCD Fig. 42) abwärts von den übrigen ein Quadrat beschreibt, und die Endpuncte von je zwei solchen Seiten der-

selben verbindet, die von derselben Ecke des Vierecks auslaufen, so ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Dreiecken (AEM, CHJ) gleich der Summe der beiden andern (FBG, LDK).

X. 175.

211. Beschreibt man über jeder Seite eines Vierecks, in welchem beide Diagonalen gleich sind, abwärts von den übrigen Seiten, ein Quadrat, verbindet die Endpuncte je zwei solcher Quadratseiten, die von derselben Vierecksspitze auslaufen, und beschreibt über diesen vier Verbindenden wiederum Quadrate, so sind zwei gegenüberliegende zusammen so groß als die beiden andern.

90.

212. Zwei in ihren Winkeln übereinstimmende Parallelogramme (ABCD, EFGH Fig. 43) sind gleichflächig, wenn ihre Grundlinien (AB, EF) auf derselben Geraden liegen und die beiden Linien (EJ, AK) parallel sind, welche die Durchschnittspuncte der Gegenseiten des einen Parallelogramms mit den ihnen nicht parallelen Gegenseiten des andern gleichmäßig verbinden.

83. — 85.

213. Zwei Parallelogramme (ABCD, EFGH Fig. 44) sind gleichflächig, wenn nicht nur ihre Seiten einzeln parallel sind, sondern auch die beiden Geraden (JK, LM) parallel laufen, welche die Durchschnittspuncte der Gegenseiten des einen Parallelogramms mit den ihnen nicht parallelen Gegenseiten des andern verbinden.

GP ‖ LM. — X. 212.

214. Fällt man aus einem beliebigen Puncte in der Ebene eines Dreiecks auf dessen Seiten oder deren Verlängerungen Senkrechte, verbindet drei beliebig auf denselben angenommene Puncte zu einem Dreiecke und fällt auf dessen Seiten aus den Ecken des Urdreiecks Senkrechte, so haben auch diese bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

X. 197.

215. In jedem beliebigen Vierecke ist die Summe der Quadrate von zwei Paaren zugeordneter Seiten gleich der Quadratsumme des dritten Paares vermehrt um das vierfache Quadrat der Linie, welche die Halbirungspuncte eben dieses dritten Seitenpaares verbindet.

93.

Frage 1. Von welchem Lehrsatze des zweiten Buches kann der vorstehende als eine Erweiterung angesehen werden?

Frage 2. Wie muß ein Viereck beschaffen sein, damit die Summe der Quadrate seiner Diagonalen im Vergleich zur Quadratsumme der Seiten ein Größtes sei?

216. Schneidet man auf der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks von ihren Endpuncten aus Stücke ab, welche gleich den Catheten sind, so ist das Quadrat der Linie, welche zwischen diesen beiden Durchschnittspuncten liegt, doppelt so groß als das Rechteck aus den Ueberschüssen der Hypotenuse über die eine und die andere Cathete.

87. 74. 73.

217. Fällt man in einem rechtwinkeligen Dreieck von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der die Winkel halbirenden Linien eine Senkrechte auf eine der Seiten, so ist das Quadrat derselben halb so groß als das Rechteck aus den Ueberschüssen der Hypotenuse über die eine und die andere Cathete.

X. 121.

218. Verbindet man die Halbirungspuncte der Seiten eines Dreiecks mit den Gegenecken, so ist die vierfache Summe der Quadrate dieser Linien gleich der dreifachen Summe der Quadrate der Dreiecksseiten.

93.

219. Wenn man jede der Catheten eines rechtwinkeligen Dreiecks über jeden ihrer Endpuncte hinaus um ihre eigne Länge verlängert und jeden der Endpuncte mit der Gegenecke verbindet, so ist die Summe der Quadrate dieser vier Verbindenden siebenmal so groß als das Quadrat der Hypotenuse.

220. Verlängert man die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks über jeden ihrer Endpuncte hinaus um ihre eigne Länge, und verbindet diese beiden Endpuncte mit der Spitze des rechten Winkels, so ist die Summe der Quadrate der Verbindenden fünfmal so groß als das Quadrat der Hypotenuse.

221. Wenn zwei Dreiecke (ABC, ADE Fig. 45) eine gemeinschaftliche Spitze (A) und zwei Grundlinien (BC, DE) haben, die gleich und parallel sind, so ist die algebrai-

sche Summe ihrer Flächen halb so groß als das durch die Grundlinien bestimmte Parallelogramm.

222. Nimmt man außerhalb eines Parallelogramms einen beliebigen Punct, und verbindet denselben mit den Ecken der Figur, so ist das Dreieck, welches durch zwei dieser Verbindenden und eine der Diagonalen gebildet wird, gleich der algebraischen Summe der beiden Dreiecke, welche auf ähnliche Weise durch je zwei jener Verbindenden und zwei solche Seiten des Parallelogramms gebildet werden, welche von demselben Endpuncte der Diagonale auslaufen.

Frage: Ob der Satz auch noch gilt, wenn man den Punct innerhalb des Parallelogramms nimmt?

223. Nimmt man außerhalb oder innerhalb eines beliebigen Parallelogramms einen beliebigen Punct und verbindet ihn mit dessen Ecken, so ist die Summe der beiden von den sechs so entstehenden Dreiecken, welche die Diagonalen zu Seiten haben, gleich der algebraischen Summe der beiden Dreiecke, welche das eine Paar von Gegenseiten zu Grundlinien haben, und der Unterschied jener beiden Diagonaldreiecke gleich der algebraischen Summe der beiden Dreiecke, welche das andere Paar von Gegenseiten zu Grundlinien haben.

Frage: Lassen sich nicht vielleicht die Sätze 221 — 223 in einen einzigen allgemeinen Satz zusammenfassen?

224. Wenn man in einem Paralleltrapez die Halbirungspuncte der beiden nicht parallelen Seiten verbindet, und dann einen beliebigen Punct der so erhaltenen Graden mit den vier Ecken der Figur, so ist die Summe zweier Gegendreiecke gleich der Summe der beiden andern.

Fig. 46.

Frage 1. Von welchem frühern das Paralleltrapez betreffenden Satze dieses Abschnittes kann man den vorstehenden als eine Erweiterung ansehen?

Frage 2. Findet vielleicht etwas unserm Satze Aehnliches Statt, wenn der Punct anstatt auf der die nicht parallelen Seiten halbirenden Geraden selbst, auf ihrer Verlängerung genommen wird?

225. *Wenn in einem Parallelogramm (ABCD Fig. 47) eine der Diagonalen (AC) von gleicher Länge mit einem Paare Gegenseiten (AB, CD) ist, so ist die Summe der Quadrate der beiden andern Gegenseiten (AD, BC) und eben dieser Diagonale gleich dem Quadrate der andern Diagonale (BD).*

90.

226. In jedem Paralleltrapez ist die Summe der Quadrate beider Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der beiden nicht parallelen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus den beiden parallelen Seiten.

Frage: Von welchem Satze des zweiten Buches kann der vorstehende als eine Erweiterung angesehen werden?

227. Schneidet man auf jeder Seite eines Dreiecks (ABC Fig. 48) von jedem ihrer Endpuncte aus den nten Theil ihrer eignen Länge ab, so ist die Summe der Quadrate von der einen Ternion der Linien, welche diese Durchschnittspuncte mit den Gegenecken verbinden (AD, BE, CF) gleich der Summe der Quadrate der andern Ternion (AG, BH, CJ).

A. 200.

Frage: In welchen besondern Fällen werden je zwei unserer Transversalen einander gleich?

228. Verlängert man die Seiten eines Dreiecks (ABC Fig. 49) gleichmäßig, jede um die Hälfte ihrer eignen Länge, und verbindet so wohl die Endpuncte (D, E, F) dieser Verlängerungen, als auch die Halbirungspuncte (G, H, J) der Seiten selbst mit den Gegenecken, so ist der Ueberschuß der Quadratsumme der ersten Ternion von Linien (AE, BF, CD) über die Quadratsumme der zweiten (AH, BJ, CG) gleich der Summe der Quadrate der Dreiecksseiten.

229. Verbindet man die Halbirungspuncte zweier Paare zugeordneter Seiten eines Vierecks unter einander, so ist das so entstandene Parallelogramm halb so groß als der Unterschied der beiden Dreiecke, welche eben diese beiden Seitenpaare mit einander bilden; es ist also (Fig. 17) $EFGH = \frac{1}{2}[\triangle ABN - \triangle CDN]$, $EKGJ = \frac{1}{2}[\triangle AMB - \triangle CMD]$, $FKHJ = \frac{1}{2}[\triangle BMC - \triangle AMD]$.

A. 221.

Zus. Daher liegen in jedem Paralleltrapez die Halbirungspuncte der beiden nicht parallelen Seiten und der beiden Diagonalen in einer geraden Linie.

230. Schneidet man von einem der Endpuncte (A) der Diagonale (AC Fig. 50)

eines Vierecks ein Stück (AF) ab, welches gleich ist dem Segment (CE) dieser Diagonale, welches zwischen der andern Diagonale und der Gegenecke liegt, verfährt dann eben so mit der zweiten Diagonale und verbindet diese Puncte (F, G), so ist die Quadratsumme dieser Verbindenden und der beiden Diagonalen gleich der Quadratsumme der vier Seiten.

Frage: Welche Eigenschaften ergeben sich hieraus für solche Vierecke, in denen eine Diagonale durch die andere, und für solche, in denen beide Diagonalen durch einander halbirt werden?

231. Wenn man in einem Vierecke ein Paar Gegenseiten (AD, BC Fig. 51) bis zu ihrem Durchschnittspunct (E), und darauf auch über die entgegengesetzten Endpuncte (A, B) hinaus verlängert, diese letztern Verlängerungen den erstern einzeln gleich macht (AG = DE, BF = CE) und die so erhaltenen beiden Puncte verbindet, so ist das Quadrat dieser Verbindenden sammt den Quadraten der Seiten, die man verlängert hat, gleich der Quadratsumme der beiden andern Seiten und der Diagonalen des Vierecks.

90.

Frage: In welchen allgemeinern Satz lassen sich die beiden letzten Sätze zusammenfassen?

232. Verlängert man die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks über jeden ihrer Endpuncte hinaus um ihre eigne Länge, verbindet die so erhaltenen Puncte mit der Spitze des rechten Winkels und fällt in dem dadurch entstandenen stumpfwinkeligen Dreieck aus einem der spitzen Winkel eine Senkrechte auf die verlängerte Gegenseite, so ist das Rechteck aus dieser Seite und ihrer Verlängerung doppelt so groß als das Quadrat der Hypotenuse.

233. Wenn man in einem Dreiecke von jedem Endpuncte jeder Seite aus sowohl auf ihr selbst als auf ihrer Verlängerung den n^{ten} Theil ihrer eignen Länge abschneidet, alle diese Puncte mit den Gegenecken verbindet, so ist der Ueberschuß der Quadratsumme aller äußern Verbindungslinien über die Quadratsumme aller innern doppelt so groß als die Summe der Quadrate der Dreiecksseiten.

234. Nimmt man außerhalb eines gleichseitigen Dreiecks einen beliebigen Punct, so ist die Summe der Quadrate der Linien, die ihn mit den Ecken des Dreiecks verbinden, dreimal so groß als die Quadratsumme der beiden Linien, welche den Höhendurchschnitt des Dreiecks mit einer seiner Ecken und mit eben jenem Puncte außerhalb verbinden.

A. 200.

Frage: Bleibt unser Satz noch richtig, wenn der Punct innerhalb oder im Umfange des Dreiecks genommen wird?

235. Nimmt man in der Ebene eines Quadrates einen beliebigen Punct, so ist die Summe der Quadrate der Linien, welche ihn mit den Ecken der Figur verbinden, viermal so groß als die Quadratsumme der beiden Linien, welche den Durchschnittspunct der Diagonalen mit einer der Ecken und mit eben jenem Puncte verbinden.

Frage: Gilt unser Satz auch für die übrigen Parallelogramme?

236. Nimmt man in der Ebene eines beliebigen regelmäßigen Vielecks von gerader Eckenzahl einen beliebigen Punct, so ist die Quadratsumme aller der Linien, die diesen Punct mit sämmtlichen Ecken verbinden, so viel mal so groß als die Summe der Quadrate der beiden Linien, welche den Durchschnittspunct der Diagonalen zwischen je zwei Gegenecken mit einer der Ecken und mit eben jenem angenommenen Puncte verbinden, so viel die Eckenzahl der Figur Einheiten hat.

237. Zieht man aus den Spitzen eines Dreiecks nach den Halbirungspuncten der Gegenseiten gerade Linien, und verbindet sowohl den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct derselben (A. 195) als auch die Spitzen des Dreiecks mit einem beliebigen Puncte in dessen Ebene, so ist die Summe der Quadrate der drei letztern Linien gleich dem dreifachen Quadrate der Linie, welche den Durchschnittspunct der genannten Transversalen mit dem angenommenen Puncte verknüpft, vermehrt um die Quadrate der Linien, die von eben diesem Durchschnittspuncte nach den Spitzen des Dreiecks laufen.

Frage: Welchen frühern Satz dieses Anhanges schließt der vorstehende als besondern Fall in sich?

238. Nimmt man in der Ebene eines Dreiecks zwei Puncte beliebig, jedoch so, daß sie gleiche Entfernung von dem Puncte haben, in welchem sich die Linien schneiden, welche die Halbirungspuncte der Seiten mit den Gegenecken verbinden, und verbindet

sowohl den einen, als den andern mit den Ecken, so ist die Quadratsumme der einen Linienternion gleich der Quadratsumme der andern.

239. Die Summe der Quadrate der Linien, welche einen beliebigen Punct in der Ebene eines Vierecks mit dessen Ecken verbinden, ist gleich der Quadratsumme der Geraden, welche man von dem Puncte, in dem sich die drei Geraden schneiden, welche die Halbirungspuncte je zweier zugeordneter Seiten verbinden (A. 71), nach den Ecken zieht, vermehrt um das vierfache Quadrat der Linie, welche eben diesen Durchschnittspunct mit dem angenommenen Puncte verbindet.

240. Haben zwei oder mehrere Puncte in der Ebene eines Vierecks gleiche Entfernung von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der die Halbirungspuncte je zweier Gegenseiten Verbindenden, und man zieht von jedem derselben nach allen vier Ecken gerade Linien, so ist die Summe der Quadrate der einen Linienquaternion so groß als die Summe der Quadrate jeder der übrigen Quaternionen.

241. Die Summe der Quadrate der drei Linien, welche man von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der die Seiten halbirenden Scheitellinien eines Dreiecks nach dessen Ecken zieht, ist kleiner als die Quadratsumme der Geraden, welche irgend einen andern Punct in der Ebene des Dreiecks mit dessen Ecken verbinden, d. h. für jenen Durchschnittspunct ist die Summe der Quadrate seiner Verbindungslinien mit den Ecken ein minimum.

242. In jedem Vierecke ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der die Halbirungspuncte je zweier Gegenseiten verbindenden Geraden derjenige, für welchen die Summe der Quadrate seiner Verbindungslinien mit den Ecken ein minimum ist.

243. Wenn man aus der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks nach dessen Grundlinie oder ihrer Verlängerung eine Gerade so zieht, daß sie mit ihr einen Winkel von $\frac{2}{3}$ R oder $\frac{4}{3}$ R bildet, so stehen diese Transversale und die durch sie gebildeten zwei Segmente der Grundlinie stets in einer solchen Beziehung zu einander, daß die größte dieser drei Linien so groß ist als die beiden andern zusammen genommen.

A. 183.

244. Schneidet man auf jeder Seite eines beliebigen Vielecks von jedem ihrer Endpuncte aus den $n$ten Theil ihrer eignen Länge ab, und verbindet alle diese Durchschnittspuncte mit einem beliebigen Puncte in der Ebene des Vielecks, so ist die Summe der Quadrate der ersten, dritten, fünften ꝛc. dieser Verbindenden gleich der Quadratsumme der zweiten, vierten, sechsten ꝛc.

245. Nimmt man innerhalb eines Vielecks zwei beliebige Puncte und verbindet jeden sowohl mit allen Ecken als auch mit den Halbirungspuncten aller Seiten, so ist die Summe der Quadrate der Geraden, die man von dem einen Puncte nach den Ecken und von dem andern nach den Halbirungspuncten der Seiten gezogen hat, so groß als die Quadratsumme aller übrigen Verbindenden.

Frage: Können beide Puncte, oder doch einer auch außerhalb des Vierecks oder in dessen Umfange genommen werden?

246. Verlängert man in einem Paralleltrapez (ABCD Fig. 52) die beiden nicht parallelen Seiten bis zum gegenseitigen Durchschnittspunct (E) und verbindet denselben mit dem Durchschnittspuncte der Diagonalen (F), so halbirt diese Verbindende stets die beiden parallelen Seiten.

FK ∥ AD, FJ ∥ BC, DL ∥ EH.

△ BJC = △ AKD; △ EJC = △ EKD; △ EFC = △ EFD, △ EFC = △ EFL.

247. Zieht man von einem beliebigen Puncte (B) auf einem der Schenkel (MA) eines beliebigen Winkels (MAN Fig. 53) nach dem andern Schenkel ein Paar beliebiger Geraden (BD, BE) und mit ihnen zwei Parallelen (CF, CG) von einem beliebigen Puncte (C) des zweiten Schenkels nach dem ersten, so sind die beiden Geraden (FD, GE) welche die Endpuncte von je zwei solchen dieser vier Linien, die nicht parallel sind, verbinden, stets einander parallel.

248. Laufen von einem Puncte (A Fig. 54) drei beliebige Gerade (AB, AC, AD) aus, und man zieht von zwei beliebigen Puncten der einen (AB) ein Paar beliebiger Parallelen (BG, EF) nach einer der beiden andern (AC) und von den so erhaltenen Durchschnittspuncten (F, G) ein Paar beliebiger Parallelen (FJ, GH) nach der dritten (AD) und verbindet nun diese beiden letzten Durchschnittspuncte (J, H) mit den auf der erstern Linie angenommenen Puncten (E, B), so sind auch diese beiden Geraden stets parallel.

Man ziehe EK ∥ FJ und JL ∥ AB, so ist:
KM ∥ AC — △ EBJ = △ EBL = △ ELM = △ EON = △ EKN — △ EOK = △ EKH — △ EKJ = △ EHJ.

249. Erklärung. Der nöthigen Kürze halber wollen wir in den unmittelbar folgenden Lehrsätzen Seite eines Vielecks jede Linie nennen, die irgend zwei seiner Ecken verbindet, dagegen die gewöhnlich so genannten Seiten mit dem besondern Namen Umfangsseiten belegen.

250. Verbindet man in einem Fünfeck jede Ecke mit den Halbirungspuncten der drei nicht anliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate von allen ersten und dritten dieser Halbirenden um $\frac{5}{4}$ der Quadratsumme der Umfangsseiten größer als die Summe der Quadrate der übrigen Halbirenden.

Anmerkung. Man vergleiche diesen Satz mit dem frühern A. 218, und beantworte die Frage: in wiefern der vorstehende eine Verallgemeinerung von jenem ist?

251. Verbindet man in einem Siebeneck jede Ecke mit den Halbirungspuncten der nicht anliegenden fünf Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate aller ersten, dritten, und fünften Halbirenden um $\frac{7}{4}$ von der Quadratsumme der Umfangsseiten größer als die Summe der Quadrate der übrigen Halbirenden, d. h. aller zweiten und vierten.

252. Allgemein wenn man in einem Vieleck von ungerader Eckenzahl jede Ecke mit den Halbirungspuncten aller nicht anliegenden Umfangsseiten verbindet, so ist die Summe der Quadrate aller derjenigen unter diesen Halbirenden, deren Stellenzeiger ungerade sind, um $\frac{n}{4}$ von der Quadratsumme aller Umfangsseiten größer als die Summe der Quadrate aller übrigen Halbirenden, d. h. derjenigen, deren Stellenzeiger gerade sind.

253. Verbindet man in einem Viereck jede Ecke mit den Halbirungspuncten der beiden nicht anliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate aller ersten Halbirenden gleich der Summe der Quadrate aller zweiten.

254. Wenn man in einem Sechsecke jede Ecke mit den Halbirungspuncten der vier nicht anliegenden Umfangsseiten verbindet, so ist die Summe der Quadrate aller ersten und dritten Halbirenden gleich der Summe der Quadrate aller zweiten und vierten.

255. Allgemein, wenn man in einem Vielecke von gerader Eckenzahl jede Ecke mit den Halbirungspuncten aller nicht anliegenden Umfangsseiten verbindet, so ist die Summe der Quadrate aller derjenigen Halbirenden, deren Stellenzeiger ungerade sind, gleich der Summe der Quadrate derer, die gerade Stellenzeiger haben.

256. Verbindet man jede Ecke eines Vierecks mit den Halbirungspuncten aller nicht anliegenden Seiten (A. 249), so ist die Summe der Quadrate aller dieser Linien anderthalb mal so groß als die Quadratsumme aller Seiten.

Anmerkung. Man vergleiche damit den frühern Satz A. 218.

257. Die Summe der Quadrate aller der Linien, welche man erhält, indem man jede Ecke eines Fünfecks mit den Halbirungspuncten aller nicht anliegenden Seiten verbindet, ist $\frac{9}{4}$ Mal so groß als Quadratsumme aller Seiten der Figur.

258. Verbindet man in einem Sechsecke jede Ecke mit den Halbirungspuncten aller nicht anliegenden Seiten, so ist die Summe der Quadrate aller dieser Verbindenden dreimal so groß als die Summe der Quadrate aller Seiten des Sechsecks.

259. Allgemein, wenn man in einem neck, jede Ecke mit den Halbirungspuncten aller nicht anliegenden Seiten verbindet, so ist die Quadratsumme aller dieser Verbindenden (n — 2) mal so groß als die Quadratsumme, welche $\frac{3}{4}$ von der Summe der Quadrate aller Seiten des Vielecks ist.

260. Verbindet man in einem Vierecke die Halbirungspuncte von je zwei zugeordneten Seiten, so ist die Summe der Quadrate dieser Verbindenden viermal so klein als die Quadratsumme aller Seiten.

261. Wenn man in einem beliebigen Fünfeck den Halbirungspunct jeder Seite mit den Halbirungspuncten aller derjenigen unter den übrigen Seiten verbindet, die mit der erstern keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben, so ist die Summe der Quadrate aller dieser Verbindenden, $\frac{5}{4}$ von der Quadratsumme aller Seiten.

262. Wenn man den Halbirungspunct jeder Seite eines Sechsecks mit den Halbirungspuncten aller derjenigen unter den übrigen Seiten verbindet, die mit der erstern keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben, so ist die Summe der Quadrate dieser Verbindenden anderthalb mal so groß als die Quadratsumme aller Seiten.

263. Allgemein ist die Summe der Quadrate der Linien, die man dadurch erhält, daß man den Halbirungspunct einer jeden Seite eines necks mit den Halbirungspuncten aller derjenigen unter den übrigen Seiten verbindet, welche mit der erstern keinen ge-

meinschaftlichen Endpunct haben, $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ mal so groß als der vierte Theil der Quadratsumme aller Seiten.

264. Verbindet man in einem Vierecke die Halbirungspuncte je zwei solcher Seiten, die einen gemeinschaftlichen Endpunct haben, so ist die Summe der Quadrate dieser Linien halb so groß als die Quadratsumme aller Seiten und mithin doppelt so groß als die Summe der Quadrate der Linien, welche die Halbirungspuncte je zweier Gegenseiten verbinden.

265. Verbindet man in einem Fünfeck die Halbirungspuncte sowohl je zwei solcher Seiten, die einen gemeinschaftlichen Endpunct haben, als auch von je zwei unter denjenigen, die keinen haben, so ist die Quadratsumme der erstern Verbindenden gleich der Quadratsumme der letztern.

266. Die Summe der Quadrate aller Linien, welche die Halbirungspuncte je zweier von derselben Ecke auslaufender Seiten eines Sechsecks verbinden, ist so groß als die Quadratsumme aller Seiten.

267. Allgemein ist die Summe der Quadrate aller Linien, welche in einem neck die Halbirungspuncte je zweier von derselben Ecke auslaufender Seiten verbinden $(n-2)$ mal so groß als der vierte Theil der Quadratsumme aller Seiten.

268. Verbindet man in einem neck die Halbirungspuncte sowohl von je zwei Seiten, die keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben, als auch von je zwei solchen, die von derselben Ecke auslaufen, so ist die Quadratsumme der erstern Classe von Verbindenden $\frac{n-3}{2}$ mal so groß als die Quadratsumme der zweiten Classe.

269. In jedem Vielecke ist die Summe der Quadrate aller Linien, welche jede Ecke mit den Halbirungspuncten aller nicht anliegenden Seiten verbinden, dreimal so groß als die Quadratsumme der Linien, welche die Halbirungspuncte je zweier von derselben Ecke auslaufender Seiten verbinden.

270. Damit in einem Vielecke die Summe der Quadrate der Linien, welche die Halbirungspuncte von je zweien, keinen gemeinschaftlichen Endpunct habenden, Seiten verbinden, n mal so groß sei als die Quadratsumme derer, welche die Halbirungspuncte von je zweien, von derselben Ecke auslaufenden, Seiten verbinden, muß die Anzahl der Ecken $2n+3$ betragen.

Aufgaben.

271. Ein Viereck zu construiren, in welchem alle drei Paare der zugeordneten Seiten (verlängert) sich unter rechten Winkeln schneiden.

272. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß die Grundlinien beider zwar auf derselben geraden Linie liegen sich aber um irgend eine gegebene Länge von einander unterscheiden.

273. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß die Grundlinien beider auf derselben Geraden liegen und ihre Höhen sich um eine gegebene Länge von einander unterscheiden.

274. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, in welchem sowohl die Grundlinie als einer der an ihr liegenden Winkel vorgeschriebene Größe haben.

275. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, in welchem sowohl die Höhe, als einer der an der Grundlinie liegenden Winkel vorgeschriebene Größe haben.

276. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkeliges zu verwandeln, in welchem die Grundlinie eine vorgeschriebene Länge hat.

277. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkeliges von vorgeschriebener Höhe zu verwandeln.

278. Ein Parallelogramm durch eine gerade Linie zu halbiren, welche einer gegebenen Geraden parallel läuft.

279. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, in welchem beide Paare der Gegenseiten vorgeschriebene Länge haben.

280. Ein ungleichseitiges Parallelogramm in ein gleichseitiges zu verwandeln.

281. Ein Parallelogramm zu construiren, das einem von zwei gegebenen Parallelogrammen an Inhalt, dem andern an Umfang gleich ist.

Frage: Ist die Auflösung dieser Aufgabe unter allen Umständen, d. h. bei jeder beliebigen Beschaffenheit der beiden gegebenen Parallelogramme möglich?

282. Wenn eine beliebige Menge beliebiger Vielecke gegeben ist, ein Rechteck zu construiren, welches $\frac{m}{n}$ vom Flächenraume des einen, $\frac{m'}{n'}$ von dem des zweiten, $\frac{m''}{n''}$ von dem des dritten Vielecks u. s. w. in sich faßt.

283. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie mit der des gegebenen eine einzige gerade Linie bildet, und dessen Spitze mit einem gegebenen Puncte zusammenfällt.

A. 192.

Frage: Macht es einen wesentlichen Unterschied, ob die Spitzen beider Dreiecke auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, welche die Grundlinien bilden?

284. Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einer der Ecken auslaufen.

285. Ein Dreieck durch Linien, die von einer seiner Ecken auslaufen, in eine beliebige Anzahl von Stücken zu theilen, welche ein beliebiges Größenverhältniß zu einander haben, z. B. in fünf Stücke, so daß das zweite das Dreifache des ersten, das dritte das Zweifache des zweiten, das vierte viermal so groß als die drei ersten zusammen genommen, und das letzte zehnmal so klein als die vier ersten zusammen genommen.

286. Ein Vieleck durch Linien, die von einer seiner Ecken auslaufen, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

287. Ein Vieleck durch Linien, die von einer der Ecken auslaufen, in eine beliebige Anzahl von Stücken zu zerlegen, die ein vorgeschriebenes Größenverhältniß zu einander haben.

288. Wenn auf einer der Seiten eines Dreiecks ein Punct gegeben ist, durch ihn eine Gerade so zu ziehen, daß durch dieselbe das Dreieck halbirt wird.

289. Ein Vieleck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen durch Linien, die von einem Puncte auslaufen, der auf einer seiner Umfangsseiten liegt.

Frage: In wiefern kann diese Aufgabe als ein besonderer Fall der vorvorigen (288) angesehen werden?

290. Ein Dreieck zu halbiren durch eine Gerade, welche durch einen innerhalb des Dreiecks gegebenen Punct geht.

291. Ein Vieleck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen durch Linien, die von einem Puncte innerhalb desselben auslaufen.

292. Ein Vieleck durch Linien, welche von einem beliebigen Puncte innerhalb desselben auslaufen, in eine beliebige Menge von Stücken zu theilen, welche ein vorgeschriebenes Größenverhältniß zu einander haben.

293. Wenn zwei begränzte gerade Linien (AB, CD Fig. 55) und eine unbegränzte (MN) gegeben sind, auf letzterer den Punct (X) zu finden, der, mit den Endpuncten der beiden andern Geraden verbunden, zwei gleichflächige Dreiecke (XAB, und XCD) giebt.

AB = EG, CD = EF.

294. Den Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes zu führen nach Anleitung von Fig. 56.

295. Dasselbe zu thun nach Anleitung von Fig. 57.

296. Dasselbe zu thun nach Anleitung von Fig. 58.

297. Dasselbe zu thun nach Anleitung von Fig. 59.

298. Dasselbe zu thun nach Anleitung von Fig. 60.

299. Dasselbe zu thun nach Anleitung von Fig. 61.

300. Dasselbe zu thun nach Anleitung von Fig. 62.

Drittes Buch.

Ueber Verhältnisse und Proportionen.

Einleitung.

119. **Erklärung.** Wenn eine Größe mehreremal genommen, oder mit andern Worten, wenn eine Größe dadurch, daß man sie mit einer (ganzen) Zahl multiplicirt, einer zweiten Größe gleich wird, so ist sie ein genauer oder aliquoter Theil (pars aliquota) dieser zweiten; sie ist dagegen ein nicht genauer Theil (pars aliquanta) der zweiten, wenn sie ein= oder mehreremal genommen dieser nicht gleich kömmt, sondern kleiner als dieselbe bleibt, und wenn man sie nun noch einmal mehr nimmt, größer wird.

Eucl. V, Erkl. 1. Man sehe über diese und alle folgenden Erklärungen dieses Buches die Anmerkungen von König.

Anmerkung. Es heißt absichtlich „eine Größe" und nicht blos „eine Zahl", da eine kleinere Linie eben so gut ein genauer Theil von einer größern Linie sein kann, oder ein kleinerer Kreis von einem größern, oder ein kleineres Gefäß von einem größern, wie dieß eine Zahl von einer andern ist. 1, 2, 5 sind genaue, 3, 4, 7, 8, 9 nicht genaue Theile von 10.

120. **Erklärung.** Eine Größe heißt ein Vielfaches (multiplum) einer andern, wenn diese letztere ein genauer Theil von ihr ist, oder, wie man auch zu sagen pflegt, wenn diese letztere sie mißt.

So ist z. B. 10 ein Vielfaches von 1, 2, und 5; aber nicht von 3, 6, 7, 8, 9.

Eucl. V, Erkl. 2, und VII, Erkl. 5.

Anmerkung. Von den Benennungen doppelt, dreifach rc. Hälfte, Drittel rc.

121. **Erklärung.** Zwei (oder mehrere) Größen heißen gleichvielfache (aequimultipla) von zwei (oder mehrern) andern, wenn sie diese letztere gleich vielmal in sich fassen, jede nämlich die Größe, von der sie das Vielfache ist.

So sind z. B. 20, 40 und 60 Gleichvielfache von 4, 8 und 12, oder von 5, 10 und 15, oder von 10, 20 und 30; aber sie sind es nicht von 5, 8 und 20.

122. **Erklärung.** Man nennt Potenzen einer Zahl diejenigen Zahlen, die man dadurch erhält, daß man jene erstere Zahl ein=, zwei=, dreimal u. s. f. mit sich selbst multiplicirt.

Man erhält namentlich die zweite Potenz einer Zahl, auch Quadrat oder Quadratzahl genannt, wenn man diese Zahl einmal durch sich selbst multiplicirt; die dritte Potenz, auch

Würfel, oder Cubus, oder Cubikzahl genannt, wenn man sie zweimal, die vierte, wenn man sie dreimal u. s. f. mit sich selbst multiplicirt.

So sind z. B. 4, 8, 16, 32 der Reihe nach die zweite, dritte, vierte und fünfte Potenz von zwei; 36 ist die zweite und 216 die dritte Potenz von 6.

Anmerkung 1. Wir werden später, in dem vierten (203, Z. 5.) und eilften Buche (450, Z. 2—4) sehen, warum die zweiten und dritten Potenzen auch Quadrate und Würfel oder Cuben genannt werden.

Euclides sagt in der 17ten und 18ten Erklärung seines 7ten Buches: „eine Quadratzahl ist eine aus der Multiplication zweier gleichen Zahlen, und eine Cubikzahl eine aus der Multiplication dreier gleichen Zahlen entstandene Zahl."

Alle Zahlen, wie z. B. 10 oder 12, die diese Eigenschaft nicht haben, heißen Nichtquadrat- oder Nichtcubik-Zahlen.

Anmerkung 2. Man kann erste Potenz einer Zahl die Zahl selbst d. h. die Zahl multiplicirt durch Eins nennen. Die Potenzen kann man, anstatt durch die Multiplication selbst, wie a. 1, a. a, a. a. a, a. a. a. a, ꝛc., was lästig ist, durch Exponenten anzeigen, welche angeben, wie oft die Zahl als Factor vorhanden, und demnach die wievielte Potenz es sein soll. So bezeichnen

$$a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \text{ ꝛc.}$$

die erste, zweite, dritte, vierte, fünfte ꝛc. Potenz von a.

Anmerkung 3. Hieraus folgt:

1) daß, wenn man Potenzen einer Zahl durch Potenzen eben dieser Zahl multiplicirt oder dividirt, der Exponent des Produktes oder Quotienten die Summe oder der Unterschied der Exponenten sein wird; so daß $a^3 . a^4 = a^{3+4} = a^7$; und $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$ ist.

2) daß man eine Division durch eine Potenz dadurch anzeigen kann, daß man dem Exponenten das Zeichen der Subtraction (—) vorsetzt; z. B. für $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$ ꝛc. setzt man a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} ꝛc.

3) daß die nullte Potenz einer Zahl stets die Einheit selbst ist; da $1 = \frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$, so daß man jederzeit für 1 die nullte Potenz einer beliebigen Zahl setzen kann.

Anmerkung 4. Es ist hier der Ausdruck Zahl und nicht Größe gebraucht worden, darum weil das Potenziren in einem eigentlichen Multipliciren besteht, und demnach nur auf Zahlen angewandt werden kann. Denn man kann wohl sagen: 4 multiplicirt durch 4, und die so entstehende Zahl bestimmen, aber man kann niemals eine Linie durch eine Linie, und eben so wenig einen Kreis durch einen Kreis multipliciren. Spricht man gleichwohl zuweilen von der Multiplication zweier Linien ꝛc., oder deutet dieselbe in Zeichen an, so geschieht dieß nur der Kürze halber und man bezeichnet allezeit stillschweigend dadurch die Zahl, welche die Größe der einen Linie oder des einen Kreises darstellt multiplicirt durch die Zahl, welche die Größe der andern Linie oder des andern Kreises ausdrückt.

123. Erklärung. Man nennt Wurzeln einer Zahl diejenigen Zahlen, die, wenn man sie mit sich selbst multiplicirt, jene erstere Zahl zum Produkte geben; und zwar zweite oder Quadrat-Wurzel, dritte oder Cubik-Wurzel, vierte, fünfte ꝛc. Wurzel, die Zahlen, welche ein-, zwei-, drei-, viermal ꝛc. mit sich selbst multiplicirt werden müssen, um als Product die in Rede stehende Zahl zu geben.

So ist z. B. 5 die zweite oder Quadrat-Wurzel von 25, die dritte oder Cubik-Wurzel von 625, die vierte von 3125 u. s. w.

Anmerkung 1. Für die Wurzeln hat man das Zeichen $\sqrt{\;}$; eine in dasselbe hineingeschriebene Zahl zeigt an, von welchem Grade die bezeichnete Wurzel sein soll. So bezeichnen $\sqrt[2]{a}$, (wofür man noch gewöhnlicher blos $\sqrt{a}$ schreibt), $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$ 2c., die zweite, dritte, vierte, fünfte 2c. Wurzel von a. Darnach ist also $4 = \sqrt[3]{64}$, weil 4 zweimal mit sich selbst multiplicirt werden muß, um das Product 64 zu erhalten.

Anmerkung 2. Exponenten können wie zur Bezeichnung der Potenzen, eben so auch zur Bezeichnung der Wurzeln gebraucht werden; aber sie können alsdann nur Brüche sein. So kann man z. B. $\sqrt[3]{a}$ auch durch $a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{a}$ durch $a^{\frac{1}{4}}$ 2c. ausdrücken; denn es ist a oder $a^1 = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1$.

124. Erklärung. Gleichartige Größen nennt man diejenigen, welche so beschaffen sind, daß ein Vielfaches der kleinern die größere erreichen oder übertreffen kann; oder auch: gleichartige Größen sind solche, die aus derselben Art von Einheiten bestehen.

Beispiel. Linien sind untereinander gleichartig, eben so Parallelogramme; nicht minder ist Woche gleichartig mit Stunde, darum weil eine gewisse Menge von Stunden eine Woche ausmachen können. Aber Linie, Parallelogramm und Woche sind unter einander ungleichartig.

125. Erklärung. Commensurable Größen oder Zahlen heißen diejenigen, welche ein *gemeinschaftliches Maaß* haben; sei es nun, daß *die kleinere selbst das Maaß der größern* d. h. ein genauer Theil von ihr ist, oder daß *eine dritte Größe das Maaß* d. h. ein genauer Theil von beiden ist.

Eucl. X, Erkl. 1.

Anmerkung 1. Mit Vorbedacht heißt es in der Erklärung „Größen oder Zahlen" weil das Gesagte auf alle Größen anwendbar ist. Ein Loth, ein Pfund, ein Centner sind zu einander commensurabel, eben so Minute, Stunde, Tag, Woche 2c.

Zus. 1. Alle Brüche sind zu einander commensurabel; da man sie stets auf einerlei Benennung bringen kann.

Zus. 2. Für alle Zahlen von gleicher Einheit ist diese, sie sei absolut oder relativ, das gemeinschaftliche Maaß.

Anmerkung 2. Die absolute Einheit ist die Einheit aller der Zahlen, die man gewöhnlich mit dem Ausdrucke unbenannte Zahlen bezeichnet; relative Einheiten finden Statt bei benannten Zahlen. Sage ich also schlechthin: Hundert, Tausend 2c. so ist die Einheit dieser Zahlen die absolute; sage ich hingegen, 20 Eimer, 20 Ruthen, 20 Fuß, so haben diese Zahlen relative Einheiten; denn sie beziehen sich auf etwas Bestimmtes, wie hier auf die bestimmten Begriffe: Eimer, Ruthe, Fuß. — Zwanzig Ruthen, und zwanzig Fuß sind, obschon sie gleich viel Einheiten in sich fassen, der Größe nach doch sehr verschieden, darum weil die Einheit der einen Ruthe, zwölfmal so groß ist, als die Einheit der andern, Fuß.

Anmerkung 3. Die Betrachtung der Zahlen, die ein gemeinschaftliches Maaß haben, hat in der Arithmetik zu dem Verfahren geführt, das größte gemeinschaftliche Maaß, oder den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier (oder mehrerer) Zahlen zu finden. Dieß Verfahren ist auf jede Gattung von Größen anwendbar; denn es gründet sich lediglich auf Division; Division ist nichts anders, als eine wiederholte Subtraction, und begreiflich kann man eben so leicht z. B. bei zwei Linien untersuchen, wie oft die eine von der andern sich wegnehmen läßt d. h. in dieser letztern enthalten ist, als bei zwei Zahlen. Wir wollen daher das Verfahren auf Linien anwenden und so seine Richtigkeit nachweisen.

Man soll das gemeinschaftliche Maaß der Linien DG und AB (Fig. 83) finden.

Man ziehe AB so oft von DG ab, als es möglich ist, d. h. man dividire DG

durch AB. Geht AB genau in DG auf, so ist AB selbst das größte gemeinschaftliche Maaß; geht es nicht genau auf, so bleibe EG als Rest.

Man ziehe nun EG so oft als möglich von AB ab, d. h. man dividire AB durch EG, es bleibe dabei als Rest AZ.

Man ziehe AZ so oft als möglich von EG ab, und es bleibe nun nichts übrig, so muß

1) AZ das gemeinschaftliche Maaß von DG und AB, und zwar
2) das größte gemeinschaftliche Maaß dieser beiden Linien sein.

Denn

1) AZ geht nach Voraussetzung auf in EG, mithin auch in BZ, und in BZ + AZ d. i. in BA. BA geht aber auf in DE, also geht auch AZ in DE auf, und folglich auch in DE + EG d. i. DG, also ist AZ gemeinschaftliches Maaß der Linien DG und AB. Aber es ist auch
2) AZ das größte gemeinschaftliche Maaß der genannten Linien. Denn gesetzt, es könnte eine Linie, wie z. B. H, die größer als AZ, gemeinschaftlicher Theiler von DG und AB sein, so müßte H, weil sie in AB aufgeht, auch in DE aufgehen, und daher, da sie nach Voraussetzung in DG aufgeht, auch in DG — DE d. i. in EG aufgehen, also auch in BZ, und, da sie in AB aufgeht, auch in BA — BZ d. i. in AZ; also müßte die Linie H, die größer als AZ ist, ein genauer Theil von AZ sein, was offenbar ungereimt ist, es kann also unmöglich ein größeres gemeinschaftliches Maaß zwischen DG und AB geben als AZ.

Dieser Satz ist bei Euclides der 3te im 10ten Buche, und ist der Beweis von dort entlehnt.

126. Erklärung. Größen, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, d. h. von denen die größere weder ein Vielfaches von der kleinern selbst noch ein Vielfaches von einem genauen Theile derselben ist, heißen incommensurabel.

Eucl. X, Erkl. 2.

Anmerkung 1. Der Gedanke, daß es gleichartige Größen geben solle, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, hat im ersten Augenblicke etwas Befremdendes; wir müssen daher an Beispielen nachweisen, daß es in der That solche Größen giebt, und dadurch zugleich den Begriff derselben näher entwickeln. Zu diesem Ende ist es nöthig, folgende aus Eucl. X, 2. entlehnte Betrachtung, vorausgehen zu lassen.

„Wenn man von zwei gegebenen ungleichen Größen die kleinere von der größern so oft als möglich abzieht, den Rest auf eben die Weise von der kleinern, den zweiten Rest vom ersten, den dritten vom zweiten u. s. f. und man dabei immer wieder einen Rest bekömmt, so sind diese beiden Größen zu einander incommensurabel."

Man untersuche also, wie 125, Anm. 4, wie vielmal BA (Fig. 84) in DG aufgeht; es bleibe dabei als Rest EG; man sehe zu, wie oft EG in AB aufgeht; es bleibe dabei als Rest AZ; nun suche man, wie oft AZ in EG aufgeht: der jetzt bleibende Rest sei JG u. s. f., und es bleibe, wie weit man diese Operation auch fortsetzen möge, immer wieder ein Rest, so wird behauptet, wären DG und AB zu einander incommensurabel oder hätten kein gemeinschaftliches Maaß. Denn wäre dem nicht also, so sei L ihr gemeinschaftliches Maaß. Alsdann müßte man, weil EG als Rest, der bleibt, nachdem AB ein- oder mehreremal von DG weggenommen worden, kleiner ist als AB, und aus gleichem Grunde AZ kleiner als EG, JG kleiner als AZ u. s. f., offenbar zuletzt zu einem Reste wie JG kommen, der kleiner wäre, als die Linie L.

Weil nun nach Voraussetzung L in AB aufgeht, so geht es auch in DE auf; nach Voraussetzung aber auch in DG, mithin auch in DG — DE d. i. EG. Eben so muß L, weil es sowohl in BA als BZ aufgeht, auch in BA — BZ d. i. in AZ aufgehen. Nun geht aber AZ in EJ auf, also auch L, und weil L nach Voraussetzung in EG aufgeht, so muß es auch in EG — EJ d. i. in JG aufgehen; was offenbar ungereimt ist, da L > JG; es ist also unwahr, daß L das gemeinschaftliche Maaß der Linien DG, AB ist, sie haben mithin kein solches Maaß, d. h. sie sind zu einander incommensurabel.

Anmerkung 2. Dieß vorausgeschickt, wird es nicht schwer werden, zu beweisen: daß die Diagonale und Seite eines Quadrates zu einander incommensurabel sind. Wir wollen dieß geometrisch thun und aus den einfachsten Sätzen herleiten.

1) Es sei (Fig. 85) ABLC das Quadrat über AC, so ist (87) $BC_q = AB_q +$

$AC_q = 2AC_q$; das Quadrat über der Diagonale und über der Seite sind also zwei zu einander commensurable Quadrate.

2) Nach S. 43 ist $BC < AB + AC$ oder < 2 AC, zieht man also AC von BC ab, so ist der Rest $< AC$, es sei derselbe, den wir den ersten nennen wollen, DC.

3) Aus S. 62 weiß man, daß, wenn DE senkrecht auf BC, $DE = AE = DC$. Aber in $\triangle$ EDC ist $EC < ED + DC$ oder < 2 ED oder 2 AE, und daher muß, wenn man $AE = EF$ macht, AE oder der erste Rest zweimal von AC sich wegnehmen lassen und dabei als zweiter Rest FC bleiben.

4) Zieht man FJ senkrecht auf FC und überdieß FD, so ist (62) $DJ = FJ = FC$, und wenn $JG = JF$ gemacht wird, so geht also FC zweimal in DC auf, indem als dritter Rest GC bleibt. Errichtet man das Perpendikel GH auf GC, so wird dieser dritte Rest wieder die Seite eines Quadrates, dessen Diagonale HC ist.

5) Man erhält also durch die fortgesetzte Subtraction immer einen Rest, der eine Quadratseite ist, nämlich: BC Diagonale AC Seite; DC, erster Rest, Seite, EC Diagonale, FC, zweiter Rest, Seite, JC Diagonale, GC, dritter Rest, Seite, HC Diagonale; woraus man deutlich sieht, daß, wenn man auf diesem Wege auch noch so weit fortgeht, man doch immer einen Rest behalten wird, daß also AC und BC als Seite und Diagonale eines Quadrates kein gemeinschaftliches Maaß haben, d. h. daß sie zu einander incommensurabel sind.

Anmerkung 3. Der Satz, daß die Diagonale eines Quadrates zu dessen Seite incommensurabel, ist schon von Euclides X, 117, auf eine andere, aber doch auch ganz geometrische Weise bewiesen. Im 4ten, 5ten, 6ten und 8ten Buche werden sich uns noch mehr Beispiele incommensurabler Größen darbieten. Wenn man eine derselben durch eine Zahl ausdrückt, so läßt sich die andere durch keine Zahl darstellen, da ja zwei Zahlen stets einen gemeinschaftlichen Theiler, nämlich die Einheit, haben. Freilich lassen sich Zahlen finden, welche diese zweite incommensurable Größe näherungsweise darstellen, und man kann sogar diese Näherung *stets bis zu jedem beliebigen Grade* steigern; aber dennoch *stellt eine solche Zahl niemals völlig genau den Werth der in Rede stehenden Größe dar.*

Das in der vorigen Anmerkung angewandte Verfahren kann zur Erläuterung des Gesagten dienen. Man fand, daß AC sich einmal von BC wegnehmen lasse, und als Rest CD bleibe, also arithmetisch ausgedrückt $BC = 1 + \frac{CD}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CD}}$. CD läßt sich, wie wir sahen, zweimal von AC wegnehmen, und es bleibt als Rest FC, also es ist

$$\frac{AC}{CD} = 2 + \frac{FC}{DC} = 2 + \frac{1}{\frac{CD}{FC}}, \text{ also}$$

$$BC = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{CD}{FC}}}, \text{ aber } \frac{CD}{FC} = 2 + \frac{GC}{FC} = 2 + \frac{1}{\frac{FC}{GC}}, \text{ also}$$

$$BC = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{FC}{GC}}}}, \text{ aber } \frac{FC}{GC} \text{ und eben so alle folgenden dieser}$$

Brüche haben, wenn man den jedesmaligen Rest ϱ den Divisor D nennt, den Werth $2 + \frac{\varrho}{D}$. Setzt man also die Quadratseite $= 1$, so ist die Diagonale

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2} \ldots}}}$$

d. h. sie wird durch einen Kettenbruch ausgedrückt, welchen man beliebig weit fortführen kann.

Je mehr Glieder man diesem Bruche giebt, desto näher kömmt man der Wahrheit.

Die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite = 1 ist, würde sein, wenn man von unserm Kettenbruche nähme

1 Bruch	$= 1\frac{1}{2}$	$= 1{,}5$	zu groß.
2 Brüche	$= 1\frac{2}{5}$	$= 1{,}4$	zu klein.
3 Brüche	$= 1\frac{5}{12}$	$= 1{,}41667$	zu groß.
4 Brüche	$= 1\frac{12}{29}$	$= 1{,}41379$	zu klein.
5 Brüche	$= 1\frac{29}{70}$	$= 1{,}414285$	zu groß.
6 Brüche	$= 1\frac{70}{169}$	$= 1{,}414201$	zu klein.
7 Brüche	$= 1\frac{169}{408}$	$= 1{,}414216$	zu groß.
8 Brüche	$= 1\frac{408}{985}$	$= 1{,}4142131$	zu klein.
9 Brüche	$= 1\frac{985}{2378}$	$= 1{,}4142136$	zu groß.

Man sieht also, daß nach dem 7ten Bruche die Ungenauigkeit nur noch wenige Milliontel, und mit dem 9ten Bruche gar nur noch einige Zehnmilliontel beträgt.

Anmerkung 4. In der Bestimmung des Begriffes der Incommensurabilität ist mit Vorbedacht gesagt worden, incommensurable Größen und nicht Zahlen, da, eigentlich gesprochen, es nur Größen sind, die zu einander incommensurabel, wie z. B. die Diagonale und Seite eines Quadrates, der Durchmesser und Umfang eines Kreises, verschiedene Rechtecke rc., wie man im 4ten, 6ten, 7ten und 8ten Buche sehen wird. Diese Größen, obschon incommensurabel, sind nicht nur möglich, sondern auch wirklich und können dargestellt werden. Incommensurable Zahlen im eigentlichen Sinne giebt es gar nicht, und kann es nicht geben, da jede Zahl nichts anders als ein Inbegriff von Einheiten, und eben darum durch diese Einheit theilbar ist. Es ist allerdings wahr, man gebraucht den Ausdruck incommensurabel auch wenn man von Zahlen spricht, aber nur im uneigentlichen Sinne und der Kürze halber. So ist z. B. die Quadratwurzel von einer solchen ganzen Zahl, die keine Quadratzahl ist, weder eine ganze Zahl noch ein Bruch, kann also durch keine Zahl, wie sie auch heißen möge, ausgedrückt werden. Es giebt keine Zahl, weder eine ganze noch eine gebrochene, die mit sich selbst multiplicirt 13 zum Producte brächte; die Quadratwurzel von 13 kann daher durch keine Zahl, wie sie auch beschaffen sein möge, dargestellt worden; darum nennt man diese und ähnliche Wurzeln incommensurabel. Gleichwohl stellt man dieselbe in Zeichen dar ($\sqrt{13}$), verfährt nun so damit, als ob es Zahlen wären, und nennt sie eben deshalb incommensurable Zahlen, aber sehr uneigentlich. Denn wenn man auch solche Wurzeln darstellen kann, wie z. B. durch Linien ($\sqrt{13}$ ist Diagonale eines Rechtecks, dessen eine Seite 2, und die andere 3 ist), so kann dieß doch niemals durch eine Zahl geschehen. Man kann wohl eine Zahl finden, die sich einer solchen bis zu jedem beliebigen Grade nähert, aber niemals eine, die ihr absolut gleich kömmt. Wenn man demnach von incommensurabeln Zahlen spricht, die man in Zeichen darstellt, so spricht man nicht von dem, was sie sind — denn sie sind nichts und nicht vorhanden — sondern von dem, was sie sein würden, wenn man sie durch Zahlen ausdrücken könnte, was unmöglich ist.

Anmerkung 5. Wir haben in der vorhergehenden Anmerkung gesagt, daß man die Wurzeln von ganzen Zahlen, wenn sie keine ganzen Zahlen sind, überhaupt durch keine Zahl darstellen kann; und daß mithin diese Wurzeln in Beziehung auf die zugehörigen Zahlen vollkommen incommensurabel sind.

Denn gesetzt es sei a eine Zahl, deren Quadrat a^2 kleiner ist als eine Zahl, die keine Quadratzahl ist, inzwischen doch hier mit A^2 bezeichnet werden soll, also $a^2 < A^2$, dagegen sei $(a + 1)^2 > A^2$; so ist offenbar die Wurzel von A^2 größer als a und kleiner als $(a + 1)$, also a und ein Bruch; man nehme an, es könne $a + \frac{1}{n}$ sein, so wäre $A^2 = (a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$ und weil nach Voraussetzung A^2 eine ganze Zahl ist, so müßte es auch $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$ sein. Das erste Glied a^2 ist nun stets eine ganze Zahl, das zweite $\frac{2a}{n}$ kann es sein, und in diesem Falle ist $a^2 + \frac{2a}{n}$ gleichfalls eine ganze Zahl; aber $\frac{1}{n^2}$ muß unter allen Umständen ein Bruch

sein, also auch die ganze Summe $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$ ein Bruch. Ist $\frac{2a}{n}$ ein Bruch, dann bleibt auch $\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$ oder $\frac{2na+1}{n^2}$ offenbar stets ein Bruch, da $2na+1$ schon nicht durch n, also noch viel weniger durch n^2 theilbar ist; also ist $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$ in keinem Falle eine ganze Zahl, und kann eben darum auch $a + \frac{1}{n}$ nicht die Wurzel von A^2 sein. Mit andern Worten die Potenzen von allen eigentlichen und uneigentlichen Brüchen, die sich nicht weiter heben lassen, sind Brüche, die sich gleichfalls nicht heben lassen, und daher nie auf ganze Zahlen gebracht werden können. So giebt z. B. $\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5}$ den Bruch $\frac{49}{25}$ der sich nicht heben läßt; auf ähnliche Weise verhält es sich mit $\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5}$ rc.

Sind aber die Potenzen aller Brüche wiederum Brüche, so kann offenbar eine ganze Zahl niemals einen Bruch zur Wurzel haben.

Anmerkung 6. Es giebt also Zahlen, deren Quadratwurzeln, und eben so Zahlen, deren Cubikwurzeln man in Zahlen genau darstellen kann; aber es giebt auch Zahlen, wo dieß nicht möglich ist. Die erstern heißen Quadrat- und Cubik-Zahlen. Die letztern können diesen Namen nicht erhalten; ihre Wurzeln kann man blos näherungsweise darstellen. So fällt z. B. $\sqrt{2}$ zwischen 1,414213 und 1,414214. Diese Zahlen sind dieselben, die wir oben (Anmerkung 3) für die Diagonale eines Quadrates gefunden haben; und in der That wird die Diagonale durch $\sqrt{2}$ ausgedrückt, darum, weil wie später (203, Z. 5) bewiesen werden soll, das Quadrat über einer Linie der zweiten Potenz der Zahl entspricht, welche die Länge der Linie ausdrückt.

Anmerkung 7. Sind A und B zu einander incommensurabel, und ist C ein genauer Theil von B, so daß er z. B. m mal in B aufgeht, so läßt sich immer eine Zahl n finden von der Beschaffenheit, daß $n . C < A$, aber $(n+1) C > A$, ohne daß es möglich ist eine Zahl wie $n + \frac{1}{p}$ zu finden, durch deren Multiplication mit C ein Product kömmt, welches genau gleich A wäre.

127. Erklärung. Wenn man zwei gleichartige Größen zu dem Ende mit einander vergleicht, um die Größe der einen aus der der andern unmittelbar zu bestimmen, so heißt dieß die Ausmittelung ihres Verhältnisses, und die Bestimmung selbst ist das Verhältniß, welches diese beiden Größen zu einander haben.

Man sehe vor Allem König zur dritten Erklärung im 5ten Buche des Eucl.

Anmerkung. Man kann Größen auf verschiedene Arten mit einander vergleichen, vornehmlich auf zwei. Die eine besteht darin, daß man zu erforschen sucht, wie viel mal von zwei gegebenen Größen A und B die eine B in der andern A enthalten ist; bei der andern fragt man nach dem Unterschiede zwischen A und B d. h. um wie viel (nicht wie viel mal) A größer ist als B, oder B größer als A. Die erstere Art nennt man geometrisches, die andere arithmetisches Verhältniß. Daraus entstehen geometrische und arithmetische Proportionen, und aus diesen miteinander, doch auf verschiedene Art, verbunden, harmonische Proportionen und Logarithmen. Wir wollen dieß Alles näher erklären und erörtern.

Erster Abschnitt.

Von der geometrischen Proportion.

128. Erklärung. Wenn man zwei gleichartige Größen zu dem Ende mit einander vergleicht, um zu erfahren, welch Vielfaches die eine von der andern ist, oder, was auf dasselbe hinauskömmt, wie vielmal die letztere in der erstern enthalten, oder der wie vielte Theil sie von ihr ist, so sagt man, man bestimme das geometrische Verhältniß, oder auch schlechthin das Verhältniß, das zwischen diesen beiden Größen Statt findet; so daß also das geometrische Verhältniß, oder das Verhältniß zweier Größen angiebt, wie viel mal die eine die andere in sich schließt.

Die Größen, welche das Verhältniß bilden, werden dessen Glieder genannt; und zwar heißt die, welche man zuerst nennt, Vorderglied, die zweite Hinterglied. In jedem Verhältnisse giebt es daher ein Vorderglied und ein Hinterglied.

S. Tacquet zu den Erklärungen des 5ten B. des Eucl.

Zus. Es giebt keine Größen, sobald sie nur gleichartig sind, die nicht ein bestimmtes geometrisches Verhältniß zu einander hätten.

Anmerkung 1. Es heißt in der Erklärung Größen und nicht Zahlen, da das Gesagte auf alle Arten von Größen anwendbar ist.

Anmerkung 2. Man theilt die Verhältnisse in commensurable und incommensurable; zu den erstern gehören alle diejenigen, die in Zahlen ausgedrückt werden, oder doch werden können. Incommensurabel dagegen oder irrational ist ein Verhältniß, wenn die Größen, die man vergleicht, so beschaffen sind, daß sie durch keine Zahlen dargestellt werden können. In diesem Falle kann man das Verhältniß nur in Zeichen andeuten; wie z. B. das Verhältniß von $\sqrt{2}$ zu 1. Man kann dann zwar nicht angeben, wie vielmal die eine Größe in der andern enthalten ist, aber doch die Gränzen, zwischen denen die gesuchte Zahl liegt; so ist, wie wir schon früher gesehen haben, das Verhältniß von $\sqrt{2}$ zu 1 größer als 1,414213 aber kleiner als 1,414214 rc.

L. C. §. 288.

Anmerkung 3. Man darf nicht glauben, daß, wenn man incommensurable Größen mit einander vergleicht, diese auch stets ein incommensurables Verhältniß zu einander haben müssen. Zwei Größen können ein commensurables Verhältniß zu einander haben, obschon jede für sich in Beziehung auf eine dritte Größe, z. B. die Einheit, incommensurabel ist. So ist das Verhältniß von $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{8}$, das von 1 zu 2, also commensurabel, obschon sowohl $\sqrt{2}$ als $\sqrt{8}$ in Beziehung auf die Einheit incommensurabel sind.

Anmerkung 4. Euclides giebt folgende Erklärung von Verhältniß: „Verhältniß, sagt er (in der 3ten Erklärung), ist eine gegenseitige Beziehung zwischen zwei Größen hinsichtlich ihrer Vielfachheit" und fügt in der 4ten Erklärung hinzu: „Von Größen sagt man, daß sie im Verhältnisse zu einander stehen, wenn die eine durch Vervielfachung die andere übertreffen kann." Man bemerke wohl, er sagt nicht, erreichen oder gleichkommen, weil dann die Erklärung blos auf commensurable Größen passen würde, sondern übertreffen, wodurch sie auch die incommensurablen mit in sich faßt. Bei den meisten Uebersetzern des Euclides sind die Worte κατὰ πηλικότητα wiedergegeben durch „secundum quantitatem" was unmöglich richtig ist, da die Erklärung alsdann eben so gut auf arithmetische als geometrische Verhältnisse passen würde, was Euclides nicht wollte, wie man aus seinem 7ten Buche deutlich sieht. Schon Wallis (Opp. Math. II, p. 666) hat nachgewiesen, daß πηλικότης in unserer Stelle nicht Größe, sondern Vielfachheit bedeute; in diesem Sinne nimmt auch Gregory das Wort. S. König zu diesen Stellen. Man ist ziemlich allgemein darü-

der einig, daß die in Rede stehende Erklärung des Euclides dunkel ist, und R. Simson vermuthet, daß sie nicht durch den ausgezeichneten Geometer selbst, sondern durch eine spätere unkundige Hand in den Text gekommen sei.

129. Erklärung. Anzeiger*) eines Verhältnisses heißt der Quotient, der aus der Division des Vordergliedes durch das Hinterglied wirklich hervorgeht, oder doch als aus dieser Division hervorgehend angenommen wird.

Anmerkung 1. Da das Verhältniß zweier Größen anzeigt, wie viel mal die eine in der andern enthalten ist, und eben dieß auch der Quotient thut, so ist in der That der Quotient der natürliche Anzeiger des Verhältnisses.

Anmerkung 2. Manche Schriftsteller nennen Anzeiger oder Quotient den Quotienten aus der Division nicht des Vordergliedes durch das Hinterglied, sondern des letztern durch das erstere; was natürlich auf eins hinaus kömmt, wenn man sich nur bei allen Sätzen und Beweisen in dieser Benennung gleich bleibt.

Anmerkung 3. Tacquet bezeichnet mit Nenner das was wir Anzeiger nennen. s. sein V B. 3ten Theil §. 2 und 3.

Zus. Ist das Vorderglied größer als das Hinterglied, so ist der Anzeiger eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl und ein Bruch; ist dagegen das Vorderglied kleiner als das Hinterglied, so ist der Anzeiger ein ächter Bruch. Ist der Anzeiger commensurabel, so ist es auch das Verhältniß; ist er incommensurabel, so gilt dieß von dem Verhältnisse und umgekehrt.

Anmerkung 4. Ist der Anzeiger incommensurabel, so kann er durch keine Zahl ausgedrückt, sondern nur in Zeichen angedeutet, oder durch Linien dargestellt werden, wie z. B. $\sqrt{5} : \sqrt{7}$. Und dieß ist der Grund, warum wir in der Erklärung gesagt haben, der Quotient, der . . . wirklich hervorgeht, oder als . . . . . hervorgehend angenommen wird.

Anmerkung 5. Das Verhältniß wird in Worten so ausgedrückt A zu B, und für das Wörtchen zu gebraucht man das Zeichen (:), also A : B, oder nach Leibnitz's Vorgang den bekannten, die Division bezeichnenden Strich (—), also $\frac{A}{B}$. Und in der That, da das Verhältniß anzeigt, wie viel mal die eine Größe die andere in sich faßt, so besteht es in einer Division, und man lernt es durch Ausführung dieser Division kennen.

130. Erklärung. Von zwei Verhältnissen sagt man, sie seien gleich oder dieselben, wenn ihre Anzeiger gleich sind. Das größere von zwei Verhältnissen ist dasjenige, das den größern Anzeiger hat. Haben verschiedene Größen dasselbe Verhältniß zu einander, so nennt man sie zu einander proportional; und Proportionalität findet überall da Statt, wo Gleichheit der Verhältnisse ist.

Anmerkung 1. Die Proportionalität wurde früherhin gewöhnlich durch das Zeichen :: angedeutet, also

$$A : B :: C : D$$

inzwischen da die Proportionalität in der That Gleichheit zweier Verhältnisse, und mithin Gleichheit zweier Quotienten ist, so bezeichnet man dieselbe, nach Leibnitz's Vorgange, noch besser und zweckmäßiger auf folgende Weise:

$$A : B = C : D$$

oder, was fast noch besser sein würde

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Anmerkung 2. Sind zwei Verhältnisse commensurabel, so ist es nicht schwer, über deren Gleichheit oder Ungleichheit und zwar blos aus dem Anzeiger zu urtheilen. Allein, wie soll man es anfangen, um über Gleichheit oder Ungleichheit zweier incommensura-

---

*) Viele gebrauchen statt Anzeiger den Ausdruck Exponent. Allein um alle Zweideutigkeit zu vermeiden, werden wir künftig Exponent nur bei den Potenzen der Zahlen (122 und 123) und Anzeiger ausschließlich von geometrischen Verhältnissen gebrauchen.

beln Verhältnisse zu entscheiden, da ja keines derselben in Zahlen dargestellt werden kann, und mithin auch keins genau und wirklich bekannt ist?

Man kann hierbei auf zweierlei Art verfahren. Da incommensurable Verhältnisse durch Zahlen, oder durch Linien dargestellt werden (126, Anm. 1, 2, 4), so schließt man auf ihre Gleichheit, wenn sie entweder dasselbe Zeichen zum Anzeiger haben, oder durch dieselben Linien dargestellt werden. So ist das Verhältniß $\sqrt{3} : \sqrt{6}$ gleich dem Verhältniß $1 : \sqrt{2}$ oder das $\sqrt{6} : \sqrt{8}$ gleich dem $\sqrt{3} : \sqrt{4}$, und darum sind $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 1 und $\sqrt{2}$ proportionirt, eben so $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$. Aber es giebt noch ein zweites Mittel, das noch allgemeiner und sowohl auf commensurable als incommensurable Größen anwendbar ist. Von zwei Verhältnissen, wie $A : B$ und $C : D$ darf man behaupten, daß sie gleich sind, wenn sich nachweisen läßt, daß das eine weder größer noch kleiner als das andere sein kann, indem man zeigt, daß man sowohl durch die eine als durch die andere Annahme in eine Ungereimtheit verfallen würde.

Zus. 1. Wenn vier Größen proportionirt sind, und die erste zur zweiten commensurabel ist, so ist es auch die dritte zur vierten; ist dagegen die erste zur zweiten incommensurabel, so gilt eben dieß auch von der dritten und vierten.

Beweis. Wenn $A : B = C : D$, so ist $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ und folglich, wenn $\frac{A}{B}$ eine Zahl, muß es auch $\frac{C}{D}$ sein; ist aber $\frac{A}{B}$ keine Zahl, so kann auch $\frac{C}{D}$ keine sein d. h. es ist C zu D incommensurabel.

Anmerkung 3. Dieser Zusatz bildet bei Euclides den 10ten Satz des 10ten Buches. Man übersehe nicht, daß wir gesagt haben, die erste zur zweiten rc., d. h. ihr Verhältniß ist commensurabel oder incommensurabel. Ein Verhältniß aber kann (128, Anmerk. 3) commensurabel sein, wenn auch seine einzelnen Glieder incommensurable Größen sind, wie z. B. in der Proportion $\sqrt{2} : \sqrt{8} = 1 : 2$. Man betrachtet eben dann diese incommensurablen Größen nicht für sich einzeln d. h. in Beziehung auf die Einheit, sondern die eine in Beziehung auf die andere d. h. ihr Verhältniß.

Anmerkung 4. Euclides giebt zwei Erklärungen von Gleichheit der Verhältnisse. In der einen, welche die 20te des 7ten Buches ist, sagt er: „Zahlen sind proportionirt, wenn die erste dasselbe Vielfache oder derselbe aliquote Theil von der zweiten als die dritte von der vierten ist," also ganz übereinstimmend mit unserer Erklärung von Proportionalität. Die andere, die nicht allein auf Zahlen, sondern auf alle Größen, auch die incommensurablen anwendbar ist, ist die 5te des 5ten Buches, und lautet so: „Wenn vier Größen gegeben sind, und man nimmt Gleichvielfache von der ersten und dritten und andere Gleichvielfache von der zweiten und vierten, so werden diese Größen in demselben Verhältniß stehen, namentlich die erste zur zweiten, und die dritte zur vierten, wenn in den einzelnen Fällen, wo das Vielfache der ersten größer oder eben so groß oder kleiner als das Vielfache des zweiten ist, zugleich auch und auf die entsprechende Weise das Vielfache der dritten größer, oder eben so groß, oder kleiner als das Vielfache der vierten ist, und zwar dieß allezeit, welche Vielfachen man auch nehmen möge;" und in der 6ten Erkl. fügt Euclides hinzu: „Größen die in demselben Verhältniß stehen, heißen proportionirt."

Sind also z. B. die vier Größen A, B, C, D gegeben, und man nimmt die Vielfachen mA, mC, ingleichen nB, nD, so wird $A : B = C : D$ sein, wenn, da wo $mA > nB$, auch $mC > nD$, wo aber $mA < nB$, auch $mC < nD$, und endlich wo $mA = nB$, auch $mC = nD$ ist, welche Zahlen man auch für m und n nehmen möge.

Diese Erklärung des Euclides ist allgemein, und umfaßt sowohl commensurable als incommensurable Größen. Aber sie ist nicht ganz deutlich, und vielleicht nicht aus der wahren und einfachen Natur dessen, was man ursprünglich unter Verhältniß versteht, hergenommen, s. König zu dieser Stelle. Der Gebrauch der Verhältnißzeiger oder Anzeiger der Verhältnisse macht die ganze Lehre einfacher und leichter, ohne sie weniger allgemein, als bei Euclides, zu machen. Wir werden später (146) nachweisen,

daß die Euclideische Definition aus der unsrigen, und umgekehrt unsre aus der Euclideischen hergeleitet werden kann.

Anmerkung 5. Von ungleichen Verhältnissen giebt Euclides folgende Erklärung: „Wenn man Gleichvielfache von der ersten und dritten, und andere Gleichvielfache von der zweiten und vierten Größe nimmt, und das Vielfache der ersten das der zweiten übertrifft, ohne daß das Vielfache der dritten größer ist, als das Vielfache der vierten; so ist das Verhältniß der ersten zur zweiten größer als das der dritten zur vierten. V, Erkl. 7.

Anmerkung 6. Euclides fügt noch als 8te Erklärung hinzu: „Proportionalität ist Gleichheit der Verhältnisse." Dieß würde ganz und gar mit 20ter Erkl. seines 7ten Buches, so wie mit unserer Erklärung übereinkommen; allein R. Simson vermuthet, daß diese Erklärung nicht von Euclides stammt, sondern durch eine spätere Hand in den Text gekommen ist.

Zus. 2. Alle Brüche sowohl als alle Produkte sind Verhältnisse. Denn man setze $\frac{A}{B} = q$ und $D \,.\, E = C$, so hat A zu B dasselbe Verhältniß als q zur Einheit; und E zur Einheit dasselbe Verhältniß als C zu D.

Anmerkung 7. Die Erklärungen von Multiplication und Division, wie man sie in den meisten Rechenbüchern findet, sind sehr mangelhaft.

Genau gesprochen besteht die Multiplication in dem Auffinden einer Zahl, die zu einem der Factoren in demselben Verhältnisse steht als der andere zur Einheit; und die Division (obschon ursprünglich ein so oft als möglich wiederholtes Abziehen des Divisors vom Dividendus) in dem Auffinden einer Zahl, die zur Einheit dasselbe Verhältniß hat, als der Divisor zum Dividendus.

Man sehe hierüber König zu Eucl. V, Erkl. 1 und 2. — L. C. §. 287. — aber vor allen d'Alembert Melanges V, p. 217.

Zus. 3. Die Proportionalität erfordert mindestens drei Größen. Eucl. V, Erkl. 9.

Anmerkung 8. Man treibt im gewöhnlichen Leben sehr oft wahren Mißbrauch mit dem Worte *Proportion*, indem man es mit *Verhältniß* verwechselt, und z. B. sagt, die Proportion von A zu B.

Zwischen zwei Größen kann nie selbst eine Proportion, wohl aber ein bestimmtes Verhältniß Statt finden; und Proportionalität (Verhältnißgleichheit) entsteht erst dann, wenn man zwei gleiche Verhältnisse mit einander vergleicht; mögen diese beiden zusammen nun aus drei oder vier Größen bestehen; im ersten Falle ist $A : B = B : C$, oder $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$ und im zweiten $A : B = C : D$, oder $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

131. Erklärung. Wenn Größen, die gleiches Verhältniß zu einander haben, alle unter einander verschieden sind, so sagt man, sie seien *unterbrochen* (nicht stetig) proportionirt. Sind dagegen die Größen so beschaffen, daß die eine jedes Verhältnisses in dem nächstfolgenden Verhältniß sich wiederholt, namentlich so, daß das Hinterglied des ersten Verhältnisses gleich dem Vordergliede des zweiten Verhältnisses, das Hinterglied des zweiten gleich dem Vordergliede des dritten u. s. f. ist, so heißen die Größen *stetig* proportionirt. Eine Aufeinanderfolge von stetig proportionirten Größen heißt eine *geometrische Progression* oder *Reihe*; gleichweit abstehende Glieder derselben sind diejenigen, die von einem bestimmten Gliede durch eine gleiche Anzahl Zwischenglieder getrennt sind.

A, B, C, D, E, F, G rc. bilden eine geometrische Progression oder Reihe, wenn $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E} = \frac{E}{F} = \frac{F}{G}$ rc.

Zus. Eine geometrische Reihe heißt *steigend*, wenn jedes

Glied größer ist, als sein nächster Vorgänger, und fallend, wenn das Gegentheil Statt findet.

Anmerkung. Daß Größen eine geometrische Reihe bilden, deutet man durch das vor sie gesetzte Zeichen (∺) an; z. B. ∺ A, B, C, D, E ꝛc.

132. Erklärung. Sind drei Größen stetig proportionirt, so heißt die zweite die mittlere Proportionale, und die letzte die dritte Proportionale. Wenn vier Größen unterbrochen proportionirt sind, so heißt die letzte die vierte Proportionale. Ferner heißen die erste und letzte Größe die äußern Glieder, die zweite und dritte aber die mittleren.

133. Erklärung. Vorderglieder einer Proportion heißen die Vorderglieder der beiden die Proportion bildenden Verhältnisse, also das erste und dritte; Hinterglieder das zweite und vierte. Jene sowohl als diese nennt man auch, das eine in Beziehung auf das andere, entsprechende (homologe) Glieder.

134. Erklärung. Wenn man vier Größen hat und betrachtet deren Verhältniß mit Rücksicht auf die Ordnung, in welcher man sie genannt, oder aufgeführt hat, so sagt man die Größen stehen in geradem Verhältnisse zu einander, wenn sich die erste zur zweiten, wie die dritte zur vierten verhält; in umgekehrtem Verhältnisse dagegen sind sie, wenn sie als Glieder der aus ihnen zu bildenden Proportion nicht in der Ordnung folgen, in welcher man sie aufgeführt hat, sondern wenn die erste zur zweiten sich verhält, wie die vierte zur dritten, oder die zweite zur ersten, wie die dritte zur vierten, oder die erste zur dritten, wie die vierte zur zweiten.

Zus. Hieraus folgt, daß man von einem gegebenen Verhältnisse das umgekehrte findet, wenn man, anstatt mit dem Hintergliede in das Vorderglied zu dividiren, umgekehrt mit dem Vordergliede in das Hinterglied dividirt. Also $\frac{A}{B}$ ist das umgekehrte Verhältniß von $\frac{B}{A}$, und $\frac{1}{B}$ von $B : 1$.

135. Erklärung. Zusammengesetzte Verhältnisse heißen diejenigen, welche aus mehrern andern Verhältnissen gebildet werden und zwar dadurch, daß man diese letztern (die in diesem Falle auch Wurzeln oder Factoren genannt zu werden pflegen) unter einander multiplicirt. Werden alle Factoren gerade genommen, so heißt das zusammengesetzte Verhältniß gerades Verhältniß aus allen; nimmt man sie dagegen alle umgekehrt, so nennt man das neue Verhältniß umgekehrtes zusammengesetztes Verhältniß der Factoren; werden endlich einige Factoren gerade, andere umgekehrt genommen, so sagt man das zusammengesetzte Verhältniß sei aus geraden und umgekehrten Verhältnissen gebildet.

Beispiel. Man habe die Verhältnisse $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$, so ist das Verhältniß $\frac{P}{Q}$, aus jenen zusammengesetzt, wenn $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}$. So ist $\frac{10}{27}$ zusammengesetzt aus den Verhältnissen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{9}$. Das Verhält-

niß $\frac{R}{S}$ ist das umgekehrte zusammengesetzte Verhältniß aus $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$, wenn $\frac{R}{S} = \frac{B}{A} \cdot \frac{D}{C} = \frac{1}{\frac{A \cdot C}{B \cdot D}}$. So ist $\frac{10}{27}$ umgekehrt zusammengesetzt aus $\frac{3}{2}$ und $\frac{9}{5}$. Das Verhältniß $\frac{T}{U}$ ist gerade aus dem Verhältniß $\frac{A}{B}$ und umgekehrt aus dem von $\frac{C}{D}$ zusammengesetzt, wenn $\frac{T}{U} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$. So ist $\frac{8}{27}$ gerade aus $\frac{4}{9}$ und umgekehrt aus $\frac{3}{2}$ zusammengesetzt.

L. C. §. 290.

136. **Erklärung.** Wenn ein Verhältniß aus mehrern andern zusammengesetzt ist, die alle unter einander gleich sind, so heißt es **zweifach hohes**, **dreifach hohes**, **vierfach hohes** rc. Verhältniß, je nachdem es aus zwei, drei, vier rc. gleichen Verhältnissen zusammengesetzt, und demnach (122) die zweite, dritte, vierte rc. Potenz von einem der gleichen Verhältnisse ist.

$$\frac{A \cdot A}{B \cdot B} \text{ oder } \frac{A^2}{B^2}; \quad \frac{A \cdot A \cdot A}{B \cdot B \cdot B} \text{ oder } \frac{A^3}{B^3}; \quad \frac{A \cdot A \cdot A \cdot A}{B \cdot B \cdot B \cdot B} \text{ oder } \frac{A^4}{B^4}$$

sind einzeln das zweifach hohe, dreifach hohe und vierfach hohe Verhältniß von $\frac{A}{B}$.

Anmerkung. Da die Erklärungen, welche Euclides von zweifach hohen rc. Verhältnissen giebt, aus andern Grundbegriffen hergeleitet werden, so ist es nöthig, dieselben näher zu betrachten, um so mehr, als die Erklärungen nicht ohne Einfluß auf das Folgende sind.

Euclides sagt in der 10ten und 11ten Erklärung seines fünften Buches:

„Wenn drei Größen (stetig) proportionirt sind, so sagt man, die erste habe zur dritten das doppelt hohe Verhältniß von dem, was die erste zur zweiten hat."

„Wenn vier Größen (stetig) proportionirt sind, so hat, sagt man, die erste zur vierten das dreifach hohe Verhältniß von dem, was die erste zur zweiten hat; und dieß so fort, so lange die stetige Proportionalität fortdauert." Sage ich also, das Verhältniß $\frac{P}{Q}$ ist das zweifach hohe von $\frac{A}{B}$, so heißt dieß nach unserer Erklärung, dieß Verhältniß ist durch Multiplication des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ mit sich selbst entstanden; nach Euclides dagegen: das Verhältniß $\frac{P}{Q}$ ist das von der ersten A zur dritten C dreier stetig proportionirter Größen, von denen die beiden ersten A und B sind. Eben so, wenn wir sagen, $\frac{P}{Q}$ ist das dreifach hohe Verhältniß von $\frac{A}{B}$, so heißt dieß nach unserer Erklärung, es ist das Verhältniß von A^3 zu B^3; nach Euclides dagegen, es ist gleich dem Verhältniß der ersten A zur letzten D von vier stetig proportionirten Größen, deren beide erste A und B sind. Wie sehr nun auch für den ersten Augenblick beide Erklärungen von einander verschieden zu sein scheinen, so kommen sie doch auf dasselbe hinaus, wie wir in der Anmerk. zu S. 160 beweisen werden.

137. **Erklärung.** Ein Verhältniß heißt das **zweifach niedere**, das **dreifach niedere** rc. von einem andern, wenn es die zweite, dritte rc. Wurzel des letztern ist.

Beispiel. $\sqrt{\frac{A}{B}}$, und $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ sind jenes das doppelt niedere, dieses das dreifach niedere Verhältniß von $\frac{A}{B}$.

Anmerkung. Ueber noch andere Unterschiede der Verhältnisse und die verschiedenen dabei gebrauchten Namen kann man Clavius zu den Erklärungen des fünften Buches des Euclides nachsehen.

Forderungssätze und Grundsätze.

138. Forderungssatz. Man kann stets fordern, wenn drei Größen gegeben sind, zu ihnen eine vierte Proportionale zu finden.

139. Forderungssatz. Eben so kann stets zu zwei gegebenen Größen eine dritte Proportionale zu finden gefordert werden.

140. Grundsatz*). Gleiche Größen haben dasselbe Verhältniß zu einander, so wie auch jede von ihnen dasselbe Verhältniß zu einer und derselben dritten Größe hat.

Wenn $A = B$, und $C = D$, so ist

$$A : B = C : D \text{ und}$$
$$A : E = B : E.$$

Eucl. V, 7.

141. Grundsatz. Von zwei ungleichen Größen hat die größere zu derselben dritten ein größeres Verhältniß als die kleinere. Dagegen hat die dritte ein kleineres Verhältniß zu der größern als zur kleinern; oder ein größeres Verhältniß zur kleinern als zur größern, und umgekehrt.

Wenn $A > B$, so ist

$$A : C > B : C$$
$$C : A < C : B$$
$$C : B > C : A$$

Eucl. V, 8, 10.

142. Grundsatz. Größen, die zu derselben dritten einerlei Verhältniß haben, sind gleich; und umgekehrt.

Wenn $A : B :: C : B$, so ist $A = C$, und wenn $A = C$, so ist $A : B :: C : B$.

Eucl. V, 9.

143. Grundsatz. Gleichvielfache und gleich-aliquote Theile von gleichen Größen sind gleich; und die von ungleichen Größen stehen in demselben Verhältnisse zu einander, als die Größen selbst.

---

*) Der Unterschied in der Behandlungsweise der Proportionalität bei uns und Euclides hat zur Folge, daß einige Sätze, die nach unsern vorausgeschickten Erklärungen als Grundsätze erscheinen, bei Euclides Lehrsätze sind, die derselbe auch nicht unterläßt zu beweisen.

Wenn $A = B$, so ist $mA = mB$, und $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$.

Wenn $\frac{A}{B} = q$, so ist $\frac{mA}{mB} = q$.

Wenn $A : B = C : D$, so ist
$$mA : mB = C : D$$
$$mA : mB = mC : mD$$
$$mA : mB = nC : nD.$$

Eucl. V, 15 und VII, 17, 18.

Zus. Man kann dieß auch so ausdrücken: Sind zwei Größen einander gleich, so wird diese Gleichheit nicht gestört, wenn man sie beide durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt; und eine Größe bleibt dieselbe, wenn sie durch dieselben Zahlen multiplicirt und dividirt wird.

144. Grundsatz. Zwei Verhältnisse, welche demselben dritten gleich sind, sind unter einander gleich.

Eucl. V, 11.

145. Grundsatz. Wenn von zwei gleichen Verhältnissen das eine größer oder kleiner als ein drittes ist, so gilt eben dieß auch von dem andern.

Eucl. V, 13.

Eigenschaften der geometrischen Proportionen.

---

146. Lehrsatz. Sind vier Größen A, B, C, D proportionirt, und man nimmt beliebige Gleichvielfache von der ersten und dritten (mA, mC) und andere beliebige Gleichvielfache von der zweiten und vierten (nB, nD), so ist das Vielfache der dritten stets eben so groß, größer oder kleiner als das Vielfache der vierten, je nachdem das Vielfache der ersten eben so groß, größer oder kleiner als das Vielfache der zweiten ist.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, also auch (143) $\frac{mA}{nB} = \frac{mC}{nD}$, daher wenn

mA entweder $>$ oder $=$ oder $<$ nB, so ist auch
mC entweder $>$ oder $=$ oder $<$ nD.

Anmerkung. Man sieht hieraus, daß die von Euclides gegebene Erklärung von Proportionalität aus der unsrigen folgt. s. 130 Anmerk. 4.

147. Lehrsatz. Wenn das Verhältniß von A zu B größer ist als das von C zu D, so kann man stets solche Gleichvielfache der ersten und dritten (mA, mC) und andere Gleichvielfache der zweiten und vierten (nB, nD) so nehmen, daß wenn auch das Vielfache der ersten (mA) das der zweiten (nB) übertrifft, gleichwohl das Vielfache der dritten (mC) das der vierten (nD) nicht übertrifft, sondern entweder gleich oder kleiner ist.

Tacquet zum V Buche des Euclides Part. II, Th. 1.

Beweis. Es sei $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, also auch $\frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}$. Nun kann, wenn $mA > nB$ ist, damit $\frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}$ sei, zwar auch $mC > nD$ sein, aber eben so gut kann $mC = nD$, und $mC < nD$ sein.

148. Lehrsatz. Hat man zwei Verhältnisse $A : B$ und $C : D$, nimmt Gleichvielfache von den beiden Vordergliedern (mA, mC) und andere Gleichvielfache von den Hintergliedern (nB, nD) und es sind die Vielfache beider Vorderglieder zugleich größer, eben so groß, oder kleiner als die Vielfachen ihrer Hinterglieder, und zwar in allen Fällen, welche Vielfachen man auch nehmen möge, so sind die beiden Verhältnisse einander gleich.

Erläuterung. Der Satz behauptet: Wenn für den Fall, wo $mA > nB$, auch $mC > nD$, wo $mA = nB$, auch $mC = nD$ und wo $mA < nB$, auch $mC < nD$, so müsse $A : B = C : D$ sein.

Beweis. Wäre unsere Behauptung nicht richtig, so müßte entweder $A : B > C : D$, oder $C : D > A : B$ sein. Im erstern Falle ließen sich (147) stets Vielfache von A und C und andere von B und D so nehmen, daß wenn $mA > nB$, doch $mC = nD$ oder $mC < nD$ wäre, was offenbar der Voraussetzung widerspricht. Eben so läßt sich zeigen, daß unter unserer Voraussetzung nicht $C : D > A : B$ sein kann, es ist also $A : B = C : D$.

Zus. Lassen sich bei zwei Verhältnissen Gleichvielfache von den Vordergliedern und andere Gleichvielfache von den Hintergliedern so nehmen, daß während in dem ersten Verhältnisse das Vielfache des Vordergliedes größer als das Vielfache des Hintergliedes ist ($mA > nB$), in dem zweiten Verhältnisse das Vielfache des Vordergliedes nicht größer ist als das Vielfache seines Hintergliedes (mC nicht $> nD$), so ist das erste Verhältniß stets größer als das zweite ($A : B > C : D$).

Beweis. Wäre dem nicht also, so sei $A : B = C : D$, also (148) wenn $mA > nB$, auch $mC > nD$, was offenbar gegen die Voraussetzung. Könnte $A : B < C : D$ oder $\frac{C}{D} > \frac{A}{B}$ sein, so müßte auch $\frac{mC}{nD} > \frac{mA}{nB}$ sein, und darum, wenn $mA > nB$, um so mehr $mC > nD$ sein, was gegen die Voraussetzung streitet ꝛc.

Anmerkung 1. Aus unserm Satze und seinem Zusatze sieht man, wie die Gleichheit der Verhältnisse aus der Lehre von den Gleichvielfachen, wie sie Euclides aufgestellt hat (130, Anmerkung 4), hergeleitet werden kann, daß also die eine Lehre mit der andern vollkommen übereinkommt. Nicht minder sieht man, daß sich wesentlich nichts ändert, mögen die in Rede stehenden Größen commensurabel oder incommensurabel zu einander sein.

Anmerkung 2. Wir werden uns bei den folgenden Sätzen nicht mehr mit Erörterungen über Commensurabilität oder Incommensurabilität der dabei erscheinenden Größen aufhalten, sondern uns lediglich an unsere Erklärung in 130 halten, und nur hie und da Einzelnes zur nähern Erläuterung in Anmerkungen beifügen.

149. Lehrsatz. In jeder Proportion ist, je nachdem das Vorderglied des ersten Verhältnisses größer, eben so groß oder kleiner als

sein Hinterglied ist, auch stets das Vorderglied des zweiten Verhältnisses größer, eben so groß, oder kleiner als sein Hinterglied.

Eucl. V, 14. — L. C. §. 106.

Beweis. Aus der Voraussetzung selbst, daß $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

150. Lehrsatz. **Bilden vier Größen eine geometrische Proportion, so ist das Produkt der beiden äußern stets so groß als das Produkt der beiden mittlern. Umgekehrt, wenn zwei Produkte, jedes aus zwei Factoren bestehend, gleich sind, so bilden diese vier Factoren eine geometrische Proportion, nämlich so, daß der erste des ersten Produktes sich zum ersten des zweiten Produktes verhält, wie der zweite Factor eben dieses zweiten Produktes zum zweiten des ersten Produktes.**

Eucl. VII, 19.

Beweis. Aus 130 und 131, und Zus. zu 143.

Anmerkung 1. Wir verstehen hier unter den Produkten sowohl diejenigen, die sich wirklich in Zahlen darstellen lassen, als auch diejenigen, wo dieß nicht möglich ist; unser Satz ist also auf commensurable und incommensurable Größen gleich anwendbar.

Anmerkung 2. Diesen Satz in seiner Allgemeinheit findet man bei Euclides nicht, sondern nur für Zahlen im VII B. Doch wir werden später (203, 3. 5) zeigen, daß der 16te Satz im VI B. des Euclides mit unserm zusammenfällt.

Zus. 1. **Sind drei Größen stetig proportionirt, so ist das Produkt der beiden äußern gleich dem Quadrate der mittlern.**

Eucl. VII, 20.

Anmerkung 3. Es soll später (203, 3. 8) gezeigt werden, daß der 17te Satz im VI B. des Euclides mit diesem unsern Satze zusammenfällt.

Anmerkung 4. Die Gleichheit von Produkten liefert in vielen Fällen eine bequeme Art für den Ausdruck des Verhältnisses, das zwischen zwei Größen Statt findet. So bestimmt man das Verhältniß von Maaß und Gewicht an einem Handelsplatze zu dem an einem andern fast ohne Ausnahme durch Angabe zweier Produkte z. B. man sagt 100 Amsterdammer Ellen sind gleich 106 Stettiner Ellen; anstatt A. E. : St. E. = 106 : 100. Es ist übrigens dieser Ausdruck auch geeignet, die Euclideische Erklärung von Proportion zu verdeutlichen. Schon Montucla (Hist. des Math. I, p. 210) hat diese Bemerkung gemacht und dadurch Euclid's 5te Erklärung im V B. zu vertheidigen gesucht.

Zus. 2. **Hieraus ergeben sich von selbst die Regeln, um eine vierte, eine dritte, oder eine mittlere Proportionale zu finden.**

Anmerkung 5. Von selbst leuchtet ein:

1) daß, wenn man eine mittlere Proportionale zwischen zwei Zahlen sucht, diese nur dann wirklich und genau in Zahlen dargestellt werden kann, wenn das Produkt jener beiden Zahlen eine Quadratzahl bildet, da ja die mittlere Proportionale die Wurzel aus diesem Produkte ist. — Daß aber zwischen zwei gegebenen Linien allezeit eine mittlere Proportionale sich finden läßt, soll in der 9ten Aufgabe des dritten Buches gezeigt werden.

2) daß, wenn man eine dritte Proportionale zu zwei gegebenen Zahlen, oder eine vierte zu dreien fordert, diese dritte, oder vierte eben so gut ein Bruch als eine ganze Zahl sein kann. Da nun Euclides in seinem VII, VIII, IX Buche, so oft er von Zahlen spricht, keine andern als ganze versteht, so hat er den 18ten und 19ten Satz des IX B. dazu aufgestellt, um zu erforschen, ob, wenn zwei oder drei Zahlen gegeben sind, eine dritte oder vierte Proportionale zu ihnen sich finden lasse.

Anmerkung 6. Auf unserm Zusatze beruht auch die ganze Regel de tri, wie in der 5ten Anmerkung zum folgenden Lehrsatze näher gezeigt werden soll.

Anmerkung 7. Die Gleichheit der Produkte AD = BC folgt unmittelbar aus der Gleichheit der Verhältnisse A : B und C : D. Wären nun die Verhältnisse nicht gleich, sondern hätte man A : B > oder < C : D, so ließ sich auf gleiche Art zeigen,

daß $AD >$ oder $< BC$ wäre; und umgekehrt — ein Satz, dessen erster Theil den ersten Satz bei Serenus de coni sectione bildet, der zweite aber von Eutocius in seinem Commentar zu Archimed's Schrift: de Sphaera et Cylindro B. 2, S. 9 gebraucht wird.

151. Lehrsatz. Sind vier Größen (A, B, C, D) proportionirt, so bleiben sie es auch bei Verwechslung (alternando) der beiden mittlern in ihren Stellen (A : C = B : D) und eben so bei der Umkehrung (invertendo) beider Verhältnisse d. h. wenn man das Hinterglied jedes Verhältnisses zum Vorderglied macht und umgekehrt.

Eucl. V, 16, V, 4 Zus. und VII, 13.

Bew. Aus 150.

Anmerkung 1. Die Verwechslung alterna ratio, von einigen auch permutatio genannt), erklärt Euclides (V, Erkl. 13) als die Annahme, daß das Vorderglied sich zum Vordergliede, wie das Hinterglied zum Hintergliede verhalte.

Anmerkung 2. So lange man die Glieder einer Proportion als Größen in abstracto betrachtet, ist die Verwechslung unbedingt zulässig; giebt man dagegen ihren Einheiten bestimmte Benennungen, so kann die Verwechslung nur dann geschehen, wenn die Einheiten aller vier gleich sind. So verhält sich z. B. ein halbes Jahr zu einem Monate wie ein Oxhoft zu einem Anker; wollte man aber hier verwechseln und sagen ein h. J. zu einem Oxhoft, wie ein Monat zu einem Anker, so wäre dieß offenbar sinnlos, da zwischen einem Monat und einem Anker eben so wenig ein Verhältniß denkbar ist, als zwischen einem halben Jahre und einem Oxhoft. Darum fügen manche Schriftsteller unserm Satze die ausdrückliche Bedingung hinzu, daß alle Glieder der Proportion gleichartig sein müssen. Eine ähnliche Bemerkung gilt von unserm Lehrsatz 153. Doch wir betrachten hier die Größen als abstracte und unbenannte. Euclides spricht im 13ten S. seines VII Buches, welches von Zahlen handelt, mit Recht von der Verwechslung als allgemein und unter allen Umständen zulässig.

Anmerkung 3. Von der Umkehrung giebt Euclides folgende Erklärung: „Die Umkehrung eines Verhältnisses besteht darin, daß man sagt, das Hinterglied (als nunmehriges Vorderglied) zum Vordergliede (als nunmehrigem Hintergliede). Vergleicht man diese Erklärung mit unserer obigen in 134, so sieht man leicht, daß beide auf eins hinauskommen.

Anmerkung 4. Die Glieder einer geometrischen Proportion können auf mehrfache Weise ihren Platz gegen einander wechseln, wenn man Umkehrung und Verwechslung mit einander verbindet; nämlich:

$$\begin{array}{ll} A : B = C : D & A : C = B : D \\ B : A = D : C & C : A = D : B \\ B : D = A : C & C : D = A : B \\ D : B = C : A & D : C = B : A \end{array}$$

Und auf ähnliche Weise kann man aus der Proportion A : B = C : D, oder aus den gleichen Produkten AD = BC, auch noch folgende acht Proportionen bilden:

$$\begin{array}{ll} A : B = \frac{1}{D} : \frac{1}{C} & B : A = \frac{1}{C} : \frac{1}{D} \\ A : \frac{1}{D} = B : \frac{1}{C} & B : \frac{1}{C} = A : \frac{1}{D} \\ C : D = \frac{1}{B} : \frac{1}{A} & C : \frac{1}{B} = D : \frac{1}{A} \\ D : C = \frac{1}{A} : \frac{1}{B} & D : \frac{1}{A} = C : \frac{1}{B} \end{array}$$

Und so könnte man noch andere Verbindungen zwischen den Größen A, B, C, D machen, die alle richtige Proportionen sind, wenn die Produkte, die man aus den äußern und aus den mittlern Gliedern bildet, entweder unmittelbar AD = BC geben oder auf diese Gleichheit gebracht werden können.

Zus. Zahlen, die zwei gleiche Produkte bilden, lassen sich stets in eine solche Verbindung bringen, daß eine geometrische Proportion entsteht.

L. C. §. 302.

Anmerkung 5. Auf diesem und dem vorhergehenden Satze beruht die ganze Regel de tri sammt Allem, was an sie sich unmittelbar anschließt, worüber aber das Nähere

dem mündlichen Vortrage überlassen bleiben muß. Uebrigens ist diese Anmerkung absichtlich diesem und nicht dem vorhergehenden Lehrsatze beigefügt worden, weil man bei der Art, wie man nur zu oft die Regel de tri behandelt, sich eine Verwechslung erlaubt, die nicht zu billigen ist.

Fragt man z. B. wie viel kosten 17 Ellen, wenn 6 Ellen 13 Rthlr. kosten? so ist das einfache und natürliche Verfahren dieses:

6 E. : 17 E. = 13 Rthlr. : x Rthlr.

Waare zu Waare, wie Geld zu Geld. Allein in den meisten Rechenbüchern setzt man: 6 : 13 = 17 : x eine eben so offenbare, als unzuläßige (Anmerk. 2) Verwechslung der mittlern Glieder der zu bildenden Proportion.

152. Lehrsatz. Wenn von vier Größen das Produkt aus der ersten und zweiten gleich ist dem Produkte aus der dritten und vierten, so stehen die Größen im umgekehrten Verhältnisse zu einander, es verhält sich nämlich die erste zur dritten, wie die vierte zur zweiten, oder die erste zur vierten, wie die dritte zur zweiten.

Beweis. Aus 151, Zus.

Zus. Hierauf beruht das Verfahren, um zu drei gegebenen Größen eine vierte umgekehrte Proportionale zu finden, d. h. eine Größe, die so beschaffen ist, daß die erste und zweite im umgekehrten Verhältniß zu einander stehen, als die dritte und vierte.

Anmerkung. Darauf gründet sich die sogenannte verkehrte Regel de tri, die sich von der gewöhnlichen oder, wie man sie gewöhnlich nennt, geraden Regel de tri nur in Beziehung auf den Ansatz unterscheidet. Es ist jederzeit leicht zu entscheiden, ob die eine oder die andere zur Anwendung kommen muß. Man frage sich nur: muß das gesuchte vierte Glied in eben dem Maaße größer oder kleiner als das dritte der gegebenen werden, in welchem das zweite größer oder kleiner als das erste ist? Ist dieß der Fall, so muß die gerade Regel de tri angewandt werden. Wenn dagegen das vierte Glied in eben dem Maaße größer oder kleiner als das dritte werden muß, in welchem das zweite (nicht größer oder kleiner, sondern) kleiner oder größer als das erste ist, so hat man den Fall der verkehrten Regel de tri. Wenn z. B. ein Fuhrmann für eine gewisse Fracht 400 ℔ 80 Meilen weit zu fahren sich verpflichtet, wie weit wird er für eben diese Summe 950 ℔ fahren müssen? Hier fällt in die Augen, daß man nicht ansetzen darf: 400 ℔ : 950 ℔ = 80 M. : x M.; da der Fuhrmann offenbar 950 ℔ für dasselbe Geld nicht eben so weit fahren kann, als 400 ℔, sondern der Weg muß sich vielmehr in dem Maaße verkürzen, in welchem die fortzuschaffende Last zunimmt. Es ist also die verkehrte Regel de tri, die man anwenden muß, mithin: 950 : 400 = 80 : x. Man wird sich nie versehen, wenn man nach der vereinten Wirkung der in Betracht kommenden Umstände fragt. Die eine ist: 400 ℔ 80 Meilen weit, oder 400 . 80; die andere 950 ℔ x Meilen weit, da nun der Fuhrmann dieselbe Fracht erhält, so muß offenbar 400 . 80 = 950 . x, oder 950 : 400 = 80 : x sein.

153. Lehrsatz. Sind vier Größen proportionirt, so hat man auch stets durch Addition oder Zusammenstellung (componendo) die Summe der ersten und zweiten zur ersten oder zweiten, wie die Summe der dritten und vierten zur dritten oder vierten; und eben so durch Subtraction oder Trennung (dividendo) den Unterschied der beiden ersten zur ersten oder zweiten, wie den Unterschied der beiden letzten zur dritten oder vierten; und beides vereinigt, die Summe der beiden ersten zu ihrem Unterschiede, wie die Summe der beiden letzten zu deren Unterschiede; und umgekehrt für alle einzelnen Fälle.

Eucl. V, 17, 18 und VII, 11. — L. C. §. 304, 305.

Beweis. Aus 150, Zus. 2 und 141.

Anmerkung 1. Euclides giebt folgende Erklärung von Zusammenstellung (compositio): „Zusammenstellung eines Verhältnisses ist es, wenn man das Verhältniß des Vorder- und Hinter-Gliedes als einer einzigen Größe zum Hintergliede nimmt.“ V B. Erkl. 15. Die Trennung erklärt Euclides als das Nehmen des Verhältnisses vom Ueberschusse des Vordergliedes über das Hinterglied zum Hintergliede. Wenn man diese

Subtraction oder Trennung gewöhnlich mit den Namen: divisio, oder dividendo bezeichnet hat, so ist dieß in Folge einer ungenauen Uebersetzung des griechischen von Euclides gebrauchten Ausdruckes διαίρεσις geschehen.

Zus. Aus unserm Satze lassen sich durch Verwechslung und Umkehrung viele andere Proportionen herleiten, die alle in Worten auszudrücken nutzlos sein würde. Es folgen hier die wichtigsten.

Die gegebenen seien

1. $A + B : A = C + D : C$
2. $A + B : B = C + D : D$
3. $A - B : A = C - D : C$
4. $A - B : B = C - D : D$
5. $A + B : A - B = C + D : C - D$

Hieraus folgen:

6. $A : A + B = C : C + D$
7. $B : A + B = D : C + D$
8. $A + B : C + B = A : C$
9. $B : D = A + B : C + D$
10. $A + B : C + D = A - B : C - D$

u. s. w.

Anmerkung 2. Wenn man unsere Proportion 1, nachdem man die mittlern Glieder verwechselt, also $A + B : C + D = A : C$, als Hypothesis verbindet mit der Proportion 9 als Thesis, so erhält man den 19ten S. bei Euclides.

154. **Lehrsatz.** Wenn das Anfangsglied einer Proportion das größte unter allen ist, so ist das Endglied das kleinste; und die Summe des größten und kleinsten ist größer als die Summe der beiden übrigen.

Beweis. Für den ersten Theil aus 149. Für den zweiten Theil also: da $A : B = C : D$, so ist (153)

$A - B : B = C - D : D$, oder

$A - B : C - D = B : D$, da nun

$B > D$, so ist auch $A - B > C - D$, oder $A + D > B + C$.

Anmerkung. Dieser Satz ist bei Euclides der 25te im V. B., wo der Verfasser stillschweigend voraussetzt, daß wenn das Anfangsglied das größte ist, das Endglied das kleinste sein müsse.

155. **Lehrsatz.** Aus zwei beliebigen Proportionen $A : B = C : D$ und $E : F = G : H$ kann man stets eine dritte und vierte Proportion herleiten, indem man jedes Glied der einen durch das entsprechende der andern multiplicirt oder dividirt, also $AE : BF = CG : DH$, und $\frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}$.

Beweis. Aus S. 150, und dessen 2tem Zus.

Zus. 1. Sind daher vier Größen proportionirt, so sind es auch ihre gleich hohen Potenzen, und ihre gleich hohen Wurzeln.

Zus. 2. Sind vier Größen proportionirt, so verhält sich auch die Hälfte der ersten zur zweiten, wie die dritte zum Doppelten der vierten. Oder allgemeiner: die Proportionalität bleibt ungestört, wenn man das eine der beiden äußern Glieder durch eine beliebige Zahl multiplicirt, und das andere durch eben diese Zahl dividirt. Dasselbe gilt von den beiden mittlern Gliedern.

Tacquet Lemma ad pr. 11 ex Archimede.

156. **Lehrsatz.** **Wenn man zwei oder mehrere Proportionen (A : B = D : E und B : C = E : F), wo die Vorderglieder oder Hinterglieder der einen entweder die Vorderglieder, oder die Hinterglieder der andern ausmachen, so sind auch die übrigen Glieder der ersten, jedes in seiner Stelle, proportionirt den übrigen Gliedern der zweiten (A : C = D : F).**

Beweis. Aus 155.

Anmerkung 1. Dieser Satz begreift den 22ten und 23ten S. des fünften und auch den 22ten S. des siebenten Buches bei Euclides in sich. Er nennt ihn die Folgerung aus dem Gleichen (ex aequo), und zwar diejenige, wo, wenn A : B = D : E und B : C = E : F, auch A : C = D : F, die Folgerung aus dem geordneten Gleichen. Schließt man dagegen, daß, wenn A : B = E : F und B : C = D : E, auch A : C = D : F sein müsse, so heißt dieß die Folgerung aus dem nicht geordneten Gleichen. Beide Folgerungen heißen die aus dem Gleichen, weil sie in einer Gleichheit von Verhältnissen bestehen. Die gegebenen gleichen Verhältnisse sind im ersten Falle $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ und $\frac{D}{E}$, $\frac{E}{F}$, im zweiten $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ und $\frac{E}{F}$, $\frac{D}{E}$. In beiden folgert man die Gleichheit der Verhältnisse $\frac{A}{C}$ und $\frac{D}{F}$; aber im ersten Falle gehen die Glieder der gleichen Verhältnisse beiderseits in derselben Ordnung fort. Auf der einen Seite sind nämlich gegeben A, B, C, auf der andern D, E, F; es ist das Verhältniß der ersten zur zweiten ($\frac{A}{B}$) auf der einen Seite, gleich dem Verhältnisse zwischen der ersten und zweiten $\frac{D}{E}$ auf der andern; und eben das Verhältniß der zweiten zur dritten $\frac{B}{C}$ auf jener, gleich dem Verhältniß der zweiten zur dritten $\frac{E}{F}$ auf dieser; es findet also hier offenbar auf beiden Seiten dieselbe Ordnung Statt und darum der Ausdruck: Folgerung aus dem geordneten Gleichen. Im zweiten Falle dagegen folgen die Glieder der gleichen Verhältnisse nicht derselben Ordnung auf beiden Seiten; denn auf der einen ist es das Verhältniß von der ersten zur zweiten $\frac{A}{B}$, auf der andern aber das von der zweiten zur dritten $\frac{E}{F}$, ferner das von der zweiten zur dritten $\frac{B}{C}$ auf jener, aber das von der ersten zur zweiten $\frac{D}{E}$ auf dieser. Man folgert also hier allerdings aus dem Gleichen, aber aus dem nicht geordneten. Hierdurch werden nun auch die drei folgenden Erklärungen des Euclides hinreichend aufgehellt sein.

V B. Erkl. 18. „Aus dem Gleichen folgert man, wenn man bei zwei gegebenen Größenreihen, die beide gleichviel Glieder enthalten, und von denen je zwei der einen proportionirt sind mit zweien der andern, die erste zur letzten der einen Reihe, wie die erste zur letzten der andern setzt."

Erkl. 19. „In geordneter Proportion ist eine Reihe von Größen mit einer andern, wenn die erste und zweite von jener mit der ersten und zweiten von dieser proportionirt ist, und eben so die zweite und dritte von jener mit der zweiten und dritten von dieser ꝛc."

Erkl. 20. „In nicht geordneter Proportion sind dagegen drei Größen mit drei andern, wenn die erste zur zweiten der einen Reihe ist, wie die zweite zur dritten der andern, und das Hinterglied des ersten Verhältnisses zu der zunächst darauf folgenden Größe, wie die dem Vordergliede des zweiten Verhältnisses zunächst vorhergehende Größe zu diesem Vordergliede."

Anmerkung 2. Unser Satz ist allgemeiner, begreift alle möglichen Fälle unter sich, und macht es ganz überflüssig, noch einen Unterschied zwischen geordnet und nicht geordnet zu machen.

Anmerkung 3. Unser Satz bildet die Grundlage für die Regel von Fünfen, Kettenregel, Gesellschaftsrechnung u. s. w., wo man die gesuchte Größe durch Verbindung mehrerer Proportionen findet, in denen immer einige Glieder dieselben sind, und welche

daher durch die Folgerung aus dem Gleichen verschwinden; dem mündlichen Vortrage müssen die zur hinreichenden Erläuterung nöthigen Beispiele vorbehalten bleiben.

L. C. §. 324.

Zus. 1. Wenn A : B = D : E und
B : C = E : F
oder wenn A : B = E : F und
B : C = D . D,
so ist stets D größer, eben so groß, oder kleiner als F, je nachdem A größer, oder eben so groß, oder kleiner als C ist.

Es ergiebt sich dieß aus dem Hauptsatze in Verbindung mit 149; und macht bei Euclides den 20ten und 21ten Satz aus. Er nennt sie auch die Folgerungen aus dem geordneten und nicht geordneten Ungleichen.

Zus. 2. In jeder Proportion kann man an die Stelle zweier Glieder zwei andere ihnen proportionirte setzen. Wenn z. B.

A : B = CD : EF und
C : E = J : K, so ist
A : B = DJ : FK.

Anmerkung 4. Auf diesem Satze beruht die sogenannte regula falsi, wie durch geeignete Beispiele mündlich zu erläutern.

157. Lehrsatz. Sind vier Größen proportionirt, so verhält sich die zweite Potenz von der Summe der beiden ersten zur zweiten Potenz von der Summe der beiden letzten wie das Produkt der beiden ersten zum Produkt der beiden letzten.

Bew. Denn weil A : B = C : D, so ist auch

$A+B : C+D = A : C$ (153 und 151)
$(A+B)^2 : (C+D)^2 = A.A : C.C$ (155, Zus. 1)
$(A+B)^2 : (C+D)^2 = A.B : C.D$ (156, Zus. 2)

Anmerkung. Dieser Satz ist der 12te bei Serenus de sectione cylindri, aber auf Linien und mithin auf Quadrate und Rechtecke angewandt. Archimedes hat im 2ten Buche seiner Schrift: Ueber Kugel und Cylinder, im 3ten S. von ihm Gebrauch gemacht, daher auch Peyrard in seiner französischen Uebersetzung des Werkes in einer Anmerkung einen Beweis unseres Satzes beigefügt hat.

158. Lehrsatz. Hat man zwei Proportionen (A : B = C : D und E : F = G : H), in denen die einzelnen Verhältnisse, aus denen sie bestehen, alle unter einander gleich sind, ($\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \frac{G}{H}$), so sind die Summen oder Unterschiede von je zwei entsprechenden Gliedern beider Proportionen, in derselben Ordnung wie die Glieder selbst genommen, gleichfalls proportionirt.

Beweis. Aus S. 150 und dessen 2tem Zus.

L. C. §. 309.

Anmerkung. Von diesem Satze ist der 24te im 5ten Buche des Euclides ein besonderer Fall, nämlich, wenn A : B = C : D und E : B = F : D, so ist auch A + E : B = C + F : D. In Worten: „Sind vier Größen proportionirt, und eine fünfte zur zweiten verhält sich wie eine sechste zur vierten, so ist auch die Summe der ersten und fünften zur zweiten, wie die Summe der dritten und sechsten zur vierten."

Zus. Wenn man zu den Hintergliedern einer Proportion Größen addirt oder von ihnen abzieht, die in demselben Verhältniß ste-

hen, als die Vorderglieder, so bilden auch diese Summen oder Unterschiede noch gleiche Verhältnisse mit den Vordergliedern.

159. Lehrsatz. Sind von zwei Proportionen die Vorderglieder der einen denen der andern proportionirt, so sind auch die Summen oder Unterschiede je zweier entsprechenden Glieder, in derselben Ordnung wie die Glieder selbst genommen, unter einander proportionirt.

L. C. §. 309.

Beweis. Aus 150 und 151, Zus.

Anmerkung. Dieser und der vorhergehende Satz bilden die beiden einzigen Fälle, wo man aus zwei Proportionen die Proportionalität der Summen oder Unterschiede ihrer Glieder folgern kann.

Eigenschaften der geometrischen Reihen oder Progressionen.

160. Lehrsatz. Sind mehrere Größen (A, B, C, D, E 2c.) stetig proportionirt, oder bilden sie eine geometrische Progression, so steht die erste zur dritten in dem zweifach höhern Verhältniß als die erste zur zweiten; ferner die erste zur vierten in dem dreifach höhern Verhältniß, und allgemein die erste zur nten in dem (n — 1)fach höhern Verhältniß als die erste zur zweiten, oder die erste verhält sich zur nten wie (n — 1)te Potenz der ersten zu eben dieser Potenz der zweiten.

L. C. 3. 298, 318.

Beweis. Aus 131 und 155.

Zus. 1. Daher ist das Verhältniß des ersten Gliedes zu einem beliebigen andern aus den Verhältnissen aller zwischen beiden liegenden Glieder zu einander zusammengesetzt; und da diese Verhältnisse alle gleich sind, so ist jenes Verhältniß gleich der so vielten Potenz des Verhältnisses vom ersten zum zweiten, so viel Glieder dem beliebig angenommenen vorausgehen.

Anmerkung. Die Erklärung, welche Euclides von dem zweifach höhern, dreifach höhern 2c. Verhältniß zweier Größen (A : B) gegeben hat, daß es nämlich, in einer stetigen Proportion, in welcher die beiden in Rede stehenden Größen die beiden ersten Glieder bilden, das Verhältniß der ersten zur dritten, der ersten zur vierten 2c. sei, stimmt also mit unserer Erklärung ganz überein. S. 136 nebst Anmerk. dazu.

Zus. 2. Die mittlere Proportionale zwischen zwei Größen ist kleiner als die größere, aber größer als die kleinere.

Denn $A : B = B : C$, und daher auch
$A^2 : B^2 = B^2 : C^2 = A : C$ (155 und voriger Zus.),
also, wenn $A > C$, auch $A > B$ und $B > C$.

Anmerkung. Dieser Satz bildet den ersten Lehrsatz nach dem 4ten Hauptsatze bei Archimedes in seiner Schrift über Kugel und Cylinder.

Zus. 3. Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist gleich dem vorhergehenden multiplicirt durch den Anzeiger (129, Anm. 2).

Zus. 4. Ist A das Anfangsglied einer solchen Reihe, B das zweite, und der Anzeiger q, also $q = \frac{B}{A}$, so kann die Reihe also

ausgedrückt werden:

$$A,\ Aq,\ Aq^2,\ Aq^3,\ Aq^4,\ Aq^5 \ \ldots\ldots\ Aq^{n-1}$$

L. C. §. 311.

Zus. 5. Das nte Glied der Reihe ist gleich dem Anfangsgliede multiplicirt durch die (n - 1)te Potenz des Anzeigers.

Zus. 6. Ist das erste Glied größer als das zweite, also der Anzeiger ein Bruch, so ist jedes Glied kleiner als das vorhergehende und die Reihe heißt eine fallende. Die Glieder werden immer kleiner, je weiter die Reihe fortgesetzt wird, ohne darum jemals ganz Null werden oder verschwinden zu können. Wenn dagegen das zweite Glied größer als das erste, so ist die Reihe eine steigende; alle Glieder werden desto größer, je weiter sie sich vom Anfangsgliede entfernen. Dieses letztere ist das kleinste, darf und kann aber niemals Null sein.

Zus. 7. Nichts hindert, die Reihe, für welche man ursprünglich A als Anfangsglied genommen, als schon vor diesem Gliede beginnend zu betrachten. Man erhält alsdann:

$$\frac{A}{q^{n-1}} \ \ldots\ \frac{A}{q^4},\ \frac{A}{q^3},\ \frac{A}{q^2},\ \frac{A}{q^1},\ \frac{A}{q^0},\ Aq, Aq^2, Aq^3 \ldots\ldots Aq^{n-1},$$

oder nach 122, Anm. 3.

$$Aq^{-(n-1)}, \ldots Aq^{-4}, Aq^{-3}, Aq^{-2}, Aq^{-1}, Aq^{-0}, Aq, Aq^2, Aq^3 \ldots\ldots Aq^{n-1}.$$

Zus. 8. Man kann auch stets die Glieder einer gegebenen Reihe vermehren, dadurch daß man zwischen zwei zunächst auf einander folgenden eine Anzahl mit diesen stetig proportionirten Größen einschaltet. Die Reihe hört dadurch nicht auf, eine geometrische zu sein. In unserer vorhergehenden Reihe z. B. kann man zwischen A und Aq, so wie zwischen Aq und Aq^2 also einschalten:

$$A,\ Aq^{\frac{1}{4}},\ Aq^{\frac{1}{2}},\ Aq^{\frac{3}{4}},\ Aq,\ Aq^{\frac{5}{4}},\ Aq^{\frac{3}{2}},\ Aq^{\frac{7}{4}},\ Aq^2 \ldots$$

oder

$$A,\ Aq^{0,25},\ Aq^{0,5},\ Aq^{0,75},\ Aq,\ Aq^{1,25},\ Aq^{1,5},\ Aq^{1,75},\ Aq^2 \ldots$$

und kann diese Einschaltung natürlich so weit fortführen als man will.

Man kann daher auch jede beliebige Zahl als Glied einer solchen Reihe betrachten, da es keine Zahl giebt, die nicht irgend einer Wurzel von einer gegebenen Zahl (wenigstens annähernd) gleich wäre. So ist z. B.

$$5 = 10^{\frac{1}{1,43069}} = 10^{0,69897} = 10^{\frac{69897}{100000}} = \sqrt[100000]{10^{69897}}.$$

Und darum kann man 5 als ein Glied der geometrischen Reihe betrachten, deren Anfangsglied 1, und deren Endglied 10 ist.

161. Lehrsatz. In jeder geometrischen Reihe ist das Produkt von zwei ganz beliebigen Gliedern gleich dem Produkte zweier andern, die gleich weit von jenen, das eine von dem einen, das andre von dem andern, und zwar entweder das eine nach dem Anfange und das andere nach dem Ende hin, oder beide nach der Mitte hin entfernt sind.

Beweis. Aus 160, Zus. 4, und Zus. 1.

Zus. Nimmt man daher ein Paar beliebige Glieder einer Reihe, die durch eine ungerade Anzahl von Zwischengliedern getrennt sind, so

ist ihr Produkt gleich der zweiten Potenz von dem mittlern dieser Zwischenglieder.

162. Lehrsatz. In allen geometrischen Reihen, deren Anfangsglied die Einheit ist, (wie $1, q, q^2 \ldots q^{n-1}, q^n$) ist das Produkt zweier beliebigen Glieder gleich einem Gliede eben dieser Reihe, das eben so weit von dem einen jener beiden entfernt ist, als das andere vom Anfangsgliede.

Beweis. Aus 161.

Anmerkung 1. Diese Eigenschaft gehört zu denen, auf welche sich das Wesen der Logarithmen gründet.

Anmerkung 2. Man kann unsere Reihe $1, q, q^2 \ldots\ldots q^{n-1}, q^n$, auch so schreiben: $q^0, q^1, q^2 \ldots\ldots q^{n-1}, q^n$ (122, Anm. 3).

Zus. 1. Hieraus ergiebt sich der 8te S. im IX B. des Euclides: „Wenn von der Einheit an mehrern Größen, A_1, A_2, A_3, A_4 .... stetig proportionirt sind, so ist jede zweite in dieser Reihe A_2, A_4, A_6 ꝛc. eine Quadratzahl, jede dritte A_3, A_6, A_9 ꝛc. eine Cubikzahl, jede sechste A_6, A_{12}, A_{18} ꝛc. eine Quadratzahl und Cubikzahl zugleich." Und eben so der 9te S.: „Ist die zunächst auf die Einheit folgende Größe, oder das erste Glied unserer Reihe A_1, A_2, A_3 ꝛc. eine Quadratzahl, oder Cubikzahl, so sind auch alle übrigen Glieder der gesammten Reihe Quadratzahlen oder Cubikzahlen."

$$1, q^2, q^4, q^6 \ldots q^{2n}, \text{ oder } 1, q^3, q^6, q^9 \ldots\ldots q^{3n}$$

Zus. 2. Man kann die Reihe $1, q, q^2 \ldots\ldots q^n$ auch als schon vor dem Gliede 1 beginnend ansehen, nämlich: $q^{-n}, q^{-(n-1)} \ldots q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2 \ldots\ldots q^{n-1}, q^n$; so daß, wenn q eine ganze Zahl ist, die Glieder vor 1 Brüche sind, deren Nenner die successiven Potenzen von q, und deren Zähler 1; die Glieder nach 1 sind die Potenzen von q selbst.

163. Lehrsatz. Hat man eine beliebige Menge proportionirter Größen ($A : B = C : D = E : F = G : H$ ꝛc.), so verhält sich stets die Summe aller Vorderglieder ($A + C + E + G$ ꝛc.) zur Summe aller Hinterglieder ($B + D + F + H$ ꝛc.) wie das erste Glied zum zweiten.

Eucl. V, 12 und VII, 12. — L. C. §. 310.

Beweis. Aus 151 und 153.

Zus. 1. In jeder geometrischen Progression verhält sich die Summe aller Glieder vom ersten bis zum vorletzten, zur Summe aller vom zweiten bis letzten, wie das erste zum zweiten.

Zus. 2. Ist daher A das Anfangsglied, B das zweite, Z das letzte, und q der Anzeiger, also $= \frac{B}{A}$, und bezeichnet S die Summe der ganzen Reihe, so ist

$$S - Z : S - A = A : B, \text{ also}$$

$S = \frac{A^2 - BZ}{A - B}$, oder wenn man die Anzahl der Glieder $= n$ setzt

$$S = \frac{A^2 - A^2q^n}{A - Aq} = \frac{A(q^n - 1)}{q - 1}$$

L. C. §. 327.

Anmerkung 1. Was die Summe einer fallenden Reihe betrifft, von welcher eine unendliche Anzahl von Gliedern genommen wird, so sehe man die erste Anmerkung zur ersten Erklärung im VII Buche (305).

Anmerkung 2. Ist jedes der Glieder einer solchen Reihe viermal so klein, als das vorhergehende, also die ganze Reihe: $A, \frac{A}{4}, \frac{A}{16}, \frac{A}{64}, \frac{A}{256} \ldots \frac{A}{4^n}$, so verwandelt sich unser obiger Ausdruck für S in folgenden:

$$S = \frac{A^2 - \frac{AZ}{4}}{\frac{3}{4}A} = \frac{4A - Z}{3}$$

also wenn man auf beiden Seiten $\frac{Z}{3}$ hinzuaddirt,

$$S + \tfrac{1}{3}Z = \frac{4A}{3}$$

ein Satz, welcher der 23te in der Schrift des Archimedes von der Quadratur der Parabel ist, und in Worten so lautet:

Zus. 3. In jeder geometrischen Reihe, deren Anzeiger 4 ist, ist die Summe aller Glieder vermehrt um den dritten Theil des kleinsten eben so groß als vier Drittel vom größten.

Anmerkung 3. Daß $\frac{4A}{3}$ die Summe der ganzen Reihe darstellt, wenn man sich diese unendlich fortgesetzt denkt, soll im VII Buche (305, Anm. 1) gezeigt werden.

Zus. 4. Wenn $\div\div$ A, B. C, D .... Y, Z, so ist stets $B - A : A = Z - A : A + B + C \ldots + Y$ oder in Worten: Wenn mehrere Größen stetig proportionirt sind, so verhält sich der Ueberschuß der zweiten über die erste zur ersten, wie der Ueberschuß der letzten über die erste zur Summe aller der letzten vorausgehenden Größen.

Eucl. IX, 35.

Beweis. Da $A:B = B:C = C:D = D:E \ldots Y:Z$ so ist auch $A:B-A = B:C-B = C:D-C \ldots = Y:Z-Y$ (153), mithin nach unserm Hauptsatze:

$A+B+C\ldots+Y : B-A+C-B+D-C\ldots+Z-Y = A:B-A$, d. i.

$A+B+C\ldots+Y : Z-A = A:B-A$, oder

$B-A : A = Z-A : A+B+C\ldots+Y.$

Zus. 5. Aus dem ersten Zusatze erhält man durch Verwechslung:

$A+B+C\ldots+Y : A = B+C+D\ldots+Y+Z : B$

und aus Zus. 4, gleichfalls durch Verwechslung

$A+B+C+\ldots+Y : A = Z-A : B-A$, mithin auch

$B+C+D+\ldots+Y+Z : B = Z-A : B-A$, oder

$B-A : B = Z-A : B+C+D\ldots+Y+Z$

d. h. „sind mehrere Zahlen stetig proportionirt, so verhält sich stets der Ueberschuß der zweiten über die erste zur zweiten selbst, wie der Ueberschuß der letzten über die erste zur Summe aller auf die erste folgenden.“

164. Lehrsatz. Sind vier oder mehrere Größen so beschaffen,

daß sie sich wie ihre Unterschiede verhalten, nämlich die erste zur zweiten, wie der Unterschied der beiden ersten zum Unterschied der zweiten und dritten 2c., so bilden diese Größen eine geometrische Progression.

Beweis. Aus 151 und 153.

Anmerkung. Dieser Satz ist von großem Nutzen in der Naturlehre.

Zweiter Abschnitt.

Von der arithmetischen Proportion.

---

165. Erklärung. Vergleicht man zwei gleichartige Größen zu dem Ende mit einander, um zu erfahren, um wie viel die eine größer ist als die andere, d. h. wie groß der Unterschied zwischen ihnen ist, so sagt man, man untersuche das zwischen diesen Größen Statt findende arithmetische Verhältniß, und dieses Verhältniß selbst ist eben jener Unterschied.

Anmerkung. Alle im Anfange dieses Buches gegebenen allgemeinen Erklärungen finden auch hier Statt, so wie die Benennungen Vorderglied, Hinterglied 2c. (120 ff.)

166. Erklärung. Arithmetische Verhältnisse heißen identisch oder gleich, wenn der Unterschied ihrer Glieder derselbe ist d. h. wenn das Vorderglied des einen Verhältnisses um eben so viel sein Hinterglied übertrifft oder von ihm übertroffen wird, als das Vorderglied jedes der übrigen Verhältnisse sein Hinterglied übertrifft, oder von ihm übertroffen wird.

Und hiernach sagt man, vier Größen stehen in arithmetischer Proportion, oder sind arithmetisch proportionirt, wenn sie zwei gleiche arithmetische Verhältnisse bilden.

Beispiel. Die Zahlen 10, 4, 7, 1 bilden eine arithmetische Proportion, darum weil $10-4=7-1=6$ und allgemein sind A, B, C, D arithmetisch proportionirt, wenn $A - B = C - D$, oder $B - A = D - C$.

Es versteht sich dabei von selbst, daß man zur Bildung des Unterschiedes in beiden Verhältnissen die Glieder in derselben Ordnung nehmen müsse d. h. in beiden das Hinterglied vom Vordergliede oder umgekehrt abziehen.

167. Erklärung. Größen sind unterbrochen (nicht stetig) proportionirt, wenn die Glieder der beiden gleichen Verhältnisse verschieden sind; dagegen heißen sie stetig proportionirt, wenn das Hinterglied des ersten Verhältnisses gleich ist dem Vordergliede des zweiten, das Hinterglied des zweiten gleich dem Vordergliede des dritten 2c.

Haftet diese stetige Proportionalität an mehrern Größen d. h. stehen dieselben in einem solchen Zusammenhange, daß je drei unmittelbar auf einander folgende eine stetige arithmetische Proportion ausmachen, so bilden diese Größen eine arithmetische Reihe

oder **Progression**. Gleich weit abstehende Glieder derselben sind zwei solche, von denen jedes durch dieselbe Menge von Zwischengliedern von einem und demselben dritten getrennt ist.

Beispiel. Wenn A — B = B — C = C — D = D — E = E — F ist, so bilden A, B, C, D, E, F eine arithmetische Progression oder Reihe.

Anmerkung 1. Man sieht, daß diese Erklärung bis auf den einzigen Ausdruck arithmetisch, ganz dieselbe ist, wie die in 131, und die Namen: mittlere Proportionale, dritte Proportionale, vierte Proportionale, äußere Glieder, mittlere Glieder, entsprechende Glieder haben hier dieselbe Bedeutung, wie in 132 und 133; die also auch hier gelten.

Anmerkung 2. Daß mehrere Größen eine arithmetische Progression bilden, wird durch das vorgesetzte Zeichen ÷ angedeutet z. B. ÷ A, B, C, D, E ꝛc. heißt A, B, C, D, E machen eine arithmetische Reihe.

Zus. Eine arithmetische Reihe heißt **fallend**, wenn die Glieder immer kleiner werden, je weiter man die Reihe fortsetzt; im entgegengesetzten Falle **steigend**.

Eigenschaften der arithmetischen Proportionen und Progressionen.

---

168. **Lehrsatz**. Bilden vier Größen eine arithmetische Proportion, so ist die Summe der beiden äußern gleich der Summe der beiden mittlern.

Beweis. Aus 166.

Zus. Sind drei Größen in stetiger arithmetischer Proportion, so ist die Summe der beiden äußern gleich dem Doppelten der mittlern, also die mittlere gleich der halben Summe der beiden äußern.

Anmerkung 1. Man sieht hieraus, wie leicht es ist, eine vierte, dritte, oder mittlere Proportionale zu finden.

Anmerkung 2. Die mittlere arithmetische Proportionale zwischen zwei Größen, pflegt man auch das arithmetische Mittel derselben zu nennen.

169. **Lehrsatz**. Je kleiner der Unterschied zweier Zahlen ist, um desto weniger unterscheidet sich ihr arithmetisches Mittel von ihrer mittlern geometrischen Proportionale.

L. C. Astron. §. 126.

Beweis. Aus 168, Zus. und 150, Zus. 2.

Zus. Je größer der Unterschied zweier Zahlen, um desto mehr ist ihr arithmetisches Mittel größer als ihre mittlere geometrische Proportionale.

170. **Lehrsatz**. Bilden mehrere Größen eine arithmetische Reihe, so ist es ein und derselbe Unterschied, um welchen jedes Glied gegen das nächst vorhergehende zu- oder abnimmt; so daß eine solche Reihe allgemein so dargestellt werden kann: $a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d \ldots a \pm (n-1)d$.

Beweis. Aus 167.

Zus. 1. Jedes Glied ist gleich entweder der Summe oder dem Unterschiede von dem vorhergehenden Gliede und dem Anzeiger, je nachdem die Reihe entweder steigend oder fallend ist.

Zus. 2. Jedes Glied ist gleich der Summe oder dem Unter-

schiede von dem Anfangsgliede und dem Sovielfachen des Anzeigers, so viel Glieder dem in Rede stehenden vorausgehen.

Zus. 3. Das Verhältniß des ersten zum dritten Gliede ist doppelt so groß als das des ersten zum zweiten; das Verhältniß des ersten zum vierten dreimal so groß als das des ersten zum zweiten rc., so daß es also auch hier zweifach höhere, dreifach höhere rc. Verhältnisse, aber im arithmetischen Sinne, giebt, s. 163, und die Anm. dazu.

Zus. 4. Jede steigende Reihe kann mit Null beginnen und so hoch sich erheben, als man will; jede fallende Reihe kann mit Null schließen, ja noch unter Null hinabgehen; es kehren dann von da an dieselben Glieder, die über Null stehen, wieder, aber in umgekehrter Ordnung und jedes mit dem Zeichen (—) minus versehen, oder negativ genommen. z. B. $4d$, $3d$, $2d$, d, 0, $-d$, $-2d$, $-3d$, $-4d$.

Anmerkung. Man muß sich vorsehen, daß man sich keine falsche Vorstellung von negativen Gliedern bildet. Die Meinung, daß negative Größen weniger als Nichts seien, ist eben so gewöhnlich und verbreitet, als verkehrt und unzulässig. Das Negative bezieht sich blos auf die Stellung und auf die Bedeutung, in welcher man Größen nimmt. In unserm Falle ist es die Stellung, die in Betracht kömmt; und es sollen hier positive und negative Glieder nichts anders bedeuten, als Glieder, die auf der einen und andern Seite eines Gliedes stehen, von dem als Anfangspunct man ausgeht. Die einfache Figur 86 wird dieß vollkommen klar machen. Man nehme eine Gerade BAb, auf welcher man in gleichen Entfernungen AT, TS rc. von einander Senkrechte errichtet, welche eine arithmetische Reihe bilden, so wird die ihre Endpuncte verbindende eine gerade Linie sein, die durch A geht d. h. BAb in A schneidet; die arithmetische Reihe der Linien CB, MD rc. endigt also in A, und ihr letztes Glied ist Null. Inzwischen wenn man die Linie CA über A hinaus verlängert, und auf BAb an der andern Seite von A, gleiche Stücken At, ts, sr, rq, qp nimmt und an der untern Seite die Senkrechten tl, sk, ri errichtet, so werden diese gleichfalls eine Reihe bilden, die in jeder Beziehung der vorigen gleich ist und mit ihr zusammenhängt, aber ihre Glieder heißen in Beziehung auf die Glieder der erstern negativ, weil sie an der andern Seite von BAb, und daher in entgegengesetzter Stellung genommen worden.

Zus. 5. Die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4.... bilden eine arithmetische Progression.

171. Lehrsatz. In einer arithmetischen Progression ist die Summe zweier Glieder gleich der Summe zweier andern, die von jenen gleich weit entfernt, so nämlich, daß das eine dieses zweiten Paares, um eben so viel Stellen vor oder hinter dem einen des ersten Paares steht, als das andere jenes Paares hinter oder vor dem andern dieses Paares steht.

Beweis. Aus 170.

Zus. Ist die Anzahl der Glieder der Reihe ungerade, so ist das mittlere gleich der halben Summe je zweier gleich weit von ihm entfernten Glieder.

172. Lehrsatz. Ist Null das erste oder letzte Glied einer arithmetischen Reihe, so ist stets die Summe zweier Glieder gleich einem dritten, das eben so weit von einem jener beiden als das andere vom Anfangs- oder Endgliede Null entfernt ist.

Beweis. Aus 171.

Anmerkung 1. Eben dieß gilt also auch für Reihen, die von Null aus nach beiden Seiten hin fortgehen, da man sie als aus zwei Reihen zusammengesetzt betrachten kann.

Anmerkung 2. Dieser Satz bildet die zweite Grundlage für das Wesen der Logarithmen.

173. Lehrsatz. Die Summe einer arithmetischen Progression ist gleich der Summe der beiden äußern Glieder multiplicirt mit der Hälfte der Gliederzahl.

Zus. Daher ist diese Summe auch gleich dem Produkte aus der Hälfte der Gliederzahl und der Summe oder dem Unterschiede von dem doppelten Anfangsgliede und dem Sovielfachen des Anzeigers, so viel Glieder dem letzten vorausgehen, oder auf das erste folgen, also:

$$S = [2a \pm (n-1)d] . \frac{n}{2}$$

Dritter Abschnitt.

Von der harmonischen Proportion.

---

174. Erklärung. Drei Größen (A, B, C) heißen harmonisch proportionirt, wenn das Verhältniß der ersten zur dritten (A : C) gleich ist dem Verhältniß des Ueberschusses der zweiten über die erste (B — A) zum Ueberschusse der dritten über die zweite (C — B). Also wenn A : C = B — A : C — B so sind A, B, C harmonisch proportionirt.

Horrebow §. 15. — Lamy p. 461.

Zus. 1. Es ist klar, daß, wenn das zweite Glied größer ist als das erste, auch das dritte größer sein muß als das zweite, daß also stets eines der beiden äußern Glieder das größte, und das andere das kleinste unter allen dreien ist. Daher sprechen manche die Erklärung auch so aus: „Drei Zahlen bilden eine harmonische Proportion, wenn die kleinste zur größten sich verhält, wie der Ueberschuß der mittlern über die kleinste zum Ueberschuß der größten über die mittlere.“

Zus. 2. Drei Zahlen können keine harmonische Proportion bilden, wenn der Unterschied zwischen der mittlern und kleinsten kleiner ist als die kleinste selbst.

Aus 174 und 149.

Zus. 3. Unter der im vorigen Zusatz angegebenen Beschränkung läßt sich, wie man leicht sieht, zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte finden, welche mit ihnen eine harmonische Proportion bildet.

Lamy pr. 1, pag. 461.

Anmerkung 1. Sind a und b die beiden gegebenen Zahlen, x dagegen die gesuchte dritte, so ist

$$x = \frac{ab}{2a - b}$$

Sind a und c die beiden äußern Glieder und y das mittlere, so hat man

$$y = \frac{2ac}{a + c}$$

Dieß findet man schon bei Theon von Smyrna.

Anmerkung 2. Hat man drei Linien AD, AC, AB (Fig. 86, a) so müssen sie harmonisch proportionirt sein, wenn

AD : AB = AD — AC : AC — AB,

wo AD die größte, AC die mittlere und AB die kleinste ist; nimmt man nun auf AD,

AB = AB, und AC = AC, so ist AD — AC = CD, und AC — AB = BC, also AD : AB = CD : BC, oder AD : CD = AB : BC und man sagt alsdann, daß die Linie AD harmonisch geschnitten sei. Daher sagt La Hire (Sect. con. I, def. 1): „Eine Linie heißt harmonisch getheilt, wenn die ganze Linie zu einem der äußern Abschnitte sich verhält, wie der andere äußere zum mittlern, oder wenn das Rechteck aus der ganzen Linie und dem mittlern Abschnitte gleich ist dem Rechtecke aus den beiden äußern."

Anmerkung 3. Hierauf gründet sich die Auflösung der 11ten Aufgabe im dritten Buche.

Anmerkung 4. Der zweite Theil der Erklärung von La Hire wird aus dem ersten hergeleitet vermittelst des Satzes, der im IV Buche (203, Zus. 5) mitgetheilt werden soll.

Anmerkung 5. Diese Proportion heißt darum harmonisch, weil sie die Grundlage der Harmonie bildet. Drei Saiten nämlich, wenn sie von gleicher Dicke und Spannung, geben die drei Haupttöne, Octave, Quinte, Quarte an, wenn ihre Längen wie 3, 4, 6 sind. Die Saiten 3 und 6 geben die Octave, 4 und 6 die Quinte, 3 und 4 die Quarte. Die Zahlen 3, 4, 6 sind aber zugleich auch so beschaffen, daß

$$3 : 6 = 4 - 3 : 6 - 4$$

ist.

175. Erklärung. Mehrere Größen, A, B, C, D, E ꝛc. bilden eine harmonische Reihe, wenn sich die erste zur dritten verhält, wie der Unterschied zwischen der zweiten und ersten zum Unterschied zwischen der dritten und zweiten, ferner die zweite zur vierten, wie der Unterschied zwischen der dritten und zweiten zum Unterschiede zwischen der vierten und dritten ꝛc.

also wenn:
$$A : C = B - A : C - B$$
$$B : D = C - B : D - C$$
$$C : E = D - C : E - D \text{ ꝛc.}$$

Zus. Sind Zahlen harmonisch proportionirt, so bleiben sie es auch, wenn man alle durch eine und dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt.

Lamy p. 463, pr. 3.

176. Lehrsatz. Wenn von zwei gegebenen Zahlen die zweite größer als die erste ist, so lassen sich nicht immer Zahlen finden, die mit den gegebenen eine beliebig weit fortgehende steigende harmonische Reihe bilden. Aber wohl kann dieß geschehen, wenn die zweite Zahl kleiner ist als die erste; und darum kann man eine fallende Reihe stets so weit fortsetzen als man will.

Bew. Aus 174. Anmerkung 1 sieht man, daß man immer eine dritte harmonische Proportionale zu zwei Zahlen A, und B finden kann, wenn $B < A$, aber nicht immer, wenn $B > A$, sondern nur so lange als $B < 2A$. Sind schon mehrere Glieder (von denen jedes größer als das ihm zunächst vorhergehende) einer solchen Reihe gegeben, z. B. A, B, C, D so ist es ungewiß, ob man die Reihe auch nur um ein einziges Glied weiter führen kann. Denn bezeichnen wir dieses mit E, so müßte : $C : E = D - C : E - D$ und, weil $E > C$, auch $E - D > D - C$, also $E + C > 2D$ was offenbar nicht immer möglich ist, da zwar $E > D$, aber $C < D$. Man vergleiche 179 Zus. 2. Ist dagegen $B < A$ so läßt sich zuförderst leicht zu A, und B eine dritte harmonische Proportionale C finden. Denn, weil $C : A = B - C : A - B$, und $A - B < A$, so ist auch $B - C < C$, oder $C > \frac{1}{2} B$, eine Bedingung, die immer erfüllt werden kann, da C noch nicht gegeben ist.

Und nicht minder könnte man immer, wenn mehrere Glieder, A, B, C, D (wo jedes kleiner als das vorhergehende) einer harmonischen Reihe gegeben sind, ein fünftes, und auf dieselbe Weise ein sechstes, siebentes ꝛc. Glied finden. Denn es ist alsdann: $E : C = D - E : - C - D$; also, weil $C - D < C$, auch $D - E < E$, oder $E > \frac{1}{2} D$, was offenbar immer möglich ist, da E noch nicht gegeben. Und so kann jedes Glied immer größer sein, als die Hälfte des nächstvorhergehenden.

177. **Lehrsatz.** In jeder harmonischen Reihe verhält sich das Produkt der beiden ersten Glieder zum Produkte der beiden letzten, wie der Unterschied der beiden ersten zum Unterschiede der beiden letzten.

Bew. Da $A : C = B - A : C - B$
$B : D = C - B : D - C$
$C : E = D - C : E - D$
$D : F = E - D : F - E$

so ist auch (155 und 143)

$$A . B : E . F = B - A : F - E.$$

178. **Lehrsatz.** Bilden A, B, C, D ꝛc. eine harmonische Reihe, deren n^{tes} Glied Y und $(n + 1)^{tes}$ Z, so ist stets:

$$B - n(B - A) : B - A = Y : Z - Y.$$

Bew. Es ist $A : C = B - A : C - B$, also altern. et compon.
$B : B - A = 2C - B : C - B$, also dividendo
$B - (B - A) : B - A = C : C - B$, hieraus dividendo
$B - 2(B - A) : B - A = B : C - B$ also ist der Satz für eine Reihe von drei Gliedern richtig.

Ferner: $B : C - B = D : D - C$, also auch
$B - 2(B - A) : B - A = D : D - C$, hieraus dividendo
$B - 3(B - A) : B - A = C : D - C$, also auch für drei Glieder richtig, u. s. w.

Zus. Aus unserm Satze folgt:

$$B - (n - 1)(B - A) : B - n(B - A) = Z : Y$$

also für das dritte Glied d. h. für $n = 2$

$$B - (B - A) : B - 2(B - A) = C : B, \text{ oder}$$
$$2A - B : A = B : C.$$

Anmerkung. Dieses Theorem ist das 5te bei Wolf in seiner (lateinischen Ausgabe der) Algebra. Er sagt §. 187: „Sind drei Zahlen harmonisch proportionirt, so verhält sich der Ueberschuß der doppelten ersten über die zweite zur ersten, wie die zweite zur dritten." Und umgekehrt. S. Horrebow §. 30.

Ferner aus $2A - B : A = B : C$ folgt
$C : A = B : 2A - B$, und
$C + A : C = 2A : B$, oder
$C + A : 2A = C : B.$

Dieß ist der bei Wolf in §. 191 enthaltene Satz: „Sind drei Größen harmonisch proportionirt, so verhält sich die Summe der ersten und letzten zum Doppelten der ersten, wie die letzte zur mittlern." Man kann dieß auch so ausdrücken: „Sind drei Größen harmonisch proportionirt, so verhält sich die Summe der beiden äußern zu einer derselben, wie die andere zur Hälfte der mittlern, oder wie das Doppelte der andern äußern zur mittlern" und erhält dadurch die Sätze bei Horrebow §§. 22 u. 23.

179. **Lehrsatz.** Ist Z das n^{te} Glied einer harmonischen Reihe, deren beide erste Glieder A und B sind, so hat man

$$Z = \frac{A \,.\, B}{B - (n-1)(B-A)} = \frac{A \,.\, B}{B + (n-1)(A-B)}.$$

Bew. Da $A : C = B - A : C - B$, so ist

$$C = \frac{A \,.\, B}{2A - B} = \frac{A \,.\, B}{B + 2A - 2B} = \frac{A \,.\, B}{B - 2(B-A)}$$

also für 3 Glieder der Satz erwiesen.

Eben so ferner da $B : D = C - B : D - C$,

$$D = \frac{BC}{2B-C} = \frac{B}{2B - \frac{AB}{2A-B}} \cdot \frac{AB}{2A-B}$$

$$= \frac{AB^2}{4AB - 2B^2 - AB}$$

$$= \frac{AB}{3A-2B} = \frac{AB}{B-3(B-A)}$$

also der Satz auch für 4 Glieder richtig.

Auf gleiche Weise erhält man

$$E = \frac{C \,.\, D}{2C - D}$$

und durch Substitution der für C und D bereits gefundenen Werthe,

$$E = \frac{A \,.\, B}{B - 4(B-A)}$$

u. s. w.; daher allgemein für das n^{te} Glied

$$Z = \frac{A \,.\, B}{B - (n-1)(B-A)}$$

Zus. 1. Hieraus ergiebt sich

1) daß man jedes Glied einer harmonischen Reihe finden kann, wenn man die beiden Anfangsglieder und die Stellenzahl des gesuchten Gliedes kennt.
2) daß wenn die beiden Anfangsglieder und außerdem ein beliebiges gegeben sind, man finden kann, das wievielte dieses letztere ist, oder dessen Stellenzahl bestimmen.

Zus. 2. Man sieht ferner hieraus, daß eine wachsende harmonische Reihe nicht immer beliebig weit fortgeführt werden kann; weil dann $B > A$, und mithin der Ausdruck $B - (n-1)(B-A)$ endlich Null werden.

Dagegen ist es eben so einleuchtend, daß die Reihe beliebig weit fortgesetzt werden kann, wenn sie eine fallende ist, wo $B < A$, wie dieß auch schon oben (176) gezeigt wurde.

Eine steigende Reihe, in welcher der Unterschied der beiden ersten Glieder ein genauer Theil des zweiten Gliedes ist, ist endlich, d. h. hat eine begränzte Anzahl Glieder, weil zuletzt $(n-1)(B-A)$ so groß als B, also $B - (n-1)(B-A)$ gleich Null werden muß, so daß der Bruch, zu dem jener Ausdruck als Nenner gehört, nicht dargestellt werden kann.

Ist der Unterschied $B - A$ kein genauer Theil von B, so wird es immer ein Vielfaches dieses Unterschiedes geben $m.(B-A)$ das noch kleiner als B, so daß $B - m(B-A)$ noch positiv; dessen

nächsthöheres dagegen $(m + 1)(B - A)$ größer als B, so daß nicht nur das Glied $\frac{A \,.\, B}{B - (m + 1)(B - A)}$ sondern auch alle folgenden negativ werden.

Es sei z. B. das erste Glied einer solchen Reihe 20, das zweite 36, so ist $B - A = 16$ und $A \,.\, B = 720$; also die Glieder dieser Reihe:

$$20,\ 36,\ \frac{720}{36 - 2.16},\ \frac{720}{36 - 3.16},\ \frac{720}{36 - 4.16}\ \text{u. s. w.}$$

oder $20,\ 36,\ \frac{720}{4},\ \frac{720}{-12},\ \frac{720}{-28},\ \frac{720}{-44}$

oder $20,\ 36,\ 180,\ -60,\ -25\tfrac{5}{7},\ -16\tfrac{4}{11}$ ꝛc.

180. **Lehrsatz.** Wenn man eine beliebige Zahl der Reihe nach durch die Glieder einer arithmetischen Progression dividirt, so bilden die successiven Quotienten eine harmonische Reihe.

Horrebow §. 10. — Lamy p. 465.

Bew. Aus dem vorigen Satze weiß man, daß eine harmonische Reihe, A, B, C, D ꝛc. auch so ausgedrückt werden kann:

$$\frac{A \,.\, B}{B},\ \frac{AB}{B + (A - B)},\ \frac{AB}{B + 2(A - B)},\ \ldots\ldots\ \frac{AB}{B + n(A - B)}$$

wo offenbar $A \,.\, B$ eine beliebige constante Größe ist, und B, $B + (A - B)$, $B + 2(A - B) \ldots\ B + n(A - B)$ eine arithmetische Reihe bilden.

Zus. 1. Die reciproken Werthe von den Gliedern einer arithmetischen Reihe d. h. die Quotienten, die man erhält, wenn man die Einheit durch diese Glieder dividirt, bilden eine harmonische Reihe.

Anmerkung. Nimmt man mit Horrebow diesen Satz, als Erklärung einer harmonischen Reihe an, so lassen sich daraus nicht nur unsere Erklärung, sondern auch die übrigen Sätze herleiten.

Zus. 2. Hebt man solche Glieder einer harmonischen Reihe aus, die um gleich viel Zwischenglieder getrennt sind, so bilden auch diese eine harmonische Reihe.

Horrebow §. 12.

Bew. Denn stellt man sie als Brüche dar, so bilden ihre Nenner auch jetzt noch eine arithmetische Reihe.

181. **Lehrsatz.** Bilden drei Zahlen eine arithmetische Proportion, so sind die drei Produkte aus der ersten und zweiten, aus der ersten und dritten, und aus der zweiten und dritten, stets harmonisch proportionirt.

Lamy p. 464. pr. 4.

Bew. Es sei also $\div$ A, B, C, mithin

$A - B = B - C$, aber es ist

$A \,.\, B : B \,.\, C = A : C$ (143) also auch

$A \,.\, B : B \,.\, C = A \,.\, (B - C) : C \,.\, (A - B)$ (143)

oder $A \,.\, B : B \,.\, C = A \,.\, B - AC : AC - BC$

d. h. $A \,.\, B,\ A \,.\, C,\ B \,.\, C$ sind harmonisch proportionirt.

182. **Lehrsatz.** Nimmt man zwischen zwei gegebenen Zahlen M, N das arithmetische Mittel (A) und auch die mittlere harmonische

Proportionale H, so bilden diese vier Zahlen stets eine geometrische Proportion, in welcher die beiden gegebenen die äußern, und die gefundenen die mittlern Glieder, oder umgekehrt, ausmachen.

Bew. Nach (168, Zus. 1) ist

$$A = \frac{M + N}{2}, \text{ und}$$

nach (174 Zus. 3)

$$H = \frac{2 M N}{M + N}.$$

Da nun $1 : M = N : M . N$, so ist auch

$$M + N : M = N : \frac{M . N}{M + N} \quad (155, \text{ Zus. } 2),$$

oder

$$\frac{M + N}{2} : M = N : \frac{2 M . N}{M + N},$$

d. i. $A : M = N : H.$

Erste allgemeine Anmerkung. Die Eigenschaften der harmonischen Proportionen finden mannigfache Anwendung in mehrern Zweigen der Naturlehre, worüber man Horrebow in der angeführten Stelle §. 45 sqq., so wie meine Positiones physicae, III, §. 105, IV, §§. 115, 294, 333, 361 vergleichen kann.

Zweite allgemeine Anmerkung. Es giebt noch eine andere Art von Proportion, welche man (Wolf Algebra §. 193) die contraharmonische nennt, und die zwischen drei Zahlen dann Statt findet, wenn der Unterschied zwischen der ersten und zweiten zu dem zwischen der zweiten und dritten sich verhält, wie die dritte zur ersten; also wenn $A - B : B - C = C : A$, also
$BA - A^2 = C^2 - BC$, und daraus

$$B = \frac{C^2 + A^2}{C + A}$$

d. h. dividirt man mit der Summe zweier Zahlen in die Summe ihrer Quadrate, so ist der Quotient, die mittlere contraharmonische Proportionale zwischen diesen Zahlen. Diese Erklärung findet sich schon bei Theon Sm.

Vierter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

183. Erklärung. Wenn man eine beliebige geometrische und eine beliebige arithmetische Reihe in eine solche gegenseitige Verbindung bringt, daß neben jedem Gliede der erstern ein Glied der letztern steht, so heißen im Allgemeinen die letztern die Logarithmen von den Zahlen der geometrischen Reihe und zwar jeder von der Zahl, neben welcher er steht.

Beispiel. Geom. R. : 1, 3, 9, 27, 81, 243 ꝛc.
Arithm. R. : 0, 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc.

Alsdann sind 0, 1, 2, 3, 4, 5 der Reihe nach die Logarithmen von 1, 3, 9, 27, 81, 243.

Anmerkung. In der ersten Anmerkung zum folgenden Lehrsatze soll der Begriff eines Logarithmen noch genauer bestimmt werden.

184. Lehrsatz. In der geometrischen Reihe

$$\overset{0}{a} \text{ (oder 1)}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a} \ldots\ldots \overset{n}{a}$$

sind die Exponenten 0, 1, 2, 3 . . . n einzeln die Logarithmen von den Zahlen a^0 (oder 1), a^1, a^2, a^3, ... a^n.

Beweis. Aus 183, 160, Zus. 4, und 170, Zus. 5.

Anmerkung 1. Bei der Berechnung und dem Gebrauche der Logarithmen wird stets und ein für allemal die Voraussetzung gemacht, daß das erste Glied der geometrischen Reihe die Einheit (oder a^0) und mithin Null selbst das Anfangsglied der arithmetischen Reihe, oder der erste in der Logarithmenreihe sei. Nach einer bestimmtern und genauern Erklärung sind daher Logarithmen „die Glieder einer mit Null beginnenden arithmetischen Reihe, gegenübergestellt den Gliedern einer mit 1 beginnenden geometrischen Reihe."

Zus. 1. Ist also allgemein a die Zahl, deren Logarithmus 1 ist, so ist $1 = \log a$, $0 = \log a^0 = \log 1$, und $x = \log a^x$.

Anmerkung 2. Die Zahl a, deren Logarithmus 1 ist, kann ganz nach Belieben gewählt werden; aber von ihr hängt es ab, welche die Zahlen sein sollen, von denen 2, 3, 4 2c. die Logarithmen sind, da sie ja die 2te, 3te, 4te 2c. Potenz von a sind. Aus diesem Grunde nennt man die Zahl, deren Logarithmus 1 ist, die Grundzahl, oder Basis des Logarithmen-Systems. Es kann daher so viele verschiedene Systeme von Logarithmen geben, als man verschiedene Zahlen zur Basis oder Grundzahl nimmt.

Zus. 2. In 160, Zus. 7 haben wir gesehen, daß man die Reihe A, Aq, $Aq^2 \ldots\ldots Aq^{n-1}$, auch stets noch zur andern (linken) Seite von A hin beliebig weit fortführen kann, so daß, wenn man $A = 1$ setzt, man erhält

$$q^{-n}, q^{-(n-1)} \ldots\ldots q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2 \ldots\ldots q^n, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{q^n}, \frac{1}{q^{n-1}}, \ldots\ldots \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, q^0, q^1, q^2 \ldots\ldots q^n,$$

mithin sind $-n$, $-(n-1)$, .. -2, -1, einzeln die Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{q^n}, \frac{1}{q^{n-1}}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}$.

Zus. 3. Es ändert sich in der gegenseitigen Beziehung unserer beiden Reihen nichts Wesentliches, wenn man zwischen je zwei Gliedern eine beliebige, aber für beide Reihen gleiche, Menge von Gliedern einschaltet, so daß man z. B. erhielt:

$$1, q^{0,25}, q^{0,5}, q^{0,75}, q^1, q^{1,25}, q^{1,5}, q^{1,75}, q^2 \text{ 2c.}$$
$$0, 0{,}25, 0{,}5, 0{,}75, 1, 1{,}25, 1{,}5, 1{,}75, 2 \text{ 2c.}$$

Es giebt daher keine Zahl, deren Logarithmus man nicht bestimmen könne. Denn welche auch diese Zahl sein, und welchen Werth auch q haben möge, immer muß jene zwischen zwei Glieder der Reihe q, q^2, q^3 2c. fallen, folglich als ein Glied dieser, gehörig interpolirten, Reihe selbst angesehen werden können, da es keine Zahl giebt, die nicht als eine Potenz oder Wurzel jeder beliebigen Zahl q angesehen werden könnte (160, Zus. 8).

Zus. 4. Man kann also jetzt die noch bestimmtere Erklärung aufstellen: „Logarithmen sind die Exponenten derjenigen Potenzen, zu denen man irgend eine constante Zahl (q) erheben muß, um in diesen nach und nach alle möglichen Zahlen zu erhalten; die constante Zahl (q) ist die Basis oder Grundzahl des erhaltenen Logarithmensystems.
La Croix Algèbre §. 242.

185. Lehrsatz. Die Summe der Logarithmen zweier Zahlen ist gleich dem Logarithmen des Produktes aus diesen Zahlen.

Beweis. Aus 184, 172 und 162.

Zus. 1. Der Logarithme des Produktes aus einer beliebigen Menge von Zahlen ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Zahlen; also

$$\log a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = \log a + \log b + \log c + \log d.$$

Zus. 2. Der Logarithmus einer Potenz von einer Zahl ist gleich dem Produkte aus dem Exponenten in den Logarithmen der Zahl selbst; also

$$\log a^n = n \,.\, \log a.$$

Beweis. Aus Zus. 1 und 122.

Zus. 3. Besitzt man Tafeln, in denen sich die Logarithmen aller Zahlen befinden, so braucht man nur nachzusehen, welche Zahl neben demjenigen Logarithmus steht, welcher der Summe der Logarithmen mehrerer gegebenen Zahlen gleich ist, und man weiß, daß jene erstere Zahl gleich dem Produkte aus diesen letztern ist, so daß man also durch die Hülfe solcher Tafeln die lästige Operation des Multiplicirens auf die viel einfachere des Addirens zurückführen kann.

186. Lehrsatz. Die Logarithmen (x, y) einer und derselben Zahl (z) aus zwei verschiedenen Systemen haben ein unveränderliches Verhältniß zu einander, wie auch der Werth von z sich ändern möge.

Beweis. Es seien die beiden logarithmischen Systeme:

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3 \,.....\, a^x$$
$$b^0,\ b^1,\ b^2,\ b^3 \,.....\, b^y$$

Man nehme nun an, daß: $a^x = z = b^y$, so ist: $x \,.\, \log a = y \,.\, \log b$, oder: $x : y = \log b : \log a$, also haben x und y ein constantes, von z unabhängiges Verhältniß zu einander.

187. Lehrsatz. Der Unterschied der Logarithmen zweier Zahlen ist gleich dem Logarithmus des Quotienten, den man durch Division einer dieser Zahlen durch die andere erhält; also

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}.$$

Beweis. Aus 184, Zus. 2, 172 und 162.

Zus. 1. Der Logarithmus von der nten Wurzel einer Zahl ist gleich dem nten Theile von dem Logarithmus dieser Zahl.

Beweis. Nach 185, Zus. 2, verbunden mit 122, Anm. 3, ist

$$\log b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log b$$

Zus. 2. Besitzt man Tafeln, in denen sich die Logarithmen aller Zahlen finden, so kann man alles Dividiren auf das viel einfachere Subtrahiren von Logarithmen, so wie das Wurzelausziehen auf eine einfache Division zurückbringen.

188. Lehrsatz. Sind drei Zahlen sehr wenig von einander verschieden, so kömmt das Verhältniß ihrer Unterschiede sehr nahe dem Verhältnisse der Unterschiede ihrer Logarithmen.

Beweis. Aus 184 und 169.

189. Lehrsatz. In jedem Logarithmensysteme sind die Logarithmen der Grundzahl und aller ihrer Potenzen gegeben, sie sind nämlich ganze Zahlen, und zwar die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 ꝛc. selbst. Die Logarithmen aller übrigen Zahlen sind Brüche und zwar

ächte Brüche für die Zahlen zwischen Eins und der Grundzahl, unächte dagegen für alle Zahlen, die größer als die Basis.

Beweis. Aus 184, und 184, Zus. 2.

Zus. Bei unsern gewöhnlichen Logarithmen, die man Tafel-Logarithmen zu nennen pflegt, weil sie sich in unsern gewöhnlichen Logarithmentafeln finden, oder auch Briggische Logarithmen, weil der Engländer Henry Briggs sie zuerst berechnete, ist die Grundzahl 10. Daher ist, wie immer, 0 der Logarithmus von 1, 1 der Logarithmus von 10 oder 10^1, 2 von 100 oder 10^2, 3 von 1000 oder 10^3 ꝛc. Die übrigen Logarithmen drückt man durch Decimalbrüche aus. Daher beginnen alle den Zahlen zwischen 1 und 10 zugehörigen mit 0, worauf eine Reihe von Decimalen folgt. Eben so fangen alle Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 mit 1, an, und hierauf folgt dann ein Decimalbruch ꝛc.

Die Logarithmen der Brüche zwischen 1 und 0,1 fallen zwischen 0 und —1, die für die Brüche zwischen 0,1 und 0,01 fallen zwischen —1 und —2 ꝛc. s. 184, Zus. 2.

Jeder Logarithmus besteht demnach aus einer ganzen Zahl, 0, 1, 2, 3 ꝛc., die man seine Charakteristik nennt, und aus einem Decimalbruche, welcher den Namen Mantisse führt.

Die Charakteristik ist positiv oder negativ, je nachdem der Logarithmus einer Zahl zugehört, die größer oder kleiner als Eins ist; und die Menge ihrer Einheiten ist immer gerade um Eins kleiner als die Menge der Ziffern, aus denen die Zahl besteht, wenn sie eine ganze Zahl ist, oder als die Menge der Nullen, die der Nenner enthält, wenn sie ein Decimalbruch ist. 0 ist also die Charakteristik für die Zahlen zwischen 1 und 10, 1 für die Zahlen 10 und 100, 2 für die zwischen 100 und 1000 ꝛc. 0 für die Brüche zwischen 1 und 0,1, —1 für die zwischen 0,1 und 0,01 ꝛc.

Anmerkung. In den kleinern Logarithmen-Tafeln pflegte man besonders in früherer Zeit der Mantisse eines jeden Logarithmen auch noch die Charakteristik vorzusetzen, was aber ganz überflüssig und nutzlos ist, da letztere, nach dem vorhen Gesagten, so leicht sich bestimmen läßt.

190. Lehrsatz. Die Logarithmen aller der Zahlen, die weder die Grundzahl noch eine ihrer Potenzen sind, werden dadurch berechnet, daß man sowohl in der geometrischen Reihe, welche die Potenzen der Grundzahl bilden, (durch Aufsuchen mittlerer Proportionalen) als auch in der arithmetischen Reihe der Logarithmen (durch Aufsuchen arithmetischer Mittel) einschaltet.

Beweis. Aus 184, Zus. 3.

Anmerkung 1. Sollte man z. B. den Logarithmen von 5 berechnen, so fällt diese Zahl zwischen die Glieder 1 und 10 der geometrischen Reihe, man muß also zuförderst zwischen diesen und eben so zwischen den ihnen entsprechenden Gliedern, 0 und 1 in der Reihe der Logarithmen einschalten. Man sucht also die mittlere Proportionale zwischen 1 und 10 d. i. $\sqrt{1 \cdot 10} = \sqrt{10} = 3{,}162277$, der Logarithmus derselben ist das arithmetische Mittel zwischen 0 und 1, d. i. 0,5. Da jene Proportionale noch von 5, für welche der Logarithmus soll berechnet werden, verschieden ist, so schaltet man aufs Neue ein, und zwar in der geometrischen Reihe zwischen 3,162277 und 10, weil 5 zwischen diesen liegt, und in der arithmetischen demnach zwischen 0,5 und 1. Man nimmt also die mittlere Proportionale zwischen 3,162277 und 10 d. i. $\sqrt{31{,}62277} = 5{,}623413$ und

findet als zugehörigen Logarithmen $\frac{0,5+1}{2} = 0,75$. Nun schaltet man zwischen 3,162277 und 5,623413 ein, nimmt also $\sqrt{3,162277 \cdot 5,623413} = 4,216964$, zu welcher Zahl der Logarithme $\frac{0,5+0,75}{2} = 0,625$ gefunden wird. Man schaltet jetzt zwischen 4,216964 und 5,623413 ein, und fährt überhaupt auf diese Weise fort, bis man eine mittlere Proportionale findet, welche der in Rede stehenden Zahl 5 sehr nahe kömmt. Man vergl. Anmerk. 3.

Anmerkung 2. Man sieht hieraus, wie es kömmt, daß, obgleich die Logarithmen Exponenten von Zahlen sind, die eine geometrische Progression bilden, gleichwohl in den Tafeln die Zahlen, zu denen Logarithmen gehören, eine arithmetische Progression bilden, — es ist die natürliche Zahlenreihe. Man hat nämlich alle die Mittelglieder, die zwischen 0, und 1, zwischen 1 und 2 2c. fallen, und die man berechnen mußte, um die übrigen zu finden, weggelassen. Die Berechnung des Logarithmen einer Zahl ist Beantwortung der Frage: welche Potenz ist diese Zahl von der Basis? So findet man $5 = 10^{0,69897}$, und deßhalb ist 0,69897, der Exponent dieser Potenz, der Logarithme von 5.

Anmerkung 3. Da, wie man sieht, die Berechnung der Logarithmen, auf Ausziehung von Quadratwurzeln aus sogenannten incommensurabeln Zahlen beruht, so können sie nicht genau, sondern nur näherungsweise gefunden werden. Je genauer man jene Wurzeln bestimmt d. h. auf je mehr Decimalen man sie verfolgt, desto genauer werden natürlich auch die Logarithmen. In den meisten Tafeln enthalten die Mantissen der Logarithmen sieben Decimalen.

Anmerkung 4. Die oben angegebene Art und Weise war es, auf welche Briggs und Blacq die Tafellogarithmen berechneten. Das Lästige und Mühselige dieses Verfahrens wird merklich gemindert dadurch, daß

1) man nur die Logarithmen der Primzahlen 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 2c. wirklich zu berechnen nöthig hat, die Logarithmen aller übrigen durch bloße Addition schon gefundener erhält z. B. $\log 21 = \log 7 + \log 3$;
2) die mittlern Proportionalen, die man zur Aufsuchung eines Logarithmen berechnen muß, nicht nutzlos und verloren sind, wenn der Logarithme nun endlich gefunden, sondern bei der Berechnung der übrigen Logarithmen auch wieder benutzt werden können;
3) bei Zahlen, die sehr wenig von einander verschieden sind, das arithmetische Mittel an die Stelle der geometrischen Proportionale treten kann (169).

Später hat man andere Methoden entdeckt, durch welche man den Logarithmen jeder beliebigen Zahl viel einfacher und kürzer berechnen kann. Eine derselben soll am Schlusse des Buches in einem Anhange mitgetheilt werden.

Anmerkung 5. Neeper, ein Schottischer Edelmann, der erste Erfinder der Logarithmen, hat seine Logarithmen nicht für 10, sondern für 2,7182818 als Basis berechnet. Bei ihm also ist $\log 2,7182818 = 1$. Man nennt diese Logarithmen, nach ihrem Erfinder Neepersche, auch natürliche, oder, wegen ihres Zusammenhanges mit der Quadratur der Hyperbel, hyperbolische. Es mag genügen, hier anzumerken, daß der Neepersche oder hyperbolische Logarithme von 10 ist 2,3025850; daß also (186) der hyperbolische Logarithme irgend einer Zahl zum Tafellogarithmen eben dieser Zahl sich verhält, wie 2,3025850 : 1. Man kann daher einen Tafellogarithmen in einen Neeperschen verwandeln, wenn man ihn durch 2,3025850 multiplicirt; und umgekehrt verwandeln sich Neepersche in Tafellogarithmen, wenn man jene durch 2,3025850 dividirt, oder durch $\frac{1}{2,3025850}$ d. i. 0,4342744 multiplicirt.

191. Wenn auch eine ausführliche Anweisung zum Gebrauche der Logarithmentafeln dem mündlichen Vortrage überlassen bleiben muß, so dürfte es doch nicht zweckwidrig sein, Folgendes hier noch anzumerken. Alles hierher Gehörige läßt sich unter fünf Fälle bringen.

Erster Fall. Man soll den Logarithmen zu einer in den Tafeln befindlichen Zahl finden. — Ist für sich klar.

Zweiter Fall. Man soll den Logarithmen eines Decimalbruchs

finden, der größer oder kleiner als 1 sein kann, aber nicht mehr Ziffern enthält, als die höchste in den Tafeln, die man gebraucht, befindliche Zahl. Man sucht den Logarithmen zu dieser Zahl, als ob es eine ganze Zahl wäre, nimmt aber die Charakteristik, wenn sie in den Tafeln stehen sollte, nicht dazu, sondern bestimmt sie nach 189, Zus.

Hierbei muß aber noch ausdrücklich bemerkt werden, daß man zur Erlangung einer größern äußern für die Praxis nicht unwichtigen Gleichmäßigkeit aller Logarithmen unter einander, die negative Charakteristik des Logarithmen von einem ächten Bruche vermeidet, und statt ihrer die positive setzt, welche sie zu 10 ergänzt, also + 9 anstatt — 1, eben so 8 anstatt — 2 rc. Dadurch wird freilich ein solcher Logarithmus um 10 zu groß, allein es ist ungemein leicht, bei Rechnungen mit ihnen, namentlich bei den, am häufigsten vorkommenden, Additionen und Subtractionen, die nöthige Rücksicht darauf zu nehmen.

Dritter Fall. Man soll den Logarithmen einer Zahl, sie sei ganze oder Decimalbruch, finden, welche aus mehr Ziffern besteht, als die höchste Zahl der Tafeln.

Man sucht in den Tafeln diejenige der höchsten Zahlen, deren Ziffern mit eben so vielen von den höchsten Ziffern der gegebenen Zahl übereinstimmen, hängt sowohl ihr selbst, als ihrer nächsten Nachfolgerinn soviel Nullen an, daß jede gleich viel Ziffern mit der gegebenen Zahl erhält.

Darauf nimmt man die Unterschiede zwischen diesen beiden Zahlen selbst, dann zwischen der gegebenen und der kleinern von ihnen, und endlich zwischen den beiden Logarithmen, die neben jenen aus den Tafeln genommenen Zahlen stehen, sucht zu diesen drei Unterschieden eine vierte Proportionale, welche nach S. 188 nahe dem Unterschiede zwischen den Logarithmen der gegebenen Zahl und der kleinern aus den Tafeln genommenen gleich ist; addirt also dieselbe zum Logarithmen der kleinern Zahl, und bestimmt endlich die Charakteristik nach 189, Anmerk.

In den mündlichen Vortrag muß die Erörterung der Gründe verwiesen werden, warum dieses Verfahren bei sehr großen Zahlen mehr Genauigkeit fordert, als bei kleinern. Eben dahin gehört die Erläuterung des Gebrauchs der in den mittlern und größern Tafeln befindlichen mit P. P. d. i. partes proportionales überschriebenen Columme.

Vierter Fall. Zu einem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl zu finden.

Findet sich der Logarithme genau in den Tafeln, so ist die danebenstehende Zahl die gesuchte; wo nicht, so begnügt man sich entweder mit der Zahl, deren Logarithme dem gegebenen am nächsten kömmt, oder, wenn man genauer zu Werke gehen will, sucht man auf ähnliche Weise wie im vorigen Falle, einen Proportionaltheil, indem man schließt: wie sich der Unterschied der beiden Logarithmen zwischen die der gegebene fällt, zum Unterschiede ihrer Zahlen verhält, eben so verhält sich der Unterschied zwischen dem gegebenen Logarithmen und

dem kleinern zum Unterschiede zwischen der gesuchten Zahl und der kleinern; und addirt diesen letztern zur kleinern Zahl.

Bei größern Tafeln braucht man diese Rechnung gar nicht auszuführen, sondern man findet das Resultat schon in der Columme P. P. vor.

Fünfter Fall. Man soll den Logarithmen eines beliebigen, ächten oder unächten Bruches finden.

Man zieht vom Logarithmus des Zählers den des Nenners ab, und erhält so den gesuchten. Die zu ihm gehörige Zahl ist der Decimalbruch, der dem gegebenen gewöhnlichen Bruche gleich ist.

Zum Schlusse möge noch eines Rechnungsvortheils erwähnt werden, der Beachtung verdient: Wenn eine Addition schon an sich, unter sonst gleichen Umständen, leichter und schneller zu Stande gebracht wird als eine Subtraction, so ist es in solchen Fällen, wo man von der Summe mehrerer Logarithmen die Summe mehrerer andern abziehen soll, doppelt vortheilhaftwenn man Alles auf eine einzige Addition zurückbringen kann. Und dieß geschieht einfach dadurch, daß man anstatt der zu subtrahirenden Logarithmen selbst, deren dekadische Ergänzungen d. h. die Unterschiede nimmt, die man erhält, wenn man die Logarithmen von 10 abzieht und die Summe aller vorhandenen Logarithmen um das Sovielfache von 10 vermindert, so viel dekadische Ergänzungen sich unter den Summanden befinden.

Sollte man z. B. $\log \frac{23 \cdot 303 \cdot 277}{13 \cdot 24 \cdot 47}$ suchen, so hätte man

$$\begin{array}{rl}
\log 23 &= 1{,}3617278 \\
\log 303 &= 2{,}4814426 \\
\log 277 &= 2{,}4424798 \\
\text{dek. E. } \log 13 &= 8{,}8860566 \\
\text{dek. E. } \log 24 &= 8{,}6197888 \\
\text{dek. E. } \log 47 &= 8{,}3279021 \\
\hline
\log \frac{23 \cdot 303 \cdot 277}{13 \cdot 24 \cdot 47} &= 2{,}1193977
\end{array}$$

Durch eine leichte Uebung bringt man es dahin, von einem Logarithmen, den man vor sich sieht, die dekadische Ergänzung so fort hinzuzuschreiben, indem man seine niedrigste Ziffer von 10, jede der übrigen aber von 9 (in Gedanken) abzieht.

Viertes Buch.

Von der Aehnlichkeit der Figuren, und den Verhältnissen ihrer Seiten und Flächenräume.

Einleitung.

192. Erklärung. Aehnliche geradlinige Figuren sind diejenigen, in denen die Winkel, einzeln genommen, einander gleich, und die Seiten, die gleiche Winkel einschließen und außerdem gleichen Winkeln gegenüberstehen, dasselbe Verhältniß zu einander haben.
Eucl. VI, Erkl. 1. — L. G. III, Erkl. 2.

Beispiel. In Fig. 87 ist W. BAE = GFK, AED = FKJ, EDC = KJH, DCB = JHG, CBA = HGF und

AB : BC : CD : DE : EA = FG : GH : HJ : JK : KF.

Anmerkung 1. In dieser Erklärung ist von zwei Eigenschaften die Rede, die nicht immer und nothwendig beisammen sind, sondern von denen die eine ohne die andere Statt haben kann. So sind z. B. in den Vierecken Fig. 41 und 46 die Winkel alle gleich, aber die Seiten nicht proportionirt; umgekehrt sind in den drei Parallelogrammen CDBA, CDba, und CD$\beta\alpha$ Fig. 43 zwar die Seiten einzeln gleich und daher gewiß proportionirt, aber die Winkel sind ungleich, also weder in dem einen noch in dem andern Falle sind die Figuren ähnlich. Nur die Dreiecke machen hier eine Ausnahme. Im zweiten Lehrsatze dieses Buches (196) soll gezeigt werden, daß in ihnen beide Eigenschaften unzertrennlich verbunden sind, und später (218) soll nachgewiesen werden, was erfordert wird, damit bei Vielecken etwas Aehnliches Statt finde.

Anmerkung 2. Es ist nicht leicht, eine genaue, vollkommen genügende und für alle Fälle gleich passende Erklärung von Aehnlichkeit zu geben. Die natürlichste Vorstellung, die man damit verbindet, bleibt immer die einer gleichen Gestalt; daß zwei Figuren dieselbe Gestalt haben, und zwar die eine im Großen, die andere im Kleinen; denn hätten sie auch gleiche Größe, so wären sie congruent. Man sucht also die Aehnlichkeit 1) darin, daß beide Figuren dieselbe Anzahl von Ecken haben, 2) in der Gleichheit mehrerer von ihren Stücken, namentlich ihrer Winkel, und 3) in der Proportionalität der Seiten. Der erste Punct ist von selbst klar; nicht minder der zweite, da wenn die Seiten nicht in beiden Figuren dieselbe Neigung oder Lage gegen einander hätten, an eine Aehnlichkeit gar nicht zu denken wäre. Das dritte ist auch nothwendig, und zwar ist es nicht genug, daß überhaupt die Seiten, die gleiche Winkel einschließen, proportionirt sind z. B. in Fig. 87 daß AB : AE = FK : FG, sondern es müssen auch die in beiden Figuren sich entsprechenden Seiten gleichen Winkeln gegenüberstehen; denn nur dann werden diese Seiten in beiden Vielecken in derselben Ordnung auf einander folgen, wodurch eben die Gleichheit der Gestalt, oder die Aehnlichkeit zu Stande gebracht wird *).

---

*) Besondere Aufmerksamkeit verdient die Erklärung von Aehnlichkeit, welche Herr Oberlehrer Dr. Tellkampf in seiner „Vorschule der Mathematik" aufgestellt hat. Zwei Figuren von gleicher Eckenzahl sind, dieser Erklärung zufolge, ähnlich, wenn sie sich in eine solche gegenseitige Lage bringen lassen, daß die Geraden (Convergenten), welche ihre Ecken verbinden, alle in einem einzigen Puncte (Convergenzpunct) zusammenlaufen, und durch die homologen d. i. auf derselben Convergente liegenden Ecken propor-

Anmerkung 3. Euclides hat in seiner Erklärung die Worte: „und außerdem gleichen Winkeln gegenüberstehen" weggelassen; aber es möchte sich kaum in Abrede stellen lassen, daß sie einen wesentlichen Theil der Erklärung ausmachen.

Anmerkung 4. Man kann mit Recht die Frage aufwerfen, warum man zur Aehnlichkeit der Figuren Gleichheit der Winkel fordert und nicht blos Proportionalität, wie für die Seiten? — Die Antwort liegt nahe. Die Proportionalität aller Winkel in zwei Figuren von gleicher Eckenzahl (Anm. 2) würde nothwendig und immer ihre Gleichheit zur Folge haben. Denn wäre (Fig. 87) A : B : C : D : E = F : G : H : J : K, so wäre auch (153) A : F = A + B + C + D + E : F + G + H + J + K und da (104, Zus. 2) A + B + C + D + E = F + G + H + J + K, auch A = F, und so für die übrigen Winkel.

Anmerkung 5. Im VII Buche soll gezeigt werden, wie unsere Erklärung auch auf den Kreis könne angewandt werden.

193. Erklärung. **In ähnlichen Figuren heißen gleichgelegene, oder entsprechende (homologe) Seiten diejenigen, welche gleiche Winkel einschließen, und außerdem gleichen Winkeln gegenüberstehen.**

Anmerkung. Euclides giebt davon keine ausdrückliche Erklärung in seinem sechsten Buche, beweist aber im vierten Satze desselben, daß in ähnlichen Dreiecken die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen, entsprechende (ὁμόλογοι πλευραί) sind; und aus dem Beweise selbst erhellt, daß Euclides diesen Ausdruck hier in demselben Sinne gebraucht, in welchem er von entsprechenden Gliedern einer Proportion (V B. Erkl. 13) spricht (133).

Aus dem Folgenden wird man sehen, daß die Seiten, welche gleichgelegene oder entsprechende heißen, in der Proportion, zu der sie gehören, entweder beide Vorder- oder beide Hinterglieder sind.

194. Erklärung. **Von ähnlichen Figuren sagt man, sie seien auf verschiedene gegebene Linien gleichmäßig gestellt, wenn nicht nur die Winkel an diesen Linien gleich, sondern auch die übrigen gleichen Winkel und die proportionirten Seiten in allen Figuren sich in derselben Ordnung (von jenen Linien aus gerechnet) folgen.**

Anmerkung. Euclides giebt keine Erklärung von gleichmäßig gestellten Figuren, setzt aber VI, 22, eine solche Stellung voraus und leitet aus der Ordnung, in welcher die proportionirten Seiten folgen, den Beweis her. In Fig. 87 sind die Figuren M und N gleichmäßig auf die Seiten AE und FK gestellt.

Erster Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Dreiecke und Parallelogramme und dem Verhältnisse ihrer Flächenräume.

---

195. Lehrsatz. **Wenn man in einem Dreiecke (ADE Fig. 45) eine Gerade (BC) parallel einer der Seiten (DE) zieht, so theilt sie die beiden andern Seiten in proportionirte Stücke und umgekehrt; wenn eine Gerade zwei Dreiecksseiten in proportionirte Stücke theilt, so ist sie parallel der dritten.**

Eucl. VI, 2. — L. G. III, 15, 16.

Erster Beweis. Man muß zwei Fälle unterscheiden, den wo

---

tionirt getheilt werden. — Ein Hauptvorzug dieser Erklärung besteht darin, daß sie auch dann noch ihre Gültigkeit behält, wenn die in Betracht kommenden Figuren nicht mehr in derselben Ebene liegen.

Anm. des Uebers.

die Linien AB und BD ein gemeinschaftliches Maaß haben, und den, wo ihnen dieß fehlt d. h. wo sie incommensurabel sind.

Erster Fall. Haben AB und BD das gemeinschaftliche Maaß AZ, so wird also AB die AZ mehrere male z. B. m mal und BD eben so z. B. n mal in sich fassen. Zieht man alsdann ZQ || DE, so läßt sich durch S. 63 erweisen, daß AC die AQ auch m mal und CE dieselbe Linie n mal in sich faßt, woraus (143, und 146) folgt, daß AB : BD = AC : CE. — Den umgekehrten Satz beweist man indirect. Wäre nicht ED || BC, so sei EM || BC. Nach dem ersten Theile unseres Satzes wäre alsdann AC : CE = AB : MB, was offenbar mit der Voraussetzung AC : CE = AB : BD unvereinbar ist.

Zweiter Fall. Haben AB und BD kein gemeinschaftliches Maaß, so soll nichts desto weniger AB : BD = AC : CE sein. Denn wäre dem nicht also, wäre z. B. AB : BM = AC : CE, so müßte nach dem zweiten Theile des ersten Falles EM || BC, aber nach Voraussetzung ED || BC, es müßte also auch EM || ED sein, was offenbar ungereimt ist.

Anmerkung 1. Dieser Beweis scheint aus der wahren Natur der Sache hergeleitet, und daher vor andern den Vorzug zu verdienen. Euclides giebt einen andern, den wir hier noch beifügen wollen, da ihn doch vielleicht einige vorziehen möchten. Zwar stützt er sich auf den bei uns erst später (200) folgenden Lehrsatz, allein dieser ist von den ihm zunächst vorausgehenden Sätzen unabhängig, und hätte daher, gleich wie bei Euclides an die Spitze des ganzen Buches gestellt werden können.

Zweiter Beweis (aus Euclides). Man ziehe die Geraden BE, CD (Fig. 88), so sind die Dreiecke BCD und BCE gleichflächig; nach unserm spätern Satze (200) verhalten sich die Dreiecke ABC und BCD wie ihre Grundlinien, AB und BD, eben so die Dreiecke ABC und BCE wie ihre Grundlinien AC und CE; also AB : BD = AC : CE.

Den Beweis für die Umkehrung des Satzes kann man entweder indirect, oder mit Euclides direct führen, indem man durch Hülfe des S. 200 zeigt, daß △ ABC : △ DBC = AB : BD, △ ABC : △ BCE = AC : CE und mithin, da nach Voraussetzung AB : BD = AC : CE, auch △ ABC : △ DBC = △ ABC : △ BCE, also △ DBC = △ BCE, und darum BC || DE (84, Anmerk. 2).

Zus. 1. Die ganzen Seiten haben dasselbe Verhältniß zu einander wie ihre Stücke, nämlich:

AD : AE = AB : AC = BD : CE

Beweis. Aus dem Hauptsatze und 153.

L. G. III, 15, Zus. 1.

Zus. 2. Wenn zwei Linien, die einen beliebigen Winkel bilden, von einer beliebigen Menge von Parallelen geschnitten werden, so sind die zwischen diesen Parallelen enthaltenen Stücke der einen Linie proportionirt den in derselben Ordnung genommenen Stücken der andern, also (Fig. 45) AZ : ZB : BD = AQ : QC : CE.

L. G. III, 15, Zus. 2.

Anmerkung 2. Durch diesen Satz wird man in den Stand gesetzt, in dem ersten Buche der Aufgaben die achte (erste Auflösung) und neunte aufzulösen.

196. Lehrsatz. Wenn die drei Winkel eines Dreiecks (ABC Fig. 89) einzeln den drei Winkeln eines andern Dreiecks (ADE) gleich sind, also W. BAC = DAE, ABC = ADE rc., so sind die Seiten,

welche in beiden Dreiecken gleiche Winkel einschließen und gleichen Winkeln gegenüberstehen, in demselben Verhältniß.

Eucl. VI, 4. L. G. III, 16, Zus.

Vorbereitung. Man denkt sich das kleinere Dreieck ADE in das größere ABC hineingelegt, wie in Fig. 89; alsdann ist (24) DE || BC. Zieht man nun noch DF || AC, so ist (56) DE = FC.

Beweis. Für AD, AE, AB, AC aus 195, Zus. 1; und eben so für AB, BC, AD, DE (= FC), woraus die Proportionalität von AC, CB, AE, DE von selbst folgt.

Zus. 1. Daher sind Dreiecke, die gleiche Winkel haben, ähnlich.

Anmerkung 1. Um auf die Aehnlichkeit zweier Dreiecke zu schließen, ist es genug, zu wissen, daß zwei Winkel des einen einzeln zweien Winkeln des andern gleich sind, da ja hieraus von selbst die Gleichheit der beiden dritten folgt (38, Zus. 2).

L. G. III, 18, Zus.

Anmerkung 2. Man kann nun aus dem dritten Buche der Aufgaben die 1, 2, 4, 5, 6, 10, und 12 auflösen.

Zus. 2. Sind in zwei Dreiecken (Fig. 91 und 92) die Winkel des einen den Winkeln des andern gleich und mithin (Zus. 1) die Dreiecke selbst ähnlich, so sind die aus den Spitzen gleicher Winkel gezogenen Höhenperpendikel (BG, EH) in demselben Verhältniß, wie ein Paar entsprechender Seiten, und theilen die Seiten, nach denen oder deren Verlängerungen sie gezogen sind, in proportionirte Stücke.

Zus. 3. Nimmt man auf einer Linie BD (Fig. 93) einen Punct B, und zieht aus zwei andern Puncten (D, E) zwei Linien (DC, EG), die unter einander parallel, und sich eben so zu einander verhalten wie ihre Entfernungen von dem angenommenen Puncte B (DC : EG = DB : EB), so liegen ihre Endpuncte mit dem Puncte B stets in einer geraden Linie*).

Beweis. Indirect. Lägen C und G nicht mit B, sondern mit einem andern Puncte z. B. L in gerader Linie, so wäre DL : EL = DC : EG = DB : EB, also auch DE : EL = DE : EB (153), mithin EL = EB, was offenbar unmöglich ist, so lange nicht L mit B zusammenfällt.

Anmerkung 3. Dieser Satz ist in vielen Fällen, auch in der Naturlehre von Nutzen. Man findet ihn bei Rob. Simson in seinen Kegelschnitten. Er bildet den ersten Lehnsatz zum 10ten Hauptsatze des 2ten Buches.

Anmerkung 4. Aus dem Beweise unseres Hauptsatzes ergiebt sich sehr leicht, daß wenn in zwei Dreiecken die Seiten des einen einzeln denen des andern parallel laufen, auch ihre Winkel einzeln gleich und mithin die Dreiecke selbst ähnlich sind — ein Satz, bei dessen Erörterung Legendre (III, 21) fast zu wortreich ist, und dem man noch folgenden aus (104) und (20) leicht sich ergebenden beifügen kann: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen einzeln auf denen des andern senkrecht stehen.

Man könnte diesen letztern Satz auch so aussprechen: Errichtet man auf den Seiten eines Dreiecks in beliebigen Puncten Perpendikel, so haben dieselben entweder einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, oder bilden ein Dreieck, welches dem Urdreiecke ähnlich ist. Die Fälle, wo das erstere Statt findet, kann man aus A. 21 und A. 197. kennen lernen.

Anmerkung 5. Auf unserem Satze beruht auch der Gebrauch der Transversal-Li-

---

*) Liegen die Puncte D und E auf derselben Seite von B, wie in Fig. 93, so müssen die Parallelen EG, DC auch nach einerlei Seite von BD gezogen werden; nach verschiedenen Seiten dagegen, wenn B zwischen D und E liegt.

Anm. des Uebers.

nien, wie sie sich auf allen verjüngten Maaßstäben befinden, um noch Unterabtheilungen der Längeneinheit, welche der Maßstab darstellt, bestimmen zu können.

Man braucht nur einen Blick auf Fig. 88^b zu werfen, um zu sehen, daß, weil AC durch die Horizontallinien in 10 gleiche Theile getheilt ist, das Stück der mit 1 bezeichneten dieser Linien, welches innerhalb des Dreiecks BAC liegt, 0,1 von BC ist; dasselbe Stück der mit 2 bezeichneten Linie, 0,2, das der Linie 3 0,3 ꝛc. Eben so leicht sieht man, daß in dem Dreiecke, an dessen Ecken die Zahlen 10, 10, 9 stehen, dieselben Theile nur in umgekehrter Ordnung, von oben nach unten fortgehend, sich finden. Setze ich also auf der untersten Horizontale den einen Zirkelfuß in 20 und den andern z. B. in 5, so habe ich offenbar in dieser Länge das 25fache von BC, oder 25 Theile von der Länge BC; schiebe ich dagegen den einen Zirkelfuß auf der Senkrechten 20, den andern dagegen auf der Transversale 5 von unten nach oben bis zu einer der übrigen z. B. sechsten Horizontale fort, so habe ich dieser Länge das 25,6fache von BC.

Anmerkung 6. Auf unserm Satze beruht ferner im Allgemeinen der Gebrauch des sogenannten Proportionalzirkels (Sectors bei den Engländern), den man in größern und vollständigen Reißzeugen findet. Dieses Instrument, dessen Erfindung von vielen Galilei zugeschrieben wird, besteht aus zwei Platten von Metall (auch wohl Holz), die durch ein Scharnier verbunden sind, um dessen Mittelpunct sie sich bewegen. Auf diesen Platten sieht man mehrere gerade Linien, die alle in jenem Mittelpuncte des Scharniers zusammenlaufen und auf der einen Platte genau dieselben wie auf der andern sind, sich daher paarweise entsprechen. Wir werden den Gebrauch aller dieser Linien näher angeben bei Gelegenheit der Sätze, auf welche er sich gründet. Für jetzt nur noch ein Paar Worte über die Art, wie alle diese Linien gebraucht werden, und über das Wesen des Proportionalzirkels im Allgemeinen. Werden die beiden Platten AD, AE (Fig. 88) von einander entfernt oder geöffnet, so bildet jedes Paar zusammengehöriger oder sich entsprechender Linien wie AD, AE am Mittelpuncte des Scharniers einen bestimmten Winkel. Wenn man alsdann den einen Fuß eines gewöhnlichen Zirkels, der eine bestimmte und bekannte Oeffnung hat, in einen Punct D der Linie AD stellt, und (indem man den Platten die erforderliche Oeffnung giebt) den andern in den Punct E der entsprechenden Linie, der eben so weit vom Mittelpuncte A entfernt ist, als D, so daß also AE = AD, so ist sowohl der Winkel DAE als auch die Länge von AD oder AE bestimmt. — Nimmt man mittelst des Zirkels noch die Entfernung eines zweiten Paares gleichweit vom Mittelpuncte entfernter Puncte B und C der zusammengehörigen Linien, so ist BC ∥ DE (51, Zus. 6) und darum AB : AD = BC : DE, so daß also BC dasselbe Verhältniß zu DE hat, wie AB zu AD. In diesem Wenigen ist die Grundlage der ganzen Theorie des Proportionalzirkels enthalten.

Anmerkung 7. Auf unserm Satze beruht nun noch insbesondere der Gebrauch des Linienpaares, das auf den englischen Proportionalzirkeln mit L. (lines) oder mit E. P. (equal parts), auf den französischen mit den Worten parties egales bezeichnet ist. Diese Linien sind nämlich in gleiche Theile, meist in 200 getheilt und dienen hauptsächlich dazu, eine gegebene Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen; da aus dem in der vorigen Anmerkung Gesagten hervorgeht, daß BC (Fig. 88) denselben Theil von DE ausmacht, welcher AB von AD ist. Wollte man z. B. DE in acht gleiche Theile theilen, so giebt man dem Proportionalzirkel eine solche Oeffnung, daß die Spitzen eines um die gegebene Weite DE geöffneten Zirkels, in zwei Theilpuncte der Linie AD, AE einpassen, deren beistehende Theilungszahlen irgend ein Vielfaches von 8 z. B. 192 ausmachen; und mißt dann bei unveränderter Oeffnung des Proportionalzirkels die Entfernung der beiden Theilpuncte unserer Linien, denen die achtmal kleinern Theilungszahlen also in unserm Falle 24 zugehören.

Anmerkung 8. Auf unsern Satz gründet sich endlich auch noch der Gebrauch der Zirkel, welche auf beiden Seiten des Scharniers mit Füßen versehen sind, also deren vier haben. In Deutschland führen sie gewöhnlich den Namen Theilzirkel, in England proportional-passers und in Frankreich compas de reduction. Einen solchen Zirkel stelle Fig. 88^a dar. Da AD = AE, und AB = AC, so ist BC ∥ DE, also △ ADE ähnlich △ ABC, und daher AB : AD = CB : DE, d. h. es ist CB derselbe Theil von DE, welcher AB von AD ist. Meistentheils ist AB die Hälfte von AD oder jeder der kürzern Füße halb so groß als jeder der längern. Aber man richtet sie auch nicht selten so ein, daß man den Mittelpunct A verschieben, und die Längen des kürzern und längern Fußes in jedes beliebige Verhältniß zu einander bringen kann. Eine ausführliche Beschreibung dieser Zirkel findet man bei Bion, B. III, Cap. 1.

197. **Lehrsatz.** Wenn die drei Seiten eines Dreiecks (AB,

AC, BC Fig. 94) dasselbe Verhältniß zu einander haben, wie die Seiten eines andern Dreiecks (DE, DF, EF), so sind je zwei solche Winkel beider Dreiecke, die von proportionirten Seiten eingeschlossen werden, von gleicher Größe.

Eucl. VI, 5. — L. G. III, 19.

Vorbereitung zum Beweise. Man denke sich über der Seite DF ein Dreieck DFG so construirt, daß W. FDG = A, W. DFG = C, und mithin G = B ist.

Beweis. Aus der Hypothesis und der Gleichheit der Winkel in den beiden Dreiecken ABC und DGF, folgert man durch Hülfe von S. 156, daß die Seiten der Dreiecke DEF und DGF einzeln gleich sind, daß es mithin auch ihre Winkel sind ꝛc.

Zus. Zwei Dreiecke, deren Seiten proportionirt sind, sind ähnlich.

Anmerkung 1. Bei Dreiecken hat also das zweite Erforderniß für die Aehnlichkeit, die Proportionalität der Seiten jederzeit das erste, die Gleichheit aller Winkel zur Folge; so wie umgekehrt Gleichheit der Winkel nicht Statt finden kann, ohne daß zugleich die Seiten proportionirt sind; also bei Dreiecken — aber auch nur bei ihnen — ist es, um auf ihre Aehnlichkeit zu schließen, hinreichend, eine der beiden, die Aehnlichkeit geradliniger Figuren begründenden Bedingungen nachgewiesen zu haben.

Anmerkung 2. Dieser Satz ist für die Aehnlichkeit genau das, was der frühere frühere Satz (50) für die Congruenz war. Eine ähnliche Uebereinstimmung mit Lehrsätzen der Congruenz wird man leicht bei den beiden folgenden Sätzen wahrnehmen.

198. Lehrsatz. Wenn ein Winkel (ABC Fig. 89) eines Dreiecks (ABC) gleich ist einem Winkel (DBF) eines andern Dreiecks (DBF) und die Seiten, welche diese beiden Winkel einschließen (AB und AC, BD und BF) proportionirt sind, so sind auch die beiden andern Winkel des erstern Dreiecks einzeln denen des zweiten gleich, und mithin die Dreiecke ähnlich.

Eucl. VI, 6. — L. G. III, 20.

Vorbereitung. Man denkt die Dreiecke so über einander gelegt, daß die beiden gleichen Winkel sich decken.

Beweis. Alsdann ist (195, Zus. 1) DF || AC ꝛc.

Zus. Wenn man in einem Dreieck (ABC Fig. 95), in welchem eine Linie (DJ) parallel mit einer der Seiten (AC) gezogen ist, nach letzterer aus der Gegenecke (B) eine beliebige Menge von Geraden zieht, so theilen diese die beiden parallelen Linien in proportionirte Stücke, so daß AK : KL : LM : MC = DE : EF : FG : GJ.

L. G. III, 22.

Anmerkung. Hierauf gründet sich die zweite Auflösung der 8ten Aufgabe im ersten Buche.

199. Lehrsatz. Wenn zwei Seiten (AB, AC) eines Dreiecks (ABC Fig. 89) proportionirt sind zweien Seiten (BD, DF) eines andern Dreiecks (DBF) und außerdem ein Winkel (ABC) des erstern, aber nicht der von den in Rede stehenden Seiten eingeschlossene, sondern einer ihrer Gegenwinkel gleich ist dem gleichgelegenen Winkel (DBF) des andern Dreiecks, so sind die beiden Dreiecke ähnlich, wenn von dem andern Paar der Gegenwinkel (ACB, DFB) jeder entweder ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer ist.

Eucl. VI, 7.

Beweis 1. Man lege das Dreieck DBF so auf Dreieck ABC, daß die beiden gleichen Winkel sich decken. Sind nun die Winkel bei

F und C rechte, so ist offenbar DF || AC und die Richtigkeit unseres Satzes einleuchtend. Aber auch dann muß nothwendig DF || AC sein, wenn die genannten Winkel beide entweder spitz oder stumpf sind. Denn gesetzt, es wäre dem nicht also, es könnte also eine andere Linie wie z. B. AL || DF sein; so wäre DB : AB = DF : AL, aber nach Voraussetzung auch DB : AB = DF : AC, also AL = AC, und darum W. ALC = C, folglich wenn C ein spitzer, auch ALC ein solcher, also ALB ein stumpfer, also auch der ihm, wegen DF || AL, gleiche DBF ein solcher, was offenbar der Voraussetzung widerspricht, da ja, wenn C ein spitzer ist, es auch DFB sein soll.

Auf ähnliche Weise zeigt man, daß, wenn AC nicht || DF, auch die Winkel C und DFB nie beide zugleich stumpfe sein könnten.

Beweis 2. Unser Satz läßt sich auch direct beweisen. Man mache (Fig. 94) W. FDG = BAC, DFG = BCA; dann muß auch G = B = E sein. In den Dreiecken ABC und DFG ist alsdann (197) AB : AC = DG : DF, aber nach Voraussetzung auch AB : AC = DE : DF, also DE = DG, und daher △ DEF ≅ △ DGF (49) ꝛc.

Anmerkung 1. Man sieht deutlich, welche enge Verwandtschaft zwischen diesem unsern Satze und dem frühern S. 49 Statt findet; daher auch in beiden so weit als möglich dieselben Ausdrücke und Wendungen gebraucht worden sind. Der Grund, warum das zweite Paar der Gegenwinkel (ACB und DFE) gleichartig d. h. beide zugleich entweder stumpfe oder rechte oder spitze sein müssen, ist, wie auch schon im ersten Buche bemerkt wurde, kein anderer, als weil nach S. 29, Zus. 2 sich vom Puncte A zwei gleiche Linien ziehen lassen, die also zu AB dasselbe Verhältniß, nämlich das von DF : DE haben, von denen aber die eine mit BC einen spitzen, die andere einen stumpfen Winkel bildet, während der Winkel F derselbe bleiben würde. Sind die Winkel in unsern Dreiecken ungleichartig, so ist der eine das Supplement des andern.

Anmerkung 2. Was in der zweiten Anmerkung zu S. 49 gesagt wurde, gilt auch hier, so daß man nicht selten unsern Satz auch so ausspricht: „Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportionirt, und die beiden Winkel gleich sind, welche den größern dieser Seiten gegenüberstehen.“ Denn jeder Dreieckswinkel, der nicht der größten Seite gegenübersteht, kann nur ein spitzer sein.

Anmerkung 3. Und daraus ergiebt sich alsdann, daß rechtwinkelige Dreiecke oder stumpfwinkelige, in denen die stumpfen Winkel gleich, ähnlich sein müssen, wenn die ein anderes Winkelpaar einschließenden Seiten proportionirt sind — ein Satz, der auch eine unmittelbare Folge aus unserm allgemeinen Hauptsatze ist.

200. Lehrsatz. Dreiecke (ABC, KCD Fig. 98), welche dieselbe Höhe haben, aber auf verschiedenen Grundlinien (BC, CD) stehen, haben, was ihren Flächeninhalt anlangt, dasselbe Verhältniß zu einander, wie die Grundlinien und umgekehrt. Dasselbe gilt für Parallelogramme.

Eucl. VI, 1.

Vorbereitung zum Beweise. Man verlängere nach beiden Seiten hin die Grundlinie BD, und schneide auf der einen eine beliebige Menge, z. B. m Stücke, BE, EF, FG ꝛc. ab, von denen jedes gleich BC; auf der andern Seite von D aus schneide man gleichfalls eine beliebige Menge, z. B. n Stücke, DH, HJ ꝛc. ab, die alle gleich CD; verbinde sämmtliche Durchschnittspuncte mit A. Da nach Voraussetzung AK || BD, so ist △ KCD = △ ACD, und man darf daher, so lange man blos, wie in unserm Satze, auf den Flächenraum sieht, an die Stelle von △ KCD durchweg △ ACD setzen.

Beweis. Unserer Construction zufolge ist △ AGB das mfache des △ ABC, und △ ADJ das nfache von △ ACD. Nun ist aber

nach (84, Zus. 2) △ AGB entweder > oder = oder < △ ADJ, je nachdem BG entweder > oder = oder < DJ, also ist (148) △ ABC : △ ACD (oder △ KCD) = BC : CD.

Den Beweis für die Umkehrung führt man indirect, indem man zeigt, daß man in eine Ungereimtheit verfällt, sobald man annimmt, die Dreiecke ABC und KCD lägen nicht zwischen denselben Parallelen. Für die Parallelogramme folgt der Satz aus dem für die Dreiecke in Verbindung mit 56, Zus. 1.

Anmerkung 1. In den meisten Lehrbüchern wird dieser Satz so erwiesen, daß man die Grundlinie des einen Dreiecks in gleiche Theile theilt z. B. in m; und die andere in n Theile von eben dieser Größe. Alsdann schließt das eine Dreieck m, und das zweite n gleicher Dreiecke in sich, beide verhalten sich also wie m : n d. h. wie ihre Grundlinien. Aber es fällt in die Augen, daß man hier stillschweigend annimmt, die beiden Grundlinien seien commensurabel zu einander, was doch nicht immer wahr ist. Und darum ist dieser Beweis unvollkommen.

Anmerkung 2. Man kann nun die zweite Auflösung der 21ten Aufgabe im 2ten Buche zu Stande bringen.

201. **Lehrsatz.** Stehen Dreiecke oder Parallelogramme (BAC, FGH Fig. 100) auf gleichen Grundlinien (BC, FH), so verhalten sich ihre Flächenräume wie ihre Höhen.

Tacquet zu Euclid. VI, 1, Zus.

Vorbereitung. Ziehe die Senkrechten AD, GJ; nimm DE = BC, JK = HF, ziehe AE und GK.

Beweis. Betrachtet man AD, GJ als Grundlinien, und DE, JK als Höhen, so ist (200) △ ADE : △ GJK = AD : GJ, also, weil △ ADE = △ ACB, und △ GJK = GHF ꝛc.

Für Parallelogramme folgt der Satz aus dem, was eben bewiesen worden, in Verbindung mit 56, Zus. 1.

Anmerkung. Man ist nun in den Stand gesetzt, die erste Aufgabe des 4ten Buches zu lösen.

202. **Lehrsatz.** Die Flächenräume von Parallelogrammen oder Dreiecken, die verschiedene Grundlinien (CD, CK Fig. 99) und verschiedene Höhen (DE, KH) haben, stehen im zusammengesetzten Verhältnisse dieser Grundlinien und Höhen (CD . DE : CK . KH).

Vorbereitung. Man verwandelt die beiden schiefwinkeligen Parallelogramme in die Rechtecke FD und MK, und legt letzteres so auf ersteres, daß sie einen Winkel gemein haben, und verlängert KH bis N.

Beweis. Man wendet S. 200 erst auf die Rechtecke MK, FK, dann auf FK, FD an und folgert daraus den Satz durch Hülfe von S. 155.

Anmerkung 1. Man sieht hier wieder ein Beispiel, wo ein allgemeiner Satz erst dann erwiesen werden kann, wenn seine Richtigkeit in besondern Fällen dargethan ist; denn nichts anders als besondere Fälle unseres allgemeinen Satzes bilden die beiden vorhergehenden Sätze.

Zus. 1. Parallelogramme oder Dreiecke, die in ihren Winkeln übereinstimmen, stehen im zusammengesetzten Verhältnisse der Seiten, die gleiche Winkel einschließen. Denn in den ähnlichen Dreiecken (ABC, DEF Fig. 91 und 92) ist BG : EH = AB : DE, also

△ ABC : △ DEF = AC . BG : DF . EH = AC . AB : DF . DE.

Anmerkung 2. Unser Zusatz macht bei Euclides den 23ten Satz im 6ten Buche aus. Der dort gegebene Beweis ist sehr scharfsinnig. Euclides bringt die beiden Parallelogramme in eine solche Lage gegen einander (Fig. 52), daß zwei ihrer gleichen

Winkel Scheitelwinkel werden, vollendet darauf HJ, und leitet den Beweis aus der Vergleichung dieses Parallelogramms mit jedem der beiden gegebenen AG und GD her.

Anmerkung 3. Die in diesem ersten Zusatze ausgesprochene und bewiesene Behauptung gilt nicht blos für Dreiecke, die in allen ihren Winkeln übereinstimmen, sondern auch für solche, die einen Winkel gleich haben; wie man sich sogleich überzeugen wird aus

Zus. 2. Wenn zwei Dreiecke (DAE, BAC Fig. 96) einen gleichen Winkel haben, so stehen ihre Flächenräume im zusammengesetzten Verhältnisse der diese Winkel einschließenden Seiten (AD, AE und AB, AC).

Papp. collect. math. VII, 146. — L. G. III, 24.

Vorbereitung. Ziehe BE.

Beweis. $\triangle$ ADE : $\triangle$ ABE = AD : AB (200).
$\triangle$ ABE : $\triangle$ ABC = AE : AC
mithin $\triangle$ ADE : $\triangle$ ABC = AD . AE : AB . AC

Zus. 3. Sind Parallelogramme oder Dreiecke gleichflächig, so stehen ihre Grundlinien im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhen (150 und 151).

Tacquet zu Euclides VI, 15 Zus.

Zus. 4. Sind Parallelogramme oder Dreiecke gleichflächig und haben überdieß einen Winkel gleich, so verhalten sich die diesen Winkel in der einen Figur einschließenden Seiten umgekehrt wie eben diese Seiten der andern, und umgekehrt.

Weil alsdann BD und JK Fig. 99 dasselbe Verhältniß zu einander haben wie ED und HK.

Eucl. VI, 14, 15.

Anmerkung 4. Euclides beweist seinen 14ten und 15ten S. auf dieselbe Weise, die wir schon oben in Anmerk. 2 mitgetheilt haben.

Anmerkung 5. Man ist nun im Stande, die zweiten Auflösungen der 14ten, 15ten und 16ten Aufgabe im 2ten Buche auszuführen.

Zus. 5. In allen Rechtecken von gleichem Flächenraum verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen; und umgekehrt d. h. sind vier Linien proportionirt, so ist das Rechteck, das aus den beiden äußern construirt wird, gleichflächig dem aus den beiden mittlern.

Eucl. VI, 16.

Anmerkung 6. Euclides leitet diesen Satz aus seinem 14ten ab, den er auf die oben (Anmerk. 2) angegebene Weise bewiesen hat. Wir werden bald (203, Zus. 3 und 4) zeigen, daß der Satz genau derselbe ist als unser früherer Satz 150 und dessen erster Zusatz. Es würde befremden müssen, diesen wichtigen Satz gar nicht in dem 5ten Buche des Euclides zu finden, wenn er nicht mit dem so eben genannten 16ten und mit dem 17ten des 6ten Buches zusammenfiele, und der Verfasser die Proportionalität in noch bestimmterer und engerer Beziehung auf die Geometrie betrachtet hätte.

Zus. 6. Ist ein Quadrat einem Rechtecke gleichflächig, so ist seine Seite die mittlere Proportionale zwischen den Seiten des Rechtecks, und umgekehrt d. h. sind drei Gerade stetig proportionirt, so ist das über der mittlern beschriebene Quadrat gleichflächig dem Rechtecke aus den beiden äußern.

Eucl. VI, 17.

Anmerkung 7. Dieser Zusatz folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden 5ten, und hiermit kömmt das überein, was unten (203, Zus. 4) gesagt ist.

Anmerkung 8. Unser Zusatz 5 kann zu einer Erweiterung des Zus. 2 benutzt werden. Nämlich:

Zus. 7. Wenn ein gleichschenkeliges Dreieck (FAG Fig. 96) einen Winkel mit einem andern Dreieck (BAC) gemein hat, und der

Schenkel AF des erstern die mittlere Proportionale zwischen den den gemeinschaftlichen Winkel einschließenden Seiten AB, AC des andern Dreiecks ist, so haben beide Dreiecke gleichen Flächenraum.

L. G. IV, 15.

203. Lehrsatz. **Wenn die Grundlinie (CD Fig. 99) eines Rechtecks (CFED) oder eines ihm gleichflächigen Parallelogramms (CABD) die Grundlinie eines andern Rechtecks (CKHM) oder diesem gleichflächigen Parallelogramms (CKJG) m mal in sich faßt, und wenn die Höhe (DE) des ersten Rechtecks (oder Parallelogramms) die Höhe (KH) des andern n mal in sich schließt, so verhält sich der Flächenraum des ersten Rechtecks (oder Parallelogramms) zu dem des zweiten, wie das Produkt aus m und n zu Eins; und das erstere Rechteck (oder Parallelogramm) schließt das zweite so viel mal in sich, so viel Einheiten in dem Produkte enthalten sind, welches man durch Multiplication der Zahlen m und n erhält.**

Beweis. Aus 202.

Zus. 1. **Ist das Rechteck MK einmal angenommen und bestimmt, so kann es als Maaß für alle Rechtecke, und mithin (118) für alle geradlinigen Figuren betrachtet und gebraucht werden.**

Als allgemeines Flächenmaaß nimmt man nun das Rechteck MK so, daß seine Grundlinie und Höhe gleich sind, d. h. daß es ein Quadrat ist, dessen Seite CK als Einheit zur Messung der Längen von den Linien CD, DE rc. gebraucht wird und deren eigne Länge meist entweder eine Linie, oder einen Zoll, oder Fuß, oder eine Ruthe u. s. w. beträgt.

Das Quadrat MK heißt die Flächeneinheit, oder auch Quadrateinheit, um es von Längeneinheit, die zur Messung von Abständen oder Längen dient, zu unterscheiden. Enthält also das Rechteck CK 10 Fuß, so sind dieß natürlich solche, die sich auf die Quadrateinheit beziehen, die man daher auch Quadratfuße nennt, und es heißt dieß so viel als unser Rechteck schließt in sich 10 gleiche Quadrate, wo in jedem die Seite einen Fuß beträgt.

Anmerkung 1. Aus dem Gesagten ergiebt sich von selbst, daß irgend zwei gleichartige Flächen- oder Quadrat-Einheiten von verschiedener Benennung sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Zahlen, welche das Verhältniß der entsprechenden Längeneinheiten darstellen. So ist z. B. das Verhältniß eines Quadratzolles zu einem Quadratfuße wie $1^2 : 12^2$ d. h. wie $1 : 144$, oder es gehen 144 Quadratzolle auf einen Quadratfuß, — wenn ein (Längen-) Fuß 12 (Längen-) Zolle enthält. — Eucl. VIII, 11.

Anmerkung 2. Man sieht daraus, wie man mit Euclides (VII, Erkl. 16) ein Produkt aus zwei Factoren eine Flächenzahl nennen kann, deren Seiten eben diese Factoren sind; ferner daß Flächenzahlen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Seiten stehen, (VIII, 5) und daß ähnliche Flächenzahlen diejenigen sind, deren Seiten proportionirt sind (VII, Erkl. 21). Hierin liegt auch der Grund, warum die Alten ebene Oerter (Flächen-Oerter) und ebene (Flächen-) Aufgaben alle diejenigen Probleme nannten, bei denen Produkte aus nicht mehr als zwei Zahlen oder nur Flächenzahlen gebraucht wurden. Diese Erklärung soll in dem fünften Buche (252, Anmerk. 5) näher entwickelt werden.

Anmerkung 3. Nach diesen Erörterungen können verschiedene unserer frühern Sätze noch auf eine andere Weise, als es geschehen ist, ausgedrückt, und zugleich die von andern Schriftstellern gebrauchten Ausdrücke erläutert werden. Es soll dieß in den folgenden Zusätzen geschehen.

Zus. 2. **Das Produkt zweier Zahlen, welche die Längen zweier Linien bezeichnen, drückt den Inhalt des aus diesen Linien construir-**

ten Rechtecks aus. Daher wird ein Verhältniß, das aus zwei andern zusammengesetzt ist, dargestellt durch die Rechtecke aus den Linien, welche je zwei entsprechende Glieder der einfachen Verhältnisse bilden; und ebenso ein zweifach hohes Verhältniß von einem gegebenen durch die Quadrate der das letztere ausdrückenden Linien.

Zus. 3. Sind vier Linien proportionirt, so ist das Rechteck aus den äußern gleichflächig mit dem Rechtecke aus den mittlern; wie dieß schon in 202, Zus. 5 aus andern Gründen hergeleitet ist; und man sieht, wie dieser Satz mit dem frühern in 150 übereinkommt.

Zus. 4. Sind drei Linien proportionirt, so ist das Quadrat über der mittlern gleichflächig mit dem Rechtecke aus den beiden äußern; wie dieß schon in 202, Zus. 2 aus andern Gründen nachgewiesen; und man sieht, wie dieser Satz übereinkommt mit dem frühern 150, Zus. 1.

Zus. 5. Den Inhalt eines Parallelogramms kann man durch das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe ausdrücken, was mit dem frühern Satze 82, Zus. 2 übereinkommt.

Auf ähnliche Weise läßt sich der Flächeninhalt eines Quadrates durch die zweite Potenz oder das Quadrat seiner Seite darstellen.

Anmerkung 4. Aus diesem Grunde geschah es, daß die Alten sich der Ausdrücke δύναμις (zweite Potenz) γραμμῆς, oder γραμμὴ δύναται etc. bedienten, um den Flächenraum des über dieser Linie beschriebenen Quadrates zu bezeichnen. — Bildet nun die Menge von Einheiten, welche den Flächeninhalt eines Quadrates ausdrückt, keine Quadratzahl, so ist die Seite desselben incommensurabel in Beziehung auf die Einheit, welche die Länge mißt. Dieß findet namentlich immer Statt bei der Diagonale eines Quadrates in Beziehung auf dessen Seite, wie wir oben 126, Anmerkung 2 gezeigt haben, und wie auch Euclides im letzten Satze seines 10ten Buches bewiesen hat.

Zus. 6. Der Flächenraum eines Dreiecks kann dargestellt werden durch das Produkt aus der Grundlinie in die Hälfte der Höhe, oder aus der Höhe in die Hälfte der Grundlinie, kurz durch die Hälfte des Produktes aus Grundlinie und Höhe, und dieß stimmt überein mit 84, Zus. 1.

Zus. 7. Der Flächenraum eines regelmäßigen Vielecks wird ausgedrückt durch die Hälfte des Produktes aus dem Umfange und dem Höhenperpendikel (aus dem Mittelpuncte auf eine der Seiten) in Uebereinstimmung mit S. 117.

Zus. 8. Der Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Paralleltrapezes wird dargestellt, durch das Produkt aus der an den beiden rechten Winkeln anliegenden Seite in die halbe Summe der beiden parallelen Seiten, oder (168, Zus.) in das arithmetische Mittel zwischen den beiden parallelen Seiten; in Uebereinstimmung mit S. 86.

Zus. 9. Ein Rechteck auf eine gegebene Linie zu stellen d. h. über einer gegebenen Geraden ein Rechteck zu construiren, welches mit einem gegebenen gleichflächig ist, kömmt überein mit der Aufsuchung eines Quotienten, den man erhält, wenn das Produkt zweier Zahlen durch eine gegebene dritte dividirt wird; jedenfalls kömmt es darauf hinaus eine Linie zu finden, die mit einer gegebenen Linie ein Rechteck bildet, das einem gegebenen Rechtecke gleichflächig ist, — was der Gegenstand der 16ten Aufgabe im zweiten Buche ist.

Anmerkung 5. Alle vorhergehende Ausdrücke sind genau, wenn man sie auf die

rechte Weise gebraucht. Aber sie sind an sich betrachtet nicht geometrisch, und man giebt nicht blos zu ungenauen sondern zu völlig unrichtigen Vorstellungen Veranlassung, wenn man sie, wie viele thun, ohne Weiteres und vom Anfange an gebraucht. Die Alten erlaubten sich nie dergleichen ungenaue Ausdrücke, wie z. B.: ein Rechteck ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie und Höhe. Wir haben auch, wie sichs gebührt, in dem Vorhergehenden uns immer solcher Ausdrücke: wird ausgedrückt durch, wird dargestellt durch, kömmt überein mit, anstatt des ungenauen und unrichtigen ist gleich, bedient. Man kann im eigentlichen und strengen Sinn keine Linie durch eine andere multipliciren sondern nur Zahlen; und mithin auch solche Zahlen, welche die Längen zweier mit einem gemeinschaftlichen Maaße gemessener Linien ausdrücken; und nichts anders als dieses versteht man unter der Multiplication oder dem Produkte zweier Linien. Die Multiplication zweier Linien giebt immer ein Rechteck oder Quadrat; aber die Menge von Quadrat-Einheiten — d. h. von gleichen Quadraten, deren Seiten als Einheiten oder gemeinschaftliches Maaß für die Länge gebraucht werden — welche der Flächenraum eines gegebenen Rechtecks in sich faßt, ist gleich dem Produkte der Seiten dieses Rechtecks d. h. gleich dem Produkte der Zahlen, welche die Längen der Seiten in Beziehung auf jene genannte Einheit, oder gemeinschaftliches Maaß ausdrücken. Will nun Jemand die genannten Ausdrücke, nachdem ihr wahrer Sinn genau erklärt ist, gebrauchen, so thue er solches, aber doch nur als eine Art von Abkürzung im Ausdrucke.

Anmerkung 6. Man kann alsdann, wenn man sich dieser Art, die Sachen auszudrücken, bedient, anstatt Rechteck aus A und B das Zeichen $A \cdot B$, und für Quadrat über A, das Zeichen A^2 gebrauchen.

Man sehe hierüber: d'Alembert Melanges, V, p. 211 sqq. — Tacquet scholion zum 34sten und 44sten des ersten, und zum 22sten Satze des sechsten Buches des Euclides. — Clavius über eben diese Stellen.

Zus. 10. Bezeichnet man die Flächenräume zweier Parallelogramme oder Dreiecke durch F und f, ihre Grundlinien mit G und g, ihre Höhen mit H und h, so ist nach unserm Hauptsatze:

$$F : f = G \cdot H : g \cdot h,$$ woraus man folgert:

1) Sind entweder die Grundlinien oder die Höhen, aber nicht beide zugleich, zu einander incommensurabel, so müssen auch stets (130, Zus. 1) die Flächenräume F und f gleichfalls zu einander incommensurabel sein.

2) Sind Höhen und Grundlinien zugleich incommensurabel gegen einander, so kann das Verhältniß der Flächenräume (F : f) ein commensurables sein. (128, Anmerkung 2).

Dieser Fall findet z. B. Statt, wenn man in einem gleichschenkeligen, rechtwinkeligen Dreieck über einer Cathete und der Hypotenuse Quadrate beschreibt.

3) Werden Quadrate über Linien beschrieben, die zu einander commensurabel sind, so verhalten sich ihre Flächenräume d. h. die Quadrate selbst wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl d. i. wie zwei Zahlen, aus denen man die Quadratwurzeln ziehen kann.

4) Quadrate können zu einander incommensurabel sein. Denn es sei (Fig. 124) AF incommensurabel zu FD, z. B. wie $\sqrt{15} : 2$; man suche zwischen beiden die mittlere Proportionale FB, so ist $FB_q = 2\sqrt{15} = \sqrt{60}$, also $FB_q : FD_q = \sqrt{60} : 4 = \sqrt{15} : 2$, also diese beiden Quadrate incommensurabel zu einander, aber $FB_q : AF_q = \sqrt{60} : \sqrt{15}$ d. i. $= 2 : 1$, also diese Quadrate zu einander commensurabel.

Es giebt also Quadrate, die zu einander incommensurabel sind;

es giebt Linien, die zu einander incommensurabel sind, deren Quadrate aber commensurabel werden; und es giebt endlich solche incommensurable Linien, deren Quadrate gleichfalls incommensurabel sind. Euclides nennt die erstere Art von Linien incommensurabel in Länge, die zweite incommensurabel in Potenz, und er spricht demgemäß den 9ten Satz seines 10ten Buches so aus: „Die Quadrate, welche über Linien beschrieben werden, die in Länge commensurabel sind, verhalten sich zu einander, wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, und umgekehrt. Die Quadrate, welche über Linien beschrieben werden, die in Länge incommensurabel sind, verhalten sich nicht wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl und umgekehrt. Linien (dieß ist der Zusatz), die commensurabel in Länge sind, sind es auch stets in Potenz, aber in Potenz commensurable Linien sind es nicht immer in Länge; Linien, die in Länge incommensurabel sind, sind es nicht immer in Potenz, aber die in Potenz incommensurablen sind auch stets in Länge incommensurabel."

Zus. 11. Aus den vorhergehenden Zusätzen, besonders aus dem vierten sieht man, daß alle Verhältnisse, wie zusammengesetzt sie auch sein mögen, allezeit durch das Verhältniß zweier geraden Linien ausgedrückt werden können.

Denn es sei z. B. $M : N = A . B . C : D . E . F$. Die einfachen Verhältnisse $A : D$, $B : E$, $C : F$, können immer, seien sie commensurabel oder incommensurabel, durch gerade Linien dargestellt werden.

Ist nun P die mittlere Proportionale zwischen A und B, Q die zwischen D und E, R aber die dritte Proportionale zu P und Q, so ist (Zus. 4)

$P_q = A_r B$
$Q_q = D_r E$ also
$P_q : Q_q = A . B : D . E$, aber, weil
$P : Q = Q : R$ so ist (160, Zus. 4)
$P_q : Q_q = P : R$, also
$P : R = A . B : D . E$, mithin
$M : N = P . C : R . F$, also wenn

S die mittlere Proportionale zwischen P und C, T die zwischen R und F, U aber die dritte Proportionale zu S und T,

$S_q : T_q = P . C : R . F$, aber
$S_q : T_q = S : U$, also
$M : N = S : U$, und auf ähnliche Weise in allen möglichen Fällen.

204. Lehrsatz. Nimmt man in zwei ähnlichen Dreiecken (ABC, DEF Fig. 91 und 92) zwei Paare entsprechender Seiten (AC, DF, BC, EF) so ist das Rechteck aus der einen Seite (AC) des einen Dreiecks und der nicht entsprechenden des andern (EF) gleichflächig mit dem Rechtecke aus den beiden übrigen Seiten (BC, DF).

Bew. Aus 196, und 202, Zus. 4.

Anmerkung. Die Richtigkeit unseres Satzes soll später (251, Anmerk.) noch auf einem anderen Wege dargethan werden.

205. Lehrsatz. Aehnliche Dreiecke verhalten sich in Ansehung

ihrer Flächenräume, wie die Quadrate ihrer entsprechenden Seiten, oder, mit andern Worten, sie stehen in dem zweifach hohen Verhältnisse ihrer entsprechenden Seiten.

Eucl. VI, 19. — L. G. III, 25.

Vorbereitung. Es seien BG und EH (Fig. 91 u. 92) die Höhen der Dreiecke ABC und DEF.

Bew. Aus 202, und 196, Zus. 2, oder, ohne alle Vorbereitung, aus 202, 196, und 156, Zus. 2.

Anmerkung. Wir haben früher (137, Anmerk.) bemerkt, daß der Ausdruck zweifach hohes Verhältniß bei Euclides eine andere Bedeutung zu haben scheint, als bei uns, haben aber darauf (160, Zus. 1, Anmerk.) gezeigt, daß beide Bedeutungen in der That zusammenfallen. Zufolge der dem Ausdrucke zweifach hohes Verhältniß bei Euclides beigelegten Bedeutung muß man beweisen, daß, wenn BL die dritte Proportionale zu AB und DE ist, die Proportion $\triangle ABC : \triangle DEF = AB : BL$ Statt habe. Man kann diesen Beweis folgendermaßen führen: Man ziehe CL. Nun ist

$BC : BA = EF : ED$ also auch
$BC : EF = BA : ED$; aber
$BA : ED = ED : BL$ (Voraussetzung), also
$BC : EF = ED : BL$, folglich
$\triangle BLC = \triangle DEF$ (202, Zus. 4); aber
$\triangle BCA : \triangle BLC = AB : BL$, (200), also
$\triangle BCA : \triangle DEF = AB : BL$.

206. Lehrsatz. **Wenn eine Gerade (BD Fig. 97) einen Winkel (CBA) eines Dreiecks (ABC) halbirt, und bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite (CA) dieses Winkels verlängert wird, so stehen die Segmente (AD, CD) dieser Seite in demselben Verhältnisse zu einander wie die an sie angränzenden Dreiecksseiten (AB, BC), und das Quadrat der Halbirenden, vermehrt um das Rechteck aus den genannten Segmenten der Gegenseite ist gleichflächig dem Rechtecke aus den beiden andern Dreiecksseiten.**

Eucl. VI, 3. — L. G. III, 17, 31.

Vorbereitung für den ersten Theil: Verlängere AB und ziehe CE || BD.

Beweis. Aus 24, 25, und 52 zeigt man, daß EB = BC, und wendet dann 195 an.

Vorbereitung für den zweiten Theil: Mache W. DAF = W. ABF, verlängere BD bis F und ziehe CF.

Beweis. Aus Hypoth. und Construction zeigt man, daß $\triangle ABF \sim \triangle ADF \sim \triangle BCD$, also

$$\begin{aligned} AB_r BC &= BF_r BD \ (204) \\ &= BD_q + BD_r DF \ (72, \text{Zus. } 2) \\ &= BD_q + AD_r DC \ (204). \end{aligned}$$

Zus. 1. $AD + DC$ oder $AC : AD = AB + BC : AB$ **d. h. es verhält sich die Gegenseite des halbirten Winkels zu einem ihrer Segmente, wie die Summe der beiden andern Seiten zu der an jenem Segmente anliegenden Seite.**

Erste und wichtige Anmerkung. Der erste Theil unseres Satzes ist der dritte im sechsten Buche des Euclides. Aber er gilt auch für den Außenwinkel CBE (Fig. 101 und 102), dann trifft die Halbirende BD die Verlängerung der Gegenseite, doch nicht immer, und nicht immer nach derselben Seite hin. Ist nämlich W. EBC = 2 BCA und mithin Dreieck ABC gleichschenkelig, so muß BD || AC sein, und kann also kein Durchschnitt dieser beiden Linien Statt finden; ist W. EBC < 2 BCA, so wird BD

nach derselben Seite von BC hin mit AC convergiren, wie in Fig. 101; umgekehrt aber nach der Seite von BA hin, wenn W. EBC > 2 BCA, wie in Fig. 102.

Zieht man nun in Fig. 101 CO ∥ AB, so ist

DA : DC = AB : CO, aber es ist
W. BOC = EBO (25) = OBC, also
BC = CO (52), mithin
DA : DC = AB : BC.

Man ziehe ferner QA so, daß W. QAB = BDC, so ist

△ DCB ∾ △ BQA, da W. QBA = DBC, also
DB : BC = BA : BQ, mithin
$CB_rBA = BD_rBQ$ (202, Zus. 5)
$= BD_rDQ - BD_q$ (72, Zus. 2)

Aber, weil △ DCB ∾ △ DQA, so ist

DB : DC = DA : DQ, also
$CB_rBA = DC_rDA - BD_q$

d. h. der Ueberschuß des Rechtecks aus den Segmenten der dem halbirten Außenwinkel gegenüberliegenden und verlängerten Gegenseite über das Quadrat der Halbirenden ist gleich dem Rechtecke aus den beiden andern Dreiecksseiten.

Unsern Satz kann man daher allgemein, möge ein innerer oder äußerer Winkel halbirt werden, so aussprechen: Wenn eine Gerade einen innern oder äußern Winkel eines Dreiecks halbirt und bei hinreichender Verlängerung der Gegenseite dieses Winkels begegnet, so verhalten sich die auf dieser Gegenseite durch die Halbirende gebildeten Segmente wie die an ihnen liegenden Dreiecksseiten, und die Summe oder der Unterschied des Rechtecks aus jenen Segmenten und des Quadrates der Halbirenden ist gleich dem Rechtecke aus den beiden andern Dreiecksseiten. Robert Simson wies zuerst die Richtigkeit des ersten Theiles unseres Satzes auch für die Außenwinkel nach und gab dadurch dem 3ten S. im sechsten Buche des Euclides eine nicht unwichtige Erweiterung; aber er sagt nichts über den zweiten Theil*).

Anmerkung 3. Ist Dreieck BCA (Fig. 97a) in C rechtwinkelig und man halbirt W. CBA durch BD, so ist AC : CD = BC + BA : BC und weil AB > CB, so ist AD > CD, also AC > 2 CD, während W. ABC = 2 CBD, mithin ist AC : CD > W. ABC : CBD. Nimmt man nun W. ABE = ABC, so ist auf gleiche Weise:

CE : AC > W. CBE : CBA, also auch
CE : CD > W. CBE : CBD

und es folgt daraus der Satz, der noch näher und aus ganz andern Gründen später (372) entwickelt werden soll, nämlich:

Zus. 2. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke aus einem der spitzen Winkel nach der Gegenseite gerade Linien zieht, von denen die erstere den ganzen Winkel halbirt, die zweite die an der Cathete anliegende Hälfte halbirt, die dritte das an dieser Cathete anliegende Viertel rc., so haben die Segmente der Gegenseite, welche zwischen irgend zweien dieser Winkelhalbirenden und der Spitze des rechten Winkels liegen, ein größeres Verhältniß zu einander, als die Winkel, welche eben jene Linien mit der Cathete bilden, aus deren Endpunct sie auslaufen.

Anmerkung 4. Pappus setzt diesen Satz beim Beweise des ersten Lehrsatzes in seinem 5ten Buche voraus; sein Commentator Commandinus hat einen Beweis des Satzes gegeben.

207. Lehrsatz. Zieht man in einem Dreiecke (ACG Fig. 103) aus zwei Winkelspitzen (C, A) gerade Linien nach den Halbirungspuncten der Gegenseiten, so schneiden sich dieselben (in D) stets so, daß der obere d. h. zwischen Winkelspitze und Durchschnittspunct enthaltene Abschnitt einer jeden doppelt so groß als der untere ist; und

---

*) Ein Beweis für den zweiten Theil unseres Satzes, der wegen seiner Einfachheit und seiner für den äußern und innern Winkel gleichen Anwendbarkeit gekannt zu werden verdient, ist in dem Anhange zu diesem Buche (310) angedeutet worden.
Anm. des Uebers.

die Gerade, welche man aus der dritten Winkelspitze (G) durch diesen Durchschnittspunct nach der Gegenseite zieht, halbirt auch diese, so daß die drei Geraden, welche die Ecken mit den Halbirungspuncten der Gegenseiten verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, der jede von ihnen in zwei Stücke theilt, von denen das obere doppelt so groß als das untere ist.

Erster Theil. Vorbereitung. Ziehe FY || AG.

Beweis. Man zeigt, daß nach 196, und 149 FY $= \frac{1}{2}$ EG $= \frac{1}{2}$ AE, und mithin, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ADE und FDY auch 2 DF $=$ AD.

Zweiter Theil. Vorbereitung. Man ziehe FR || AC.

Beweis. Wie im ersten Theile zeigt man, daß FR $= \frac{1}{2}$ BC, und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ADB und FDR, daß FR $= \frac{1}{2}$ AB 2c. *).

Anmerkung. Dieser Satz ist von großem Nutzen in der Naturlehre, da er dazu dient, den Schwerpunct eines Dreiecks zu finden, der mit dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte D selbst zusammenfällt.

208. Lehrsatz. Fällt man aus zwei Winkelspitzen (G, C Fig. 104) eines Dreiecks (CAG) Perpendikel auf die Gegenseiten (CA, AG), so schneiden sich dieselben (in D) innerhalb oder außerhalb des Dreiecks, je nachdem dasselbe spitz= oder stumpfwinkelig ist; und zieht man aus der dritten Winkelspitze (A) durch diesen Durchschnittspunct (D) eine Gerade nach der dritten Dreiecksseite, so steht auch sie auf letzterer senkrecht.

Beweis. $\triangle$ CBD $\sim$ $\triangle$ CAE $\sim$ $\triangle$ GBA, also
CB : BD $=$ BG : BA
oder CB : BG $=$ BD : BA
also $\triangle$ BCG $\sim$ $\triangle$ ABD (198)
mithin W. BAD $=$ BGF
und darum W. DFG $=$ ABD $= 90^{\circ}$.

Zus. 1. Die drei Höhenperpendikel jedes Dreiecks haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Zus. 2. Im rechtwinkeligen Dreiecke ist dieser Durchschnittspunct die Spitze des rechten Winkels.

Zus. 3. Für ein gleichseitiges Dreieck fällt dieser Satz mit dem vorhergehenden zusammen, da in ihm die Höhenperpendikel auch zugleich die Seiten halbiren.

Anmerkung. Dieser Satz ist im Grunde derselbe mit dem 60ten im 7ten Buche der mathematischen Sammlungen des Pappus, wo er so ausgedrückt ist: „Es sei ein Dreieck ACG; man ziehe die Geraden AF, CE, BG, so daß AF senkrecht auf CG und die Puncte A, B, D, E im Umfange eines Kreises liegen, so sind auch die Winkel bei B und E rechte." Weil nämlich dann, wie später (275) gezeigt werden soll, W. BDE $+$ BAE $=$ ABD $+$ AED $= 180^{\circ}$ ist.

209. Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke (ABC Fig. 65.) aus der Spitze (C) des rechten Winkels eine Senkrechte (CL) auf die Hypotenuse zieht, so wird durch sie das ganze Dreieck in zwei solche Dreiecke (ACL, CBL) getheilt, die nicht nur unter einander, sondern auch dem ganzen ähnlich sind.

Eucl. VI, 8. — L. G. III, 23.

*) Ein anderer Beweis unseres Satzes ist im Anhange zum zweiten Buche (218) angedeutet worden.

Beweis. Aus 38, Zus. 2, und 196, Zus. 1.

Zus. 1. Die Senkrechte CL ist die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten der Hypotenuse, also AL : CL = CL : LB.

L. G. III, 23, 3.

Anmerkung 1. Wendet man S. 89 auf 202, Zus. 5 an, so sieht man leicht, daß unser Zusatz mit jenem S. 89 übereinkömmt, obschon er hier auf andere Weise hergeleitet ist.

Zus. 2. Jede Cathete ist die mittlere Proportionale zwischen dem an ihr liegenden Hypotenusensegmente und der ganzen Hypotenuse; also

$$AB : AC = AC : AL$$
$$\text{und } AB : BC = BC : BL$$

L. G. III, 23, 2.

Anmerkung 2. Dieser Satz ist derselbe mit 87, Zus. 1, wenn man auf letztern 202, Zus. 5. anwendet.

Anmerkung 3. Aus unserm Zusatze leitet man sehr leicht, durch Hülfe von 202, Zus. 5 und 72, Zus. 1, den Pythagoräischen Lehrsatz ab (87).

Zus. 3. Aus den beiden ersten Zusätzen, verbunden mit 202, Zus. 5, erhält man

$$CL_q = AL_r LB$$
$$CB_q = AB_r LB$$
$$\text{also } CL_q : CB_q = AL : AB$$

Dieß ist der Lehnsatz, der bei Euclides auf den 13ten Satz des 13ten Buches folgt.

Anmerkung 4. Also stehen CL und CB in dem zweifach niedern Verhältnisse von AL und AB, was man gewöhnlich so ausdrückt:

$$CL : CB = \sqrt{AL} : \sqrt{AB}$$

Die Alten würden gesagt haben: die (zweiten) Potenzen von CL und BC verhalten sich zu einander wie die Linien AL und AB.

Zus. 4. Wenn man in dem rechtwinkeligen Dreiecke ACB (Fig. 105) aus der Spitze des rechten Winkels (C) die Senkrechte CD auf die Hypotenuse zieht, und sie bis zum Durchschnitt (F) mit der in A auf AC errichteten Senkrechten AF verlängert, so sind AD und CD die mittlern Proportionalen zwischen DF und DB. Denn

$$DB : CD = CD : DA = DA : DF \text{ (Zus. 1).}$$

Anmerkung 5. Gäbe es daher ein Mittel, um, wenn DF und DB rechtwinkelig verbunden sind, die Linien AF, AC, CB so zu ziehen, daß AF und AC in einem Puncte A der verlängerten BD, so wie AC und BC in einem Puncte C der verlängerten DF sich schnitten, so wäre das berühmte Problem, zwei mittlere Proportionalen zwischen zwei gegebenen Geraden zu finden, geometrisch gelöst. Allein dieß ist nicht möglich. Plato hat inzwischen ein Verfahren ausgesonnen, welches durch Hülfe zweier Winkelhaken das Geforderte mechanisch leistet. Dieses Verfahren ist nichts anders als Anwendung unseres Zusatzes. Man sehe die 2te Anmerk. zur 9ten Aufgabe des dritten Buches.

Zus. 5. Errichtet man BJ senkrecht auf AB und JL senkrecht auf ACJ, so sind AB und AJ zwei mittlere Proportionalen zwischen AC und AL. Denn

$$AC : AB = AB : AJ = AJ : AL \text{ (Zus. 2).}$$

Anmerkung 6. Hierauf beruht die Einrichtung eines von Descartes *) erfundenen Instrumentes, um zwei oder mehrere mittlere Proportionalen zwischen zwei gegebenen Linien zu finden. Ich sage zwei oder mehrere, da man, wie leicht zu sehen, das Ziehen von Senkrechten auf AL und AJ auf die angefangene Weise beliebig weit fortsetzen kann.

*) Geometria, lib. II et III ab init.

Zweiter Abschnitt.

Von Linien, die nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten werden.

---

210. Erklärung. Eine Linie (AB Fig. 107) heißt nach dem äußern und mittlern Verhältnisse (in C) geschnitten, wenn die ganze Linie sich zum größern Stücke (AC) eben so verhält, wie dieses größere Stück zum kleinern (CB).

Eucl. VI, 3.

Anmerkung 1. Wendet man auf unsere Erklärung 202, Zus. 6 an, so sieht man, daß eine nach dem mittlern und äußern Verhältnisse geschnittene Linie diejenige ist, wo das Quadrat des größern Abschnittes gleichflächig ist dem Rechtecke aus der ganzen Linie und dem andern Abschnitte; und es folgt daraus von selbst:

Zus. Eine Gerade nach dem äußern und mittlern Verhältnisse schneiden heißt sie so schneiden, daß das Quadrat des größern Stückes (AC) gleichflächig ist dem Rechtecke aus der ganzen Linie und dem kleinern Stücke.

Anmerkung 2. Wir haben bereits früher (96 und 97) von solchen, auf die genannte Weise geschnittenen Linien, Gebrauch gemacht; und in der Anmerkung zu 96 auf die 10te Aufgabe im ersten Buche derselben verwiesen, um eine Linie auf die angegebene Weise zu schneiden.

Anmerkung 3. *Die Alten legten diesem Schnitte nach dem äußern und mittlern Verhältnisse einen hohen Werth bei, und nannten ihn darum den göttlichen Schnitt, auch wohl schlechthin den Schnitt.* Und in der That die Eigenschaften, die er in sich schließt, sind bemerkenswerth. Euclides handelt von ihnen in den sechs ersten Sätzen seines 13ten Buches. Wir glauben den Wißbegierigen unserer Leser einen Dienst zu erweisen, wenn wir, um sie an die Art und Weise der Alten zu gewöhnen, diese Sätze so viel als möglich mit den eignen Worten des Euclides wiedergeben und nur das hinzufügen, was nach unserm Urtheile hinzu gehört.

211. Lehrsatz. Wenn eine Gerade (AB Fig. 106) nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten ist und man verlängert sie um die Länge des größern Abschnittes (AC), so ist die ganze so entstandene Linie (BD) ebenfalls (in A) nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten und zwar bildet die ursprünglich gegebene Linie (AB) den größern Abschnitt.

Eucl. XIII, 5.

Beweis. Es sei die gegebene Linie L, der größere Abschnitt G, der kleinere K, so daß also $G + K = L$ und $L + G$ die verlängerte Linie ist. Alsdann

$$L : G = G : K \quad (210)$$

also auch $L + G : L = G + K : G$

d. i. $L + G : L = L : G$,

oder (Fig. 106) $BD : AB = AB : AD$.

Anmerkung 1. Leitet man aus der Proportion

$$L : G = G : K$$

eine neue dividendo her, so hat man

$$L - G : G = G - K : K$$

d. i. $K : G = G - K : K$,

oder $G : K = K : G - K$

d. h. (Fig. 107) wenn $BE = AC$

$$BE : BC = BC : CE$$

was folgenden Lehrsatz giebt: Schneidet man auf einer (in C) nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilten Linie (AB) von demjenigen Endpuncte aus, an welchem das kleinere Segment liegt, ein Stück (BE) gleich dem größern Segmente (AC) ab, so wird auch dieses in demselben Puncte (C) wie die ursprünglich gegebene Linie nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten, und zwar wird dasjenige Segment nun das größere, welches bei der Theilung der ursprünglichen Linie das kleinere war (BE).

Anmerkung 2. Man hätte, wie man leicht sieht, anstatt BE = AC (Fig. 107) zu nehmen, auch AF = BC (Fig. 108) machen können.

Anmerkung 3. Man sieht hieraus, daß wenn eine nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilte Linie gegeben ist, es immer möglich ist, aus ihr sowohl eine unendliche Reihe wachsend fortschreitender Linien, als auch eine eben solche Reihe abnehmend fortgehender herzuleiten, die alle gleichfalls nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilt sind, und zwar braucht man nichts weiter zu thun, als zuerst die ursprünglich gegebene Linie und dann eben so jede zuletzt gefundene in dem erstern Falle um ihr größeres Segment zu verlängern, in dem zweiten um ihr kleineres zu verkürzen.

Anmerkung 4. Da nach Anmerk. 2

$$G - K : K = K : G$$

und nach Voraussetzung $K : G = G : L$

so ist auch $G - K : K = G : L = G : G + K$

also $(G + K)_r(G - K) = G_r K$

d. h. ist eine Gerade nach dem äußern und mittlern Verhältniß geschnitten, so ist der Unterschied der Quadrate beider Segmente so groß als das Rechteck aus eben diesen Segmenten.

212. Lehrsatz. Wenn von zwei Geraden jede nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten ist, so sind beide proportionirt getheilt d. h. die Segmente der einen verhalten sich wie die der andern.

Eucl. XIV, 7. — Pappus C. M. V, 44.

Beweis. Die beiden Linien seien L, l; ihre größern Segmente G, g, ihre kleinern K, k, so ist

$$G_q = L_r K$$
$$g_q = l_r k$$
$$G_q : g_q = L_r K : l_r k$$
$$= 4\, L_r K : 4\, l_r k$$
$$G_q + 4\, L_r K : G_q = g_q + 4\, l_r k : g_q$$

aber $G_q + 4\, L_r K = (L + K)_q$

und $g_q + 4\, l_r k = (l + k)_q$ (78)

also $(L + K)_q : (l + k)_q = G_q : g_q$

also auch $L + K : l + k = G : g$

und dividendo $L - G + K : l - g + k = G : g$

$$2\,K : 2\,k = G : g$$
$$K : k = G : g.$$

Anmerkung 1. Dieser Beweis ist von Euclides; inzwischen läßt sich die Richtigkeit unseres Satzes kürzer darthun aus der Art, wie man verfährt, um eine Gerade auf die in Rede stehende Weise zu schneiden (96). Es seien AB und EB (Fig. 68, a) zwei nach dem äußern und mittlern Verhältnisse in M und C geschnittene Linien, so ergiebt sich unmittelbar aus der Construction:

$$AG : BG = ED : DB$$
$$AG : GH = ED : DF$$
$$AG - GH : AG = ED - DF : DE \text{ ꝛc.}$$

Anmerkung 2. Die Stücke einer nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilten Linie werden zur Auflösung vieler Aufgaben benutzt; man sollte daher erwarten, eine so getheilte Linie auf dem Proportionalzirkel zu finden. Aber bei weitem auf der Mehrzahl dieser Instrumente findet sich keine unter diesem Namen getheilte Linie. Dieser Mangel ist inzwischen nur scheinbar; sie ist in der That vorhanden. Wird nämlich ein Kreishalbmesser nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten, so ist das

größere Stück die Seite des in diesen Kreis beschriebenen regelmäßigen Zehnecks, wie wir später (290) zeigen werden. Man braucht daher nur die auf dem Proportionalzirkel verzeichnete Seite des regelmäßigen Sechsecks d. h. den Radius als ganze Linie zu nehmen, so hat man in der ebenfalls verzeichneten Seite des Zehnecks das größere Stück jener für die Theilung nach dem äußern und mittlern Verhältnisse.

213. **Lehrsatz. Wird eine gerade Linie nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten, so potenzirt die aus ihrer Hälfte und dem größern Stücke gebildete Linie das fünffache Quadrat der Hälfte.**

Eucl. XIII, 1.

Erläuterung. Es soll also (Fig. 107) $(AC + \frac{1}{2}AB)_q = 5(\frac{1}{2}AB)_q$ sein.

Beweis 1. Es ist

$$AC_q = AB_rBC$$
$$= AB_r(AB - AC)$$
$$= AB_q - AB_rAC \ (76)$$

also auch

$$AC_q + AB_rAC = AB_q$$
$$AC_q + 2\,\tfrac{1}{2}AB_rAC + (\tfrac{1}{2}AB)_q = AB_q + (\tfrac{1}{2}AB)_q$$
$$(AC + \tfrac{1}{2}AB)_q = 5\,(\tfrac{1}{2}AB)_q \ (74).$$

Beweis 2. Aus der Construction Fig. 68, a und 96 ist

$$AG_q = AB_q + BG_q$$
$$= 5\,(\tfrac{1}{2}AB)_q$$

aber $AG_q = (AH + HG)_q = (AC + \frac{1}{2}AB)_q$, also

$$(AC + \tfrac{1}{2}AB)_q = 5\,(\tfrac{1}{2}AB)_q$$

Anmerkung 1. Drückt man unsern Satz nach Art der Neuern aus, so erhält man

$$(AC + \tfrac{1}{2}AB)^2 = \frac{5}{4}\,.\,\overline{AB}^2, \text{ also}$$
$$AC + \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}AB\sqrt{5}, \text{ und daraus}$$
$$AC = \tfrac{1}{2}AB\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}AB$$

— eine Beziehung, die das Verfahren an die Hand giebt, eine gerade Linie nach dem äußern und mittlern Verhältnisse zu theilen (10te Aufgabe des 1ten Buches).

Anmerkung 2. Man hat auch

$$AC = \tfrac{1}{2}AB(\sqrt{5} - 1)$$
$$\text{also } BC = AB - \tfrac{1}{2}AB(\sqrt{5} - 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}AB(2 - \sqrt{5} + 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}AB(3 - \sqrt{5}),$$
$$\text{also } AC : BC = \sqrt{5} - 1 : 3 - \sqrt{5}$$

woraus man sieht, daß unser Schnitt für alle Linien derselbe ist d. h. daß jede durch ihn in Segmente getheilt wird, die bei der einen genau dasselbe Verhältniß, wie bei jeder andern haben.

214. **Lehrsatz. Wird eine gerade Linie nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten, so sind beide Segmente zu einander und zur ganzen Linie incommensurabel, und jedes führt den Namen Apotome.**

Eucl. XIII, 6.

Beweis. Nach 213, Anmerkung 2 ist $G = \frac{1}{2}L(\sqrt{5} - 1)$ und $K = \frac{1}{2}L(3 - \sqrt{5})$, also beide zu einander und zur ganzen Linie incommensurabel. —

Euclides nennt (X, 74) Apotome den Unterschied zweier blos in Potenz commensurabler Linien, wie es hier $\sqrt{5}$ in Beziehung auf 1 und 3 ist, deren Quadrate 5, 1, und 9 commensurabel sind.

215. **Lehrsatz. Wenn man eine gerade Linie (KJ Fig. 109)**

in zwei solche Abschnitte (BK, BJ) theilt, daß die ganze Linie das fünffache Quadrat eines dieser Abschnitte (BK) potenzirt, und man theilt die doppelte Länge (BD) desselben nach dem äußern und mittlern Verhältnisse, so ist das größere Stück gleich dem andern Abschnitte (BJ) der gegebenen Linie.

Eucl. XIII, 2.

Beweis. Es ist unserer Annahme gemäß

$$KJ = BK \,.\, \sqrt{5}, \text{ also}$$
$$BJ = KJ - BK = BK \sqrt{5} - BK$$
$$= BK (\sqrt{5} - 1)$$

Wenn aber BD, welche $= 2BK$, nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten wird, so ist das größere Stück

$$\tfrac{1}{2} BD (\sqrt{5} - 1) = BK (\sqrt{5} - 1) \quad (214)$$

also BJ dieses größere Stück.

216. Lehrsatz. Wird eine Linie L nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten, so potenzirt die aus dem kleinern Stücke (K) und der Hälfte des größern (G) zusammengesetzte Linie das fünffache Quadrat von der Hälfte des größern Stückes.

Eucl. XIII, 3.

Beweis. Da $K : G = \frac{1}{2} L (3 - \sqrt{5}) : \frac{1}{2} L (\sqrt{5} - 1)$ (213, Anmerkung 2), so ist auch $K : G = 3 - \sqrt{5} : \sqrt{5} - 1$, und mithin

$$K = \frac{G(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1} \ (144), \text{ also}$$

$$K + \tfrac{1}{2} G = \tfrac{1}{2} G \left[1 + \frac{2(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1}\right] = \tfrac{1}{2} G \left[\frac{\sqrt{5} - 1 + 6 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2} G \,.\, \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$$
$$= \tfrac{1}{2} G \,.\, \sqrt{5}$$
$$\text{also } (K + \tfrac{1}{2} G)_q = 5 (\tfrac{1}{2} G)_q$$

217. Lehrsatz. Wird eine gerade Linie (L) nach dem äußern und mittlern Verhältnisse geschnitten, so ist das Quadrat des kleinern Abschnittes (K) und das Quadrat der ganzen Linie (L) zusammen genommen so groß als das Dreifache des Quadrates von dem größern Abschnitte (G).

Eucl. XIII, 4.

Beweis. Nach 213, Anmerkung 2 ist

$$K = \tfrac{1}{2} L (3 - \sqrt{5}),$$
$$\text{also } K^2 = \tfrac{1}{4} L^2 (9 - 6\sqrt{5} + 5) = \tfrac{1}{4} L^2 (14 - 6\sqrt{5})$$
$$\text{und } K^2 + L^2 = \tfrac{1}{4} L^2 (18 - 6\sqrt{5}),$$

aber nach 213, Anm. 2 ist auch

$$L = \frac{2G}{\sqrt{5} - 1}, \text{ also } L^2 = \frac{4G^2}{6 - 2\sqrt{5}},$$

$$\text{also } K^2 + L^2 = G^2 \,.\, \frac{18 - 6\sqrt{5}}{6 - 2\sqrt{5}} = 3\, G^2.$$

Dritter Abschnitt.

Von den ähnlichen Vielecken.

---

218. Lehrsatz. Wenn man zwei Vielecke (M und N Fig. 87), von gleicher Seitenzahl durch Diagonalen, die man von einer Ecke (A, F) nach allen übrigen zieht, in Dreiecke (BAC, CAD, DAE und GFH, HFJ, JFK) zerlegt, so sind die Vielecke stets ähnlich, wenn jene Dreiecke paarweise, und zwar je zwei solche, die in der Reihenfolge sich entsprechen, ähnlich sind; (also $\triangle BAC \sim \triangle GFH$, $\triangle CAD \sim \triangle HFJ$, $\triangle DAE \sim \triangle JFK$).

L. G. III, 26, Anmerkung.

Beweis. Aus der Gleichheit der Winkel in den ähnlichen Dreiecken leitet man die Gleichheit der gleichgelegenen Winkel beider Vielecke her, als die erste Bedingung ihrer Aehnlichkeit.

Eben so folgert man aus der Proportionalität der Seiten in den ähnlichen Dreiecken die der entsprechenden Vielecksseiten — und dieß ist das zweite Erforderniß der Aehnlichkeit unserer Vielecke.

Anmerkung. Dieser Satz mußte bewiesen werden, damit man sehe nicht blos, daß ähnliche Vielecke möglich sind, sondern auch wie man bei ihrer Construction verfahren müsse. S. 2te Aufgabe des 2ten Buches.

Zus. 1. Sind zwei Dreiecke ähnlich, so müssen es auch stets die Parallelogramme sein, welche ein Paar entsprechender Seiten zu Diagonalen haben, und daher doppelt so groß als die Dreiecke sind. Darum gilt alles, was für ähnliche Dreiecke erwiesen ist, nothwendig auch für ähnliche Parallelogramme.

Zus. 2. Die beiden Parallelogramme (Fig. 52), welche um die Diagonale eines andern liegen, sind unter sich und dem Ganzen, zu welchem sie gehören, ähnlich.

Eucl. VI, 24.

219. Lehrsatz. Aehnliche Vielecke (M und N Fig. 87) lassen sich durch entsprechende Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen. Die Flächenräume solcher Vielecke verhalten sich, wie die Quadrate ihrer entsprechenden Seiten, oder stehen in dem zweifach hohen Verhältnisse dieser Seiten.

Eucl. VI, 20. — L. G. III, 26, 27.

Beweis. Erster Theil aus 198. — Zweiter Theil aus der Betrachtung, daß die Vielecke sich wie die Summen ihrer Dreiecke, und diese wie die Quadrate ihrer entsprechenden Seiten, also wie die Quadrate der entsprechenden Vielecksseiten verhalten, in Verbindung mit S. 158.

Anmerkung 1. Man kann nun die 2, 3, 4, 5, 6, und 7 Aufgabe im vierten Buche auflösen.

Zus. 1. Sind vier Linien proportionirt, so stehen die über ihnen beschriebenen Quadrate in dem zweifach hohen Verhältnisse dieser Linien; darum kommt das geometrische Quadrat mit dem zweifach hohen Verhältnisse überein, und man kann die arithmetischen Quadrate oder die zweiten Potenzen von Zahlen, welche die Längen von

Linien ausdrücken, anstatt der geometrischen Quadrate gebrauchen. S. 136, und 203, Zus. 5.

König zu Eucl. VI, 20.

Zus. 2. Aus diesem Satze, auf Parallelogramme angewandt und verglichen mit 203, Anm. 2, sieht man, in welchem Sinne Euclides im 18ten Satze seines VIII Buches behauptet, daß: „ähnliche Flächenzahlen im zweifach hohen Verhältnisse ihrer entsprechenden Seiten stehen; und (S. 26) daß sie sich zu einander verhalten, wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl."

Zus. 3. Sind drei Linien stetig proportionirt, so verhält sich eine über der ersten beschriebene Figur zu der über der zweiten beschriebenen und der erstern ähnliche Figur, wie die erste der drei Linien zur dritten (160).

Tacquet zu Eucl. VI, 20, Zus. 2.

Anmerkung 2. Auf diesem Satze beruhen die auf den Proportionalzirkeln französischer Construction unter dem Namen „les Plans" befindlichen Linien. Sie stehen nicht auf den englischen Proportionalzirkeln. Auf einigen andern findet man sie auch wohl unter der Benennung der geometrischen Linie. Sie dienen dazu, um, wenn eine gegebene Figur vergrößert oder verkleinert werden soll, die Seite der Figur zu finden, welche der gegebenen ähnlich und von ihr ein bestimmtes Vielfache oder einen bestimmten Theil ausmacht. Da auf diesen nämlich der Abstand z. B. von 0 bis 90 das Dreifache, von 0 bis 40 das Zweifache rc. des Abstandes von 0 bis 10 ist, so stehen die Zahlen 90, 40, 10 oder 9, 4, 1 in dem zweifach hohen Verhältnisse der ihre Entfernung von einander messenden Zahlen 3, 2, 1 d. h. in dem Verhältnisse, welches ähnliche Figuren zu einander haben, deren entsprechende Seiten sich wie die Zahlen 3, 2, 1 verhalten. Sollte man also eine Figur construiren, die das Neunfache von einer gegebenen und ihr ähnlichen wäre, so fasse man eine der Seiten der letzten in den Zirkel und bringe (durch erforderliches Oeffnen des Proportionalzirkels) seine Spitzen auf zwei sich entsprechende Zahlen unserer Linien z. B. 10 und 10, alsdann wäre der Abstand von 90 bis 90 die entsprechende Seite der gesuchten Figur. Oder würde ein Vieleck gefordert, das der sechste Theil von einem gegebenen wäre; so gebe man dem Proportionalzirkel eine solche Oeffnung, damit ein gewöhnlicher Zirkel, der genau eine der Seiten der gegebenen Figur umspannt, die Entfernung z. B. von 96 bis zu 96 messe; alsdann ist die Entfernung von $\frac{96}{6}$ d. i. von 16 zu 16 die entsprechende Seite des gesuchten Vielecks; welches $\frac{1}{6}$ von dem gegebenen ist; deren Seiten sich also zu einander verhalten wie $\sqrt{\frac{1}{6}} : 1$, oder wie $1 : \sqrt{6}$.

220. Lehrsatz. Sind vier Linien proportionirt, so stehen die beiden ähnlichen Figuren, die man auf entsprechende Weise über den beiden ersten beschreibt, in demselben Verhältnisse, wie die beiden ähnlichen und auf entsprechende Weise über den beiden letzten unserer Linien beschriebenen Figuren; und umgekehrt, stehen zwei ähnliche Figuren in demselben Verhältnisse wie zwei andere solche Figuren, so sind ihre entsprechenden Seiten proportionirt.

Erster Beweis. Nach Euclides.

Erster Theil. Vorbereitung: A, B, C, D seien die vier Linien; b die dritte Proportionale zu A und B, und d eine dergleichen zu C und D; also

$$A : B = C : D$$
$$A : B = B : b$$
$$C : D = D : d$$

daher $B : b = D : d$
und $A : C = b : d$
oder $A : b = C : d$

Nun ist aber Fig. über A : Fig. über B = A : b} 219, Zus. 3
Fig. über C : Fig. über D = C : d}
also Fig. über A : Fig. über B = Fig. über C : Fig. über D.

Zweiter Theil. Vorbereitung. Nimm d als vierte Proportionale zu A, B, C; also

$$A_q : B_q = C_q : d_q$$
und $A_q : B_q = C_q : D_q$ (219)
also $d_q = D_q$, und $d = D$, also
$$A : B = C : D.$$

Anmerkung. Dieser, in seinem zweiten Theile hier sehr vereinfachte, Beweis des Euclides ist schön und streng geometrisch.

Zweiter Beweis. Erster Theil. Aus 219, 219, Zus. 1, und aus 155, Zus. 1.

Zweiter Theil. Aus 155, Zus. 1 und 219, Zus. 1.

221. Lehrsatz. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke (Fig. 110) ist eine beliebige über der Hypotenuse beschriebene Figur, so groß als die beiden Figuren zusammen genommen, die ihr ähnlich und auf ähnliche Weise über den Catheten beschrieben sind.

Eucl. VI, 31.

Beweis. Aus 219, 153, 219, 87, 142.

Anmerkung 1. Von unserm Satze ist der Pythagoräische Lehrsatz (87) ein besonderer Fall; und beide Sätze sind Folgerungen aus einer allgemeinern Eigenschaft der Dreiecke, wie dieß in 87, Anmerkung 2 und in Satz 91 und dessen Zusätzen gezeigt worden ist.

Anmerkung 2. Man kann nun die 8te Aufgabe des 4ten Buches auflösen.

222. Lehrsatz. Alle regelmäßigen Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, und ihre Flächenräume verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten, oder ihrer Halbmesser, oder ihrer Perpendikel (109).

L. G. IV, 8.

Beweis. Erster Theil. Aus 218 und der Beschaffenheit ähnlicher Vielecke.

Zweiter Theil. Aus 219 und 205.

Zus. Daher sind solche Vielecke, wie diejenigen, von denen oben in S. S. 113—116 (Fig. 80, 81 und 82) gehandelt worden ist, ähnlich den Vielecken, in denen sie stehen; und für S. 116 soll das eingeschriebene Vieleck (EFGJL Fig. 82) nach Umfang und Inhalt ein minimum sein, wenn die Puncte E, F, G, J, L die Halbirungspuncte der Seiten des Vielecks sind, in welches es eingeschrieben ist. Denn dann ist der Radius OE als Perpendikel auf AD aus O am kürzesten.

223. Lehrsatz. Die Umfänge regelmäßiger Vielecke von gleich viel Seiten, die über Linien von ungleicher Länge beschrieben sind, verhalten sich wie ihre Halbmesser, oder ihre Perpendikel.

Beweis. Aus 102, Zus. 2, und 196, Zus. 2.

Zus. In allen regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl ist das Verhältniß des Umfangs zum Halbmesser oder zum Perpendikel ein und dasselbe.

224. Lehrsatz. Regelmäßige Vielecke von verschiedener Seitenzahl stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Umfänge und Perpendikel.

Beweis. Aus 117, und 152.

Zus. Sind also die Umfänge gleich, so verhalten sich die Flächenräume wie die Perpendikel, und bei gleichen Flächenräumen verhalten sich die Umfänge umgekehrt wie die Perpendikel (143, und 150).

225. Lehrsatz. Von zwei regelmäßigen Vielecken (ABDEF und GOKLMN Fig. 111), deren Umfänge gleich sind, hat dasjenige (GOKLMN) das größere Perpendikel (PQ), welches die größere Seitenzahl hat.

Vorbereitung. Der Umfang des einen und des andern Vielecks sei U; in jenem die Seitenzahl m, in diesem n, und zwar sei $m > n$; ziehe CJ und PQ $\perp \perp$; dann ist $FE = \frac{U}{n}$, $GN = \frac{U}{m}$, also $FE > GN$, und darum auch $FJ > GQ$; mache $RJ = GQ$, und ziehe RC. Es ist nun W. $FCE > GPN$, also auch W. $FCJ > GPQ$.

Beweis. $FJ : GQ = \frac{U}{n} : \frac{U}{m} = \frac{4R}{n} : \frac{4R}{m}$, aber auch

$$FCJ : GPQ = \frac{4R}{n} : \frac{4R}{m}, \text{ also}$$

$$FJ : GQ \text{ oder } RJ = FCJ : GPQ$$

Nun ist aber $FJ : RJ > FCJ : RCJ$ (206, Zus. 2)

also auch $FCJ : GPQ > FCJ : RCJ$

mithin $GPQ < RCJ$

und darum $PGQ > CRJ$.

Legt man also an JR in R den Winkel JRS, welcher gleich PGQ, so muß der Schenkel RS jenseits des Schenkels CR, von JR aus gerechnet, fallen und darum sein Durchschnittspunct mit JC auf deren Verlängerung liegen, also $JS > JC$, aber, wie leicht zu sehen, ist $JS = PQ$, also $PQ > JC$.

226. Lehrsatz. Von zwei regelmäßigen Vielecken, die gleiche Umfänge haben, hat den größern Flächenraum dasjenige, welches die größere Anzahl Seiten hat.

Papp. coll. math. V, 1. — L. G. IV, Anh. S. 7.

Beweis. Aus 224, Zus. und 225.

Zus. Haben ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat und regelmäßiges Sechseck gleiche Umfänge, so hat das Sechseck einen größern Flächeninhalt als das Quadrat, und dieses einen größern als das Dreieck.

Berechnung. Für das Sechseck PQRSTU (Fig. 80) ist das Perpendikel

$$CX = \sqrt{\overline{CR}^2 - \overline{RX}^2} = \sqrt{\overline{RS}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{RS}^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{3}{4}\,\overline{RS}^2}$$
$$= RS \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

also wenn U den Umfang bezeichnet

$$CX = \frac{U}{6} \sqrt{\tfrac{3}{4}} = U \cdot \sqrt{\tfrac{1}{48}}$$

Für das Quadrat ist das Perpendikel der Hälfte der Seite gleich,

also $= \frac{U}{8} = U \sqrt{\frac{1}{64}}$, also kleiner als im Sechsecke.

Im gleichseitigen Dreiecke DAF endlich ist das Perpendikel

$$\begin{aligned} CX &= \tfrac{1}{3} \text{ AX } (208, \text{ Zus. } 3) \\ &= \tfrac{1}{3} \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{FX}^2} \\ &= \tfrac{1}{3} \text{ AF} \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \text{AF} \sqrt{\tfrac{1}{12}} \\ &= \frac{U}{3} \sqrt{\tfrac{1}{12}} \\ &= U \sqrt{\tfrac{1}{108}} \end{aligned}$$

also kleiner als das Perpendikel des Quadrates.

Anmerkung. Die Bienen, welche ihre Zellen sechseckig bauen, bedienen sich also einer von den Figuren, bei denen kein Raum ungenützt verloren geht (104, Zus. 2) und namentlich diejenige, welche bei demselben Umfange den größten Inhalt hat.

Man vergleiche Pappus in der sehr lesenswerthen Vorrede zum 5ten Buche seiner mathematischen Sammlungen, und von den Neuern unter andern: la Chapelle institutions de geometrie Tom II, p. 217 — 33.

227. **Lehrsatz.** Wenn man in einem regelmäßigen Fünfeck (Fig. 79) aus den beiden Endpuncten (H, K) einer der Seiten (HK) nach den Endpuncten der beiden angränzenden Seiten (KC, HE) gerade Linien (HC, KE) zieht, so finden folgende Beziehungen Statt:

1. Diese beiden Diagonalen theilen das Fünfeck in einen Rhombus (CBEX), in zwei gleichschenkelige Dreiecke (KXC, HXE), deren Schenkel den Seiten des Fünfecks gleich sind, und in ein drittes gleichschenkeliges Dreieck (KXH), dessen Grundlinie die zuerst genannte Seite des Fünfecks ist.
2. Jede dieser Diagonalen schneidet die andere nach dem äußern und mittlern Verhältnisse, und zwar hat der größere Abschnitt die Länge der Fünfecksseite.
3. Zieht man alle Diagonalen des Fünfecks, so wird jede von zwei andern so geschnitten, daß das größere Stück, welches die eine dieser letztern abschneidet, durch die andere wiederum nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilt wird; und zwar ist das kleinere Stück das zwischen den beiden Durchschnittspuncten enthaltene.
4. Die Durchschnittspuncte dieser sämmtlichen Diagonalen bilden die Ecken eines neuen Fünfecks, das dem ursprünglichen ähnlich, mit ihm einen gemeinschaftlichen Mittelpunct hat, dessen Lage aber der des erstern entgegengesetzt ist, und dessen Seite endlich sich zu der des gegebenen verhält, wie der kleinere Abschnitt einer durch eine andere geschnittenen Diagonale zu dieser selbst.

Eucl. XIII, 8. (für den zweiten Theil)

Beweis. Erster Theil. Aus 104, Zus. 1, 38, 51, 25.
Zweiter Theil. $\triangle$ KXH $\sim$ $\triangle$ KHE (196) ꝛc.
Dritter Theil. $\triangle$ KXH $\cong$ $\triangle$ HVE verbunden mit 211, Anm. 2.

Vierter Theil. Regelmäßig ist das Fünfeck ONVXY, wie man aus der Congruenz der Dreiecke BON, ENV ꝛc. sieht, und ist daher dem ursprünglichen Fünfeck BCKHE ähnlich (222).

Einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben beide Fünfecke, da die Senkrechten, die man auf den Seiten des einen in ihren Halbirungspuncten errichtet (wie BJ) auch die Seiten des andern unter rechten Winkeln halbiren.

Endlich ist, da $\triangle$ BKH $\sim$ $\triangle$ BON, ON : KH = BO : BK.

Anmerkung 1. Alle diese Eigenschaften, von denen unser Satz handelt, sind den Fünfecken eigenthümlich, mit Ausnahme der einzigen, daß die Diagonalen in den Puncten ihres gegenseitigen Durchschnitts die Ecken eines neuen dem ursprünglichen ähnlichen Vielecks bilden. Diese theilen alle Vielecke vom Fünfecke an, nur mit einigen Besonderheiten, von denen wir später (300) handeln werden.

Anmerkung 2. Verfährt man mit dem neuen Fünfecke wie vorher mit dem gegebenen, so entsteht ein drittes Fünfeck, von dem Alles das auch gilt, was unser Satz für ONVXY nachgewiesen hat.

Anhang zum vierten Buche.

301. Zieht man aus der Ecke (A) eines Dreiecks (ABC Fig. 63) nach der Gegenseite (BC) zwei gerade Linien (AD, AE) so, daß jede dieser letzteren die erstere unter einem Winkel schneidet, welcher gleich ist dem, von dessen Scheitel beide auslaufen (ADC = BAC = AEB), so erhält man zwei Dreiecke (ADC, AEB), welche beide dem Urdreiecke und daher auch unter einander ähnlich sind.

196.

Frage: Von welchem Satze des vierten Buches kann der vorstehende als eine Erweiterung angesehen werden?

Anmerkung. Der Kürze halber sollen die Linien AD, AE den Namen Aehnlichkeitslinien führen; beide mögen die Aehnlichkeitslinien der Ecke A heißen, und zwar AD die zur Seite AC, AE dagegen die zur Seite AB gehörige.

302. Zieht man aus der Spitze eines der Winkel eines Dreiecks die beiden Aehnlichkeitslinien (AD, AE Fig. 63), so ist das Quadrat jeder von den diesen Winkel einschließenden Seiten gleich dem Rechteck aus der dritten Seite und dem Segmente derselben, welches zwischen jener Seite selbst und der zu ihr gehörigen Aehnlichkeitslinie enthalten ist; also $AC_q = CB_r CD$, $AB_q = BC_r BE$.

196.

303. Das Quadrat jeder der beiden von einer Ecke auslaufenden Aehnlichkeitslinien ist gleich dem Rechteck aus den beiden Segmenten (BE, CD Fig. 63) der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite, welche zwischen den beiden andern Dreiecksseiten und ihren zugehörigen Aehnlichkeitslinien enthalten sind.

304. Das Rechteck aus einer Aehnlichkeitslinie und der Dreiecksseite, nach welcher sie gezogen ist, ist gleich dem Rechteck aus den beiden andern Dreiecksseiten.

305. Der Unterschied zwischen der Quadratsumme der beiden Seiten eines Dreiecks, von deren gemeinschaftlichem Endpuncte aus die beiden Aehnlichkeitslinien gezogen sind, und zwischen dem Quadrate der dritten Seite, ist gleich dem Rechtecke aus eben dieser dritten Seite und dem zwischen den beiden Aehnlichkeitslinien enthaltenen Segmente derselben.

X. 302 — 72.

Zus. 1. In jedem rechtwinkeligen Dreieck fallen die nach der Hypotenuse gezogenen Aehnlichkeitslinien zusammen.

Zus. 2. Das Rechteck aus jeder Cathete und dem zwischen ihren Aehnlichkeitslinien enthaltenen Segmente ist doppelt so groß als das Quadrat der andern Cathete.

306. Zieht man aus jeder Ecke eines Dreiecks ihre beiden Aehnlichkeitslinien, so ist die Summe der drei Rechtecke aus jeder Seite und demjenigen Segmente derselben, welches zwischen den beiden nach ihr gezogenen Aehnlichkeitslinien enthalten ist, gleich der Quadratsumme der Seiten.

307. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Summe der beiden Rechtecke, die einzeln aus einer Cathete und dem Segmente derselben gebildet werden, welches zwischen den nach ihr gezogenen Aehnlichkeitslinien enthalten ist, doppelt so groß als das Quadrat der Hypotenuse.

Doppelter Beweis. Entweder aus X. 305, Z. 2, oder aus X. 306.

308. Ist in einem Dreiecke einer der Winkel halb so groß, als die Summe der beiden andern, und man zieht aus dessen Spitze die beiden Aehnlichkeitslinien, so ist das Rechteck aus der Seite, nach welcher sie gezogen sind, und dem zwischen beiden Aehnlichkeitslinien enthaltenen Segmente desselben gleich dem Rechteck aus den beiden andern Seiten.

X. 183.

309. Nimmt man auf einer geraden Linie drei beliebige Puncte (A, B, C Fig. 64), und zieht durch zwei derselben (B, C) zwei beliebige Parallelen (BD, CE), so daß sie sich eben so zu einander verhalten wie die Entfernungen (BA, CA) der Puncte, durch welche sie gehen, vom dritten Puncte (A), so liegt dieser dritte Punct mit den Endpuncten der beiden Parallelen stets in einer geraden Linie.

Frage: Wovon hängt es ab, ob die beiden Parallelen auf derselben, oder auf verschiedenen Seiten der ursprünglichen Geraden (BAC) liegen sollen?

Zus. Bleibt Alles wie beim Hauptsatze und man zieht aus denselben Puncten (B, C) ein zweites Paar Parallelen (BF, CG), welche dasselbe Verhältniß zu einander haben, wie das erste Paar, so liegen auch deren Endpuncte mit dem dritten Puncte in einer geraden Linie.

310. In jedem Dreieck ist das Quadrat des Stückes einer Winkelhalbirenden, welches zwischen dem Scheitel des halbirten Winkels und seiner Gegenseite enthalten ist, gleich dem Unterschied zwischen den beiden Rechtecken, von denen das eine aus den dem halbirten Winkel anliegenden Dreiecksseiten, das andere aus den durch die Halbirende bestimmten Segmenten der Gegenseite gebildet wird.

Fig. 73a. BE = BD; CF = CD; △ AED ∾ △ ADF.

Anmerkung. Der Satz behält im Allgemeinen seine Gültigkeit, wenn einer der Außenwinkel halbirt wird, und läßt sich auch ein dem vorher angedeuteten ganz ähnlicher Beweis führen.

311. Verbindet man die Spitzen zweier Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, durch eine gerade Linie, und verlängert dieselbe, wenn es nöthig ist, bis sie die gemeinschaftliche Grundlinie oder deren Verlängerung schneidet, so verhalten sich die Stücke dieser Linie, zwischen den Spitzen der Dreiecke und der Grundlinie, wie die Flächenräume der Dreiecke.

Frage: In wiefern bleibt der Satz noch richtig, wenn beide Dreiecke gleichflächig und beide Spitzen auf derselben Seite der Grundlinie liegen?

312. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse mit dem auf sie aus der Gegenecke gefällten Perpendikel zusammen genommen größer als die Cathetensumme.

154.

313. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist das zur Hypotenuse gehörige Höhenperpendikel größer als die doppelte Länge der Senkrechten, die man aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der die Winkel halbirenden Linien auf eine der Seiten fällt.

A. 312. — A. 121.

314. Zieht man die drei Höhenperpendikel eines Dreiecks, und verlängert sie, wenn es nöthig ist, bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct (A. 22), so sind die drei Rechtecke, die man aus den Stücken eines jeden bildet, welche zwischen dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte und seinen beiden Endpuncten (Spitze und Fußpunct) enthalten sind, unter einander gleichflächig.

Frage: In wiefern ist unser Satz auch beim rechtwinkeligen Dreiecke wenigstens nicht unrichtig?

315. Wenn zwei Dreiecke (ABC, DBC Fig. 65) eine gemeinschaftliche Grundlinie (BC) haben, und zwischen denselben Parallelen liegen, so sind die von den beiden andern Seiten begränzten Stücke (EF, GH) jeder mit der gemeinschaftlichen Grundlinie parallelen Geraden (EH) von gleicher Größe.

316. Zieht man in einem Dreiecke (ABC Fig. 66) das zu einer der Seiten (BC) gehörige Höhenperpendikel (AK), mit demselben durch einen der Endpuncte (B) der genannten Seite eine Parallele (BD), welche mit letzterer von gleicher Größe (BD = BC), verbindet ihren Endpunct (D) mit dem Fußpuncte (K) des Höhenperpendikels (AK), und zieht durch den Durchschnittspunct (E) dieser Verbindenden mit der Dreiecksseite (AB), EG parallel mit BC, und EF, GH beide parallel mit AK, so ist das Viereck EGHF ein Quadrat.

Anmerkung. Solcher Quadrate giebt es also für jedes Dreieck drei.

317. Sind in einem Dreiecke Grundlinie und zugehörige Höhe von gleicher Länge, so ist dasjenige von den drei Quadraten, die auf die im vorigen Satze angegebene Weise in das Dreieck beschrieben werden können, welches über einem Theile dieser Grundlinie steht, halb so groß als das Dreieck, und auch jede seiner Seiten halb so groß als des Dreiecks Grundlinie.

61.

318. In jedem gleichschenkeligen Dreiecke sind die beiden in dasselbe beschriebenen Quadrate, deren Seiten mit den Schenkeln zusammenfallen, von gleicher Größe.

319. Auch im rechtwinkeligen Dreiecke sind die beiden in dasselbe beschriebenen Quadrate, deren Seiten mit den Catheten zusammenfallen, von gleicher Größe.

320. Schneidet man von den Winkelspitzen eines Dreiecks aus auf den nach den Halbirungspuncten der Gegenseiten gezogenen Transversalen, oder ihren über die Ecken hinaus gehenden Verlängerungen Stücke ab, die sich eben so zu einander verhalten, wie die Transversalen selbst, auf denen sie abgeschnitten worden, und fällt aus jedem dieser Puncte auf die Dreiecksseite, welche durch die Transversale halbirt wird, eine Senkrechte, so haben diese bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

A. 22.

321. Verbindet man in einem spitzwinkeligen Dreiecke die Fußpuncte zweier Höhenperpendikel, so ist diese Gerade antiparallel (A. 37, Anm.) derjenigen Dreiecksseite, auf welcher ihre Endpuncte nicht liegen.

196.

Frage: In wiefern ist unser Satz auch beim rechtwinkeligen Dreiecke noch wahr?

322. Verbindet man alle drei Fußpuncte der Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks unter einander, so werden die Winkel des durch jene Verbindungslinien gebildeten Dreiecks durch die Höhenperpendikel des Urdreiecks halbirt.

A. 321.

Frage: Wie ändert sich unser Satz für recht- und stumpfwinkelige Dreiecke?

323. Theilt man eine der nicht parallelen Seiten (AD) eines Paralleltrapeziums (ABCD Fig. 67) in zwei Stücke (AE, ED), die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen m und n (also AE : ED = m : n) und zieht durch den Theilpunct (E) eine Gerade (EF) parallel mit den beiden parallelen Seiten, so ist stets: $n \cdot AB + m \cdot CD = (m + n) \cdot EF$.

196, Zus. 3, angewandt auf die Dreiecke ABC und ACD.

Zus. Die Gerade, welche die Halbirungspuncte der beiden nicht parallelen Seiten eines Paralleltrapeziums verbindet, ist also das arithmetische Mittel zwischen den beiden parallelen Seiten.

324. Theilt man eine Gerade (AB Fig. 68) in zwei Stücke (AC, CB), welche sich wie zwei beliebige Zahlen m und n verhalten, zieht dann eine beliebige zweite Gerade (DE), welche die erstere schneidet und durch die Puncte A, C, B drei beliebige Parallelen AD, CF, BE, die man bis zum Durchschnitt mit DE verlängert, so ist stets: $m \cdot BE - n \cdot AD = (m + n) \cdot CF$.

Frage: Wie läßt sich dieser und der vorige Satz in einen einzigen zusammenfassen?

325. Erklärung. Mittelpunct der mittlern Entfernungen (von einigen auch Mittelpunct der Entfernungen, von andern Punct der mittlern Entfernungen genannt) heißt für eine geradlinige Figur derjenige Punct, dessen Entfernung von irgend einer in der Ebene der Figur gezogenen Geraden das arithmetische Mittel ist, zwischen der algebraischen Summe der Entfernungen aller Ecken von eben dieser Geraden.

326. Für jedes Dreieck ist der Mittelpunct der mittlern Entfernungen der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der Transversalen, welche die Ecken mit den Halbirungspuncten der Gegenseiten verbinden.

207 — A. 323.

327. Für jedes Viereck ist der Mittelpunct der mittlern Entfernungen der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der drei Geraden, welche die Halbirungspuncte je zweier Gegenseiten verbinden.

328. Zieht man durch den Mittelpunct der mittlern Entfernungen irgend eines Vielecks eine beliebige gerade Linie, und nach ihr von sämmtlichen Ecken Parallelen von beliebiger Richtung, so ist die Summe derjenigen von ihnen, welche auf der einen Seite der durch den Mittelpunct gehenden Geraden liegen, gleich der Summe derer, die auf der andern Seite liegen.

329. Bilden die drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks eine stetige geometrische Proportion und man zieht die Senkrechte auf die Hypotenuse aus der Gegenecke, so ist die kleinere Cathete gleich dem nicht anliegenden Hypotenusensegment, und die Hypotenuse selbst wird durch die Senkrechte nach dem äußern und mittlern Verhältniß (210) getheilt.

330. Umkehrung des vorigen Satzes.

331. Wenn man auf den Seiten eines Dreiecks (ABC Fig. 39) von ihren Endpuncten aus gleichmäßig Stücke (BD, CE, AF) abschneidet, welche einzeln dreimal

so klein sind, als die Seiten, auf denen sie abgeschnitten worden, und diese Durchschnittspuncte (D, E, F) mit den Gegenecken verbindet, so ist jedes der Dreiecke AFH, BDJ, CEG dreimal so klein als das mittlere GHJ.

84, Zus. 3.

332. Erklärung. Ist eine gerade Linie harmonisch getheilt (174, Anm. 2), so heißen die vier Linien, welche durch die vier Theilpuncte so gezogen sind, daß sie entweder einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, oder einander parallel laufen, Harmonikalen.

333. Hat man vier beliebige Harmonikalen und zieht mit einer derselben eine Parallele, so wird das zwischen zwei von den drei übrigen enthaltene Stück dieser Linie durch die vierte Harmonikale halbirt.

334. Nimmt man außerhalb einer beliebigen Geraden einen beliebigen Punct, verbindet denselben mit ihrem Halbirungspuncte und den beiden Endpuncten und zieht auch mit ihr durch eben diesen Punct eine Parallele, so sind die vier so erhaltenen Linien stets Harmonikalen.

335. Jede von vier Harmonikalen geschnittene gerade Linie wird in diesen Durchschnittspuncten harmonisch getheilt.

336. Laufen zwei harmonisch getheilte Linien von demselben Puncte aus, so schneiden sich die drei Geraden, welche einzeln die drei übrigen Paare entsprechender Theilpuncte verbinden, entweder bei hinreichender Verlängerung in einem einzigen Puncte, oder sie sind einander parallel.

Indirecter Beweis.

337. Laufen zwei harmonisch getheilte Linien von demselben Endpuncte aus, und bezeichnet man die drei übrigen Theilpuncte einer jeden, von dem gemeinschaftlichen aus gerechnet, mit den Namen des zweiten, dritten und vierten, so haben auch die drei Geraden einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, welche den zweiten Theilpunct einer jeden mit dem vierten der andern und die beiden dritten unter einander verbinden.

338. Wenn bei zwei harmonisch getheilten Linien die drei Geraden, welche drei Paare entsprechender Theilpuncte mit einander verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, so fällt das vierte Paar der Theilpuncte entweder zusammen, oder sie liegen in einer geraden Linie mit jenem Durchschnittspuncte.

Zus. Sind die genannten drei Verbindungslinien unter einander parallel, so ist es, wenn die vierten Theilpuncte nicht zusammenfallen, auch die vierte.

339. Schneidet man auf einer geraden Linie (AM Fig. 69) von einem ihrer Endpuncte aus vier Stücke (AB, AC, AD, AE) ab, welche eine Proportion bilden, und ist der dritte (D) der so erhaltenen Durchschnittspuncte der Halbirungspunct des von dem ersten und vierten begränzten Segmentes (BE), so ist das Stück (AE) zwischen Endpunct und viertem Durchschnittspuncte durch den ersten und zweiten (B und C) harmonisch getheilt.

153 — 153.

340. Zweimalige Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

341. Errichtet man auf einer Dreiecksseite in ihrem Halbirungspuncte eine Senkrechte, verlängert sie bis zum Durchschnitt mit der ihr zunächst liegenden der beiden andern, und zieht durch diesen Durchschnittspunct eine Gerade nach der dritten Dreiecksseite parallel mit der ersten, so ist das Quadrat dieser Parallele gleich dem Ueberschuß des Rechtecks aus den Stücken, in welche die zweite Seite durch die Senkrechte getheilt wird, über das Rechteck aus den Stücken, in welche die dritte Seite durch die Parallele zerlegt wird.

206.

Frage: Findet nicht eine ähnliche Beziehung Statt, wenn man die Senkrechte bis zum Durchschnitt mit der entfernteren der beiden andern Dreiecksseiten verlängert, und im Uebrigen auf dieselbe Weise verfährt, wie in unserm vorstehenden Satze angegeben ist.

342. Fällt man aus dem Fußpuncte eines der Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks auf die beiden andern Dreiecksseiten zwei Senkrechte, so ist die Entfernung ihrer Fußpuncte halb so groß als der Umfang des Dreiecks, welches durch die Fußpuncte der Höhenperpendikel des Dreiecks bestimmt wird.

Fig. 70. — A. 321.

343. Zieht man von einer Dreiecksspitze (A Fig. 71) aus zwei Gerade (AD, AE) nach der Gegenseite, welche mit den beiden andern Seiten gleiche Winkel bilden (BAD = EAC), so verhalten sich die durch die genannten Geraden von der Dreiecksseite abge-

schnittenen Stücke (BD, EC), wie die Rechtecke aus den von ihren Endpuncten nach der Gegenecke auslaufenden Linien (also BD : CE = AB . AD : AC . AE).

202, Zus. 2.

Frage: In wiefern kann man die für die Halbirung eines Dreiecks-Winkels Statt findende bekannte Proportion (206) als einen besondern Fall unseres vorstehenden Satzes betrachten?

344. Es verhalten sich, wenn Alles bleibt wie beim vorigen Satze, die Quadrate der beiden ungetheilten Dreiecksseiten, wie die Rechtecke aus den Segmenten der dritten, welche zwischen jenen Seiten selbst und den beiden Transversalen liegen (also Fig. 71 $AB_q : AC_q = BD_rBE : CD_rCE$).

345. Ist in einem gleichschenkeligen Dreiecke die Grundlinie größer als jeder Schenkel und man schneidet auf ersterer von ihren beiden Endpuncten Stücke ab, welche gleich der Schenkellänge sind, verbindet diese Puncte mit der Gegenecke, so ist in dem so entstandenen neuen gleichschenkeligen Dreieck jeder Schenkel die mittlere Proportionale zwischen der Grundlinie eben dieses und dem Schenkel des ursprünglichen Dreiecks.

196.

346. Zieht man durch den Halbirungspunct (H) der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks (ABC Fig. 72) eine Gerade, die man verlängert bis zum Durchschnitt mit den Schenkeln oder deren Verlängerungen, so ist dieselbe (DE) stets größer als des Dreiecks Grundlinie selbst.

W. JCH = BDH — 154.

Zus. Von mehrern solchen Geraden (DE, FG) ist diejenige (FG) die größere, welche den größern Winkel mit der Grundlinie bildet.

W. KEH = DFH.

347. Wenn man die Winkel eines Dreiecks halbirt und die Halbirenden bis zum Durchschnitt mit den Gegenseiten verlängert, so ist die Summe der drei Rechtecke, die man aus je zwei von drei solchen Seitenstücken, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben, construirt, so groß als die Summe der drei Rechtecke aus je zwei der drei übrigen Seitenstücke.

206 — 72.

Frage: Entsteht nicht vielleicht eine ähnliche Beziehung bei der Halbirung der Außenwinkel eines Dreiecks?

348. Zieht man in einem Dreiecke (ABC Fig. 73) drei beliebige Transversalen (AD, BE, CF) so, daß sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, und mit jeder derselben durch den Halbirungspunct der Seite, nach welcher sie gezogen ist, eine Parallele, so haben auch diese bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

196 — 63.

Zus. 1. Umkehrung des Hauptsatzes.

Zus. 2. Die obern d. h. zwischen Dreiecksspitze und gemeinschaftlichem Durchschnittspunct enthaltenen Abschnitte der Transversalen sind doppelt so groß, als die Stücken ihrer Parallelen zwischen dem Halbirungspunct der Seite und dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

349. Die gemeinschaftlichen Durchschittspuncte der im vorigen Satze genannten Linien liegen stets in einer geraden Linie mit dem Mittelpuncte der mittlern Entfernungen (A. 327) des Dreiecks, und zwar ist letzterer von dem Durchschnittspuncte der Transversalen doppelt so weit entfernt als vom Durchschnittspuncte ihrer, die Seiten halbirenden, Parallelen.

A. 348, Zus. 2. — 207.

Zus. Daher liegen in jedem Dreiecke der Höhendurchschnitt, und der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der auf den Seiten in ihren Halbirungspuncten errichteten Senkrechten mit dem Mittelpuncte der mittlern Entfernung in einer geraden Linie und zwar ist letzterer vom Höhendurchschnitt doppelt so weit entfernt als von dem andern Puncte.

350. Zieht man in einem Dreiecke drei beliebige Transversalen, so daß sie keinen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, sondern ein Dreieck bilden, und mit ihnen einzeln Parallelen durch die Halbirungspuncte der Seiten des Urdreiecks, so bilden diese bei hinreichender Verlängerung ein Dreieck, welches dem erstgenannten ähnlich, aber viermal so klein als dasselbe ist, und in welchem jede Ecke mit der entsprechenden des ihm ähnlichen Dreiecks und dem Mittelpuncte der mittlern Entfernungen in einer geraden Linie liegt, und zwar so, daß die Spitze des kleinern Dreiecks nur halb so weit von diesem Mittelpuncte entfernt ist, als die des größern.

Frage: Welcher von den beiden unmittelbar vorhergehenden Sätzen ist der allgemeinere, so daß in ihm der andere als ein besonderer Fall enthalten ist?

351. Schneidet man von den Spitzen eines Dreiecks aus auf dessen Seiten gleichmäßig (d. h. so daß man nicht von einer Ecke aus zweimal abschneidet) Stücke ab, die der eignen Länge der Seiten, auf denen sie genommen werden, proportionirt sind, und zieht von diesen Durchschnittspuncten beliebige Parallelen nach einer beliebigen Geraden außerhalb des Dreiecks, so ist die Summe derselben eben so groß, als die Summe der mit ihnen parallelen Linien, die man entweder von den Halbirungspuncten der Seiten oder von den Spitzen des Dreiecks nach derselben Geraden zieht.

A. 323.

Frage 1. Bleibt unser Satz auch noch gültig, wenn man die proportionirten Stücke nicht auf den Seiten selbst, sondern auf ihren Verlängerungen abschneidet?

Frage 2. Welche Veränderung wird für unsern Satz herbeigeführt, wenn die Gerade, nach welcher die Parallelen gezogen werden, nicht außerhalb des Dreiecks liegt, sondern durch dasselbe hindurchgehet?

352. Wenn man entweder auf den Seiten eines Dreiecks selbst, oder auf ihren Verlängerungen gleichmäßig Stücke abschneidet, die der eignen Länge der Seiten proportionirt sind, und diese Durchschnittspuncte unter einander verbindet, so hat das von den Verbindenden gebildete Dreieck mit dem Urdreiecke einen gemeinschaftlichen Mittelpunct der mittlern Entfernung.

A. 351. — A. 325.

353. Wenn in einem Vierecke (ABCD Fig. 74) die beiden Diagonalen (AC, BD) nicht nur unter einander, sondern auch einer der Umfangsseiten (BC) gleich sind, und ebenfalls von gleicher Länge das dritte Paar zugeordneter Seiten (AB, CD) ist, so ist das Viereck ein Antiparallelogramm (A. 37) und das Rechteck aus den beiden ungleichen zugeordneten Seiten (AD, BC) gleich dem Ueberschusse des Quadrates von einer der drei zuerst genannten Seiten über das Quadrat von einer der beiden andern gleichen.

196.

354. Erklärung. Nimmt man auf jeder Seite eines Dreiecks oder deren Verlängerung einen beliebigen Punct, so zerfallen die sechs so entstandenen Segmente d. h. die Linien, welche zwischen den genannten Puncten und den Endpuncten der zugehörigen Dreiecksseiten liegen, in zwei solche Ternionen, deren einzelne Glieder keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben, und die wir künftig mit dem Namen **nicht an einander anliegender**, oder **getrennter** Stücke bezeichnen wollen. So ist z. B. für das Dreieck ABC (Fig. 72), wenn man die Puncte F, G, H auf seinen Seiten oder deren Verlängerungen nimmt, die eine Ternion der getrennten Stücke: AF, BH, CG; die andere AG, BF, CH. Ganz etwas Aehnliches gilt für die Umfangsseiten jedes beliebigen Vielecks.

355. Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks oder ihren Verlängerungen drei Puncte so, daß sie in gerader Linie liegen, so verhalten sich die Rechtecke, die man aus den getrennten Stücken zweier Seiten bildet, umgekehrt, wie die zugehörigen getrennten Stücke der dritten Seite, also (Fig. 75) $AF_r CE : AE_r BF = CD : BD$.

196.

Frage: In wiefern kann man behaupten, daß von dem vorstehenden Satze ein besonderer Fall der bekannte Lehrsatz ist: „Zieht man zwischen zwei Dreiecksseiten eine Parallele mit der dritten, so sind die Rechtecke, die man einzeln aus einer jener beiden Seiten und dem nicht an ihr anliegenden Segmente der andern bildet, unter einander gleichflächig." ?

Anmerkung. Mit Rücksicht auf 203, Z. 3 und Z. 5 kann man unsern Satz auch so aussprechen: „Das Produkt aus den getrennten Stücken der einen Ternion ist gleich dem Produkte aus denen der andern." Der Kürze halber werden wir uns künftig dieser letztern Ausdrucksweise und zwar nicht nur bei dem vorstehenden Satze, sondern auch bei andern, ihm ähnlichen, bedienen.

356. Zieht man in der Ebene eines Vierecks eine beliebige Gerade so, daß sie alle Umfangsseiten desselben oder deren Verlängerungen schneidet, so ist das Produkt aus den vier getrennten Stücken der einen Classe, gleich dem Produkte aus denen der andern.

A. 355.

357. Allgemein zieht man in der Ebene eines beliebigen Vielecks eine Gerade so, daß sie alle Umfangsseiten oder deren Verlängerungen schneidet, so ist das Produkt aus allen getrennten Stücken der einen Classe gleich dem Produkte aus denen der andern.

Frage 1. Hört die Gültigkeit unseres Satzes ganz auf, wenn die Schneidende mit einer der Umfangsseiten des Vielecks parallel läuft?

Frage 2. Wie wird es mit unserm Satze, wenn die Schneidende durch eine oder zwei Ecken des Vielecks geht?

358. Zieht man in einem beliebigen Dreiecke von den Spitzen nach den Gegenseiten oder deren Verlängerungen drei Transversalen so, daß sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, so ist das Produkt aus den getrennten Seitenstücken der einen Ternion gleich dem Produkte aus denen der andern.

200 — 153.

359. Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen drei Puncte so, daß die Produkte aus der einen und aus der andern Ternion der getrennten Stücke gleich sind, so liegen diese drei Puncte entweder in einer geraden Linie, oder so, daß die durch sie gezogenen Transversalen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben.

Frage: Unter welchen Bedingungen findet der erste Fall, und unter welchen der zweite für die Lage unserer drei Puncte Statt?

360. Zieht man von einem beliebigen Puncte (E Fig. 76) auf der Verlängerung einer der Diagonalen (AC) eines Vierecks zwei Gerade (EH, EK) so, daß jede die beiden mit ihr auf derselben Seite der Diagonale liegenden Viereckseiten schneidet, und verbindet von den vier so erhaltenen Durchschnittspuncten (G, H, J, K) je zwei, die auf derselben Seite der andern Diagonale (BD) liegen, so schneiden sich entweder diese beiden Geraden (GJ, HK) auch auf der Verlängerung dieser zweiten Diagonale, oder sind mit ihr parallel.

Frage: Gilt nicht vielleicht dasselbe, was im vorstehenden Satze von den Diagonalen gesagt wird, auch für die beiden anderen Paare zugeordneter Seiten?

Anmerkung. Man kann unsern Satz auch so aussprechen: Haben zwei Dreiecke (AGJ, CHK) eine solche Lage gegen einander, daß die Puncte (B, D, F), in denen sich je eine Seite des einen Dreiecks, und eine Seite vom andern schneiden, in gerader Linie liegen, so haben die drei Geraden (HG, CA, KJ), welche je zwei solche Ecken verbinden, die den sich schneidenden Seiten gegenüberliegen, stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct (E), und umgekehrt.

361. Beschreibt man in ein Dreieck (ABC Fig. 66) ein Quadrat (A. 316), verlängert die Seite (BC) des Dreiecks, über welcher es steht, um die Länge des zu ihr gehörigen Höhenperpendikels (CM = AK) und verbindet den Endpunct (M) der Verlängerung mit der entfernteren Ecke (E) des Quadrates, so sind die beiden Dreiecke AEL und CLM gleichflächig.

203, Zus. 6.

Zus. Daher ist AM ∥ CE.

362. Beschreibt man in ein rechtwinkeliges Dreieck zwei Quadrate, von denen das eine über der Hypotenuse steht, so ist dieses stets kleiner als das andere.

A. 312.

363. Von den in ein gleichschenkelig = rechtwinkeliges Dreieck beschriebenen Quadraten ist das über der Hypotenuse stehende neunmal und jedes der beiden andern achtmal so klein, als das Quadrat der Hypotenuse selbst.

Zus. Durch die auf den Catheten liegenden Ecken des auf der Hypotenuse stehenden Quadrates wird daher jede Cathete in zwei Segmente getheilt, von denen das eine doppelt so groß als das andere.

364. Die Seite des in ein gleichseitiges Dreieck beschriebenen Quadrates ist gleich dem Ueberschusse der vierfachen Höhe des Dreiecks über seinen Umfang. Fig. 66 a.

Erster Beweis. $AM_q = \frac{3}{4} AH_q = \frac{3}{4} HL_q = \frac{9}{16} BH_q$, also $4\,AM = 3\,BH$

ferner $4\,DM = 4\,AH$

$$4\,AD = 3\,AB + AH$$
$$4\,AD - 3\,AB = AH$$

Zweiter Beweis. Nimm $BE = CF = BC$, so ist

$EA = EK = FL = FA = 2\,AD$, also

$EK + FL = 3\,BC + KL = 4\,AD$, mithin

$KL = 4\,AD - 3\,BC$.

365. Nimmt man auf einer der Seiten eines Dreiecks einen beliebigen Punct, zieht von ihm aus nach jeder der beiden andern Seiten eine Parallele mit der dritten, so wird das Dreieck dadurch in ein Parallelogramm (P) und zwei Dreiecke (T, T′) zerlegt, von denen das erstere die mittlere Proportionalfläche zwischen den Zweifachen der beiden letztern ist; d. h. es ist: $2\,T : P = P : 2\,T'$.

366. Zieht man durch einen Punct (D Fig. 77) innerhalb eines Dreiecks zwischen je zwei Seiten eine Parallele mit der dritten, so wird durch diese das Urdreieck in drei Parallelogramme und drei Dreiecke zerlegt, die stets so beschaffen sind, daß das Produkt der drei erstern achtmal so groß ist als das Produkt der drei letztern.

Frage: Welcher von den beiden letzten Sätzen ist der allgemeinere?

367. Die neun Stücke, in welche durch solche Parallelen die drei Seiten des Urdreiecks getheilt werden, zerfallen in drei Ternionen getrennter (A. 354) Stücke, deren Produkte unter einander gleich sind d. h. es ist mit Rücksicht auf die Bezeichnung in Fig. 77 $a' . b' . c' = a'' . b'' . c'' = a''' . b''' . c'''$.

368. Wenn man zwischen zwei Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen, gerade Linien parallel mit der dritten Seite zieht und die Endpuncte einer jeden mit den Gegenecken des Dreiecks verbindet, so liegen die Durchschnittspuncte aller dieser Linienpaare in einer geraden Linie, derjenigen nämlich, welche durch den Halbirungspunct der dritten Seite und ihre Gegenecke geht.

A. 358 — 195.

369. Errichtet man auf zwei Winkelhalbirenden (BE, CF Fig. 78) in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte (K) zwei Senkrechte (KG, KH), die man bis zum Durchschnitt mit den Gegenseiten der halbirten Winkel verlängert, so ist der obere Abschnitt (AK) der dritten Halbirenden (AD) die mittlere Proportionale zwischen einer jener Gegenseiten (AB, AC) und dem an ihr anliegenden durch die Senkrechte gebildeten Segment der andern (AH, AG).

196.

Zus. Daher ist die Gerade GH parallel mit BC.

370. Wenn man auf einer (CF Fig. 78) von zwei Winkelhalbirenden in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte (K) eine Senkrechte (KH) errichtet und sie bis zum Durchschnitt (H) mit derjenigen (AC) der beiden Gegenseiten der halbirten Winkel verlängert, nach welcher die Winkelhalbirende (CF) nicht gezogen ist, so ist das Rechteck aus dem Stück (HE) dieser Seite zwischen dem Perpendikel und der andern Winkelhalbirenden (BE) und aus der andern Gegenseite (AB) gleich dem Rechteck aus den Abschnitten (BK, KE), in welche diese zweite Halbirende durch die erste getheilt wird; also $AB_r HE = BK_r KE$.

206 — A. 369.

371. Erklärung. Hat man zwei ähnliche Dreiecke (ABC, A'B'C' Fig. 79) und zwei Puncte (D, D') von solcher Lage gegen die Dreiecke, daß die Entfernungen des einen von den Ecken und Seiten des einen Dreiecks proportionirt sind den Entfernungen des andern von den entsprechenden Ecken und Seiten des andern Dreiecks, und zwar so, daß das Verhältniß von je zwei zusammengehörigen Entfernungen dem Verhältnisse zweier entsprechenden Dreiecksseiten gleich ist, so heißen diese beiden Puncte Aehnlichkeitspuncte dieser Dreiecke.

372. Haben zwei Puncte gegen zwei ähnliche Dreiecke eine solche Lage, daß jedes Paar ihrer Entfernungen von zwei entsprechenden Ecken sich eben so zu einander verhält, wie ein Paar gleichnamiger Dreiecksseiten, so haben auch ihre Entfernungen von den entsprechenden Seiten eben dasselbe Verhältniß zu einander, diese Puncte sind also Aehnlichkeitspuncte.

373. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

Für ähnliche Dreiecke sind Aehnlichkeitspuncte:

374. Ihre Höhendurchschnitte;

375. Die Durchschnittspuncte der auf den Seiten in den Halbirungspuncten errichteten Senkrechten;

376. Die Durchschnittspuncte der Winkelhalbirenden;

377. Die Mittelpuncte der mittlern Entfernungen;

378. Die Durchschnittspuncte von je zwei Transversalen, die so gezogen sind, daß die von entsprechenden Ecken auslaufenden auf den Gegenseiten Stücke abschneiden, die sich eben so zu einander verhalten, wie die ganzen Seiten.

379. Das Quadrat jeder Winkelhalbirenden eines Dreiecks verhält sich zum Rechteck aus den beiden, den halbirten Winkel einschließenden, Seiten, wie das Rechteck aus dem Ueberschusse eben dieser beiden Seiten über die dritte und dem Umfange des Dreiecks zum Quadrat von der Summe der beiden einschließenden Seiten.

206.

380. Wenn man in einem Dreieck (ABC Fig. 80) drei Transversalen zieht, die einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, die Fußpuncte (D, E) zweier derselben verbindet, und diese Gerade so weit verlängert, bis sie, wenn es möglich ist, die Dreiecksseite (AB), auf welcher diese Fußpuncte nicht liegen, schneidet, so wird diese ganze Linie (EH) durch die Transversalen (in D und J) harmonisch getheilt.

A. 355 — A. 358.

Zus. Auch AH wird den Puncten B und F harmonisch getheilt.

381. Verbindet man die Fußpuncte zweier von drei sich in Einem Punct schneidenden Transversalen eines Dreiecks, so wird die dritte Transversale durch diese Verbindende und den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct mit den beiden erstern harmonisch getheilt.

A. 380 — A. 335.

382. Wenn man je zwei Fußpuncte von drei in Einem Puncte sich schneidenden Transversalen eines Dreiecks verbindet, und diese Verbindenden, wenn es möglich ist, bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung derjenigen Dreiecksseite, auf der die Fußpuncte nicht liegen, verlängert, so liegen die drei so erhaltenen Durchschnittspuncte stets in einer geraden Linie.

A. 336.

383. Bleibt Alles, wie beim vorigen Satze und verfährt man mit dem durch die Fußpuncte der Transversalen bestimmten Dreieck und seinen Transversalen eben so wie vorher im Urdreiecke, so gehen auch die drei so erhaltenen Geraden einzeln durch die drei in einer geraden Linie liegenden und im vorigen Satze näher bezeichneten Durchschnittspuncte.

Anmerkung. Man kann, wie man hieraus sieht, eine beliebige Menge von Dreiecken erhalten, von denen jedes in das ihm zunächst vorhergehende beschrieben ist, wo in jedem drei sich in Einem Puncte schneidende Transversalen sich finden, deren Fußpuncte eine solche Lage haben, daß wenn man je zwei derselben verbindet und sie bis zum Durchschnitt mit den Dreiecksseiten, auf denen diese Fußpuncte liegen, verlängert, diese in einer geraden Linie liegenden drei Durchschnittspuncte für alle Dreiecke dieselben sind.

384. Wenn man auf zwei Seiten eines Dreiecks von ihrem gemeinschaftlichen Endpuncte aus Stücke abschneidet, welche gleich dem dritten Theile der eignen Länge der Seiten sind, diese Durchschnittspuncte mit den Gegenecken verbindet, und nun die dritte Transversale zieht, welche mit den beiden erstern einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct hat, so halbirt nicht nur diese die dritte Seite, sondern wird auch selbst durch die beiden andern Transversalen halbirt.

385. Allgemein, wenn man zwei Dreiecksseiten von ihrem gemeinschaftlichen Endpuncte aus in Stücke theilt, welche ein beliebiges gegebenes Verhältniß $m : n$ zu einander haben, verbindet die Theilpuncte mit den Gegenecken und zieht nun die dritte Transversale, welche mit den beiden erstern einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct hat, so verhält sich der obere d. h. zwischen Winkelspitze und gemeinschaftlichem Durchschnittspuncte enthaltene Abschnitt dieser dritten zum untern, wie $2m : n$; für die beiden andern Transversalen haben die obern und untern Abschnitte zu einander das Verhältniß $m + n : m$.

A. 368 — 196.

Frage: Giebt es nicht außer dem unmittelbar vorhergehenden noch andere frühere Sätze, welche der vorstehende als besondere Fälle in sich schließt?

386. Schneidet man von jeder Spitze eines Dreiecks aus auf jeder der von ihr auslaufenden Seiten Stücke ab, welche gleich dem dritten Theile der eignen Länge derselben sind, und verbindet jedes Paar dieser Durchschnittspuncte mit den Gegenecken, so ist das durch die drei Durchschnittspuncte dieser Linienpaare bestimmte Dreieck dem Urdreiecke ähnlich und sechszehnmal so klein als letzteres.

A. 385.

387. Allgemein, wenn man von jeder Spitze eines Dreiecks aus jede der beiden von ihr auslaufenden Seiten in zwei Stücke, die das Verhältniß $m : n$ zu einander haben, und jedes Paar Durchschnittspuncte mit den Gegenecken verbindet, so ist das durch die drei Durchschnittspuncte dieser Linienpaare bestimmte Dreieck dem Urdreiecke ähnlich und $\left(\frac{n - m}{2m + n}\right)^2$ mal so groß als letzteres, oder wenn man den Inhalt des Urdreiecks, wie wir dieß künftig öfters thun werden, mit Δ bezeichnet, so ist des in Rede stehenden Dreiecks Flächenraum $= \left(\frac{n - m}{2m + n}\right)^2 . \Delta$.

388. Theilt man jede der Seiten eines beliebigen Dreiecks in eine beliebige ungerade Anzahl, wie $2m + 1$, gleicher Theile, und verbindet auf je zwei Seiten die mten Theilpuncte (vom gemeinschaftlichen Endpuncte aus gerechnet) mit den Gegenecken, so ist das durch die drei Durchschnittspuncte dieser Linienpaare gebildete Dreieck dem Urdreieck ähnlich und sein Inhalt $= \left(\frac{1}{3m + 1}\right)^2 . \Delta$.

Frage: Welcher von den beiden letzten Sätzen ist der allgemeinere?

389. Schneidet man auf den Seiten eines Dreiecks von ihren Endpuncten aus gleichmäßig Stücke ab, welche gleich dem dritten Theile ihrer eignen Länge sind, so sind die diese Durchschnittspuncte die Ecken eines Dreiecks, welches auch dreimal so klein als das Urdreieck ist.

202, Zus. 2.

390. Allgemein, schneidet man auf den Seiten eines Dreiecks von den Spitzen aus gleichmäßig Stücke ab, welche $\frac{m}{n}$ von der eignen Länge der Seiten betragen, so ist das Dreieck, welches diese Puncte zu Ecken hat, an Flächeninhalt =

$$\frac{n^2 - 3\,mn + 3\,m^2}{n^2} \cdot \triangle$$

202, Zus. 2.

391. Wenn man auf zwei Seiten eines Dreiecks von ihrem gemeinschaftlichen Endpuncte Stücke abschneidet, welche beliebige (aber für beide Seiten dieselben) Theile ihrer eignen Länge ausmachen, diese Puncte mit den Gegenecken verbindet, und durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct dieser beiden Transversalen die dritte zieht, so ist das Viereck, welches durch die Fußpuncte dieser Transversalen und die Spitze des Dreiecks bestimmt wird, von der aus man die proportionalen Stücke abschnitt, seinem Inhalte nach der eben so vielte Theil des Urdreiecks, den so vielten Theil die Länge der abgeschnittenen Stücke von der Länge der ganzen Seiten ausmacht.

202, Zus. 2.

Zus. Unser Viereck wird durch eine seiner Diagonalen halbirt, durch die andere in zwei Dreiecke zerlegt, von denen das eine den eben so vielten Theil vom Vierecke ausmacht, als dieses vom Urdreiecke.

392. Jedes Viereck ist gleichflächig einem Dreiecke, das mit ihm eine Seite als Grundlinie gemein hat und dessen Höhe gleich der vierten Proportionale zu den drei Senkrechten ist, welche man aus dem Durchschnittspuncte der Diagonalen und deren Endpuncte auf die genannte Seite oder deren Verlängerungen fällt.

Fig. 77a. — AN ∥ BD — NO ∥ DM.

Frage: Wie kann man aus unserem Satze folgern, daß ein Dreieck gleichflächig ist mit einem Parallelogramm, welches mit ihm gleiche Grundlinie, aber nur halb so große Höhe als das Dreieck hat?

393. Bezeichnet man die Ecken eines beliebigen Vielecks als erste, zweite, dritte ...... nte (indem man von einer beliebigen als ersten ausgeht, und gleichmäßig rund herum gehend fortzählt), fällt aus sämmtlichen Ecken auf eine beliebige außerhalb des Vielecks in dessen Ebene gezogene gerade Linie Perpendikel, und läßt unter diesen Linien dieselbe Reihenfolge Statt finden, wie unter den Ecken, von denen sie auslaufen, (d. h. nennt das erste Perpendikel dasjenige, welches aus der ersten Ecke gefällt ist ꝛc.) so ist der Flächenraum des Vielecks halb so groß als die Summe der Rechtecke, von denen jedes zur Höhe eine der Senkrechten und zur Grundlinie die algebraische Summe der beiden Segmente der genannten Linie hat, welche zwischen dem in Rede stehenden Perpendikel und seinem nächsten Vorgänger und Nachfolger enthalten sind.

86 — 72 und 73.

Frage: Erleidet unser Satz wesentliche Modificationen, wenn die Gerade, auf welche die Senkrechten gezogen werden, mit einer der Seiten des Vielecks zusammen, oder zum Theil innerhalb desselben fällt?

394. Wenn man von jeder Spitze eines Dreiecks aus auf jeder der beiden von ihr auslaufenden Seiten Stücke abschneidet, welche gleich dem dritten Theile ihrer eignen Länge sind, und jedes Paar dieser Durchschnittspuncte mit den Gegenecken verbindet, so ist jedes der drei Vierecke, welche ein Paar der abgeschnittenen Seitenstücke und die untern Abschnitte der zugehörigen Transversalen zu Seiten haben, sechsmal so klein als das Urdreieck.

A. 385 — 200.

395. Allgemein, wenn man von jeder Spitze eines Dreiecks aus auf jeder der von ihr auslaufenden Seiten Stücke abschneidet, welche $\frac{m}{n}$ von der eignen Länge derselben ausmachen, und jedes Paar dieser Durchschnittspuncte mit den Gegenecken verbindet, so

ist jedes der im vorigen Satze näher bezeichneten Vierecke an Inhalt

$$\frac{2\,m^2}{n\,(m+n)} \cdot \triangle$$

X. 385 — 200.

396. Wenn man auf den Seiten eines Dreiecks von ihren Endpuncten aus gleichmäßig Stücke (AF, BD, CE Fig. 83) abschneidet, welche $\frac{m}{n}$ der eignen Länge der zugehörigen Seiten ausmachen, und diese Durchschnittspuncte mit den Gegenecken verbindet, so ist:

1) jeder der obern Abschnitte AJ, BG, CH

$$\frac{mn}{m^2 - mn + n^2}$$

von der eignen Länge der zugehörigen ganzen Transversalen.

2) jeder der mittlern Abschnitte GJ, GH, HJ,

$$\frac{n\,(n - 2\,m)}{m^2 - mn + n^2}$$

von dieser Länge,

3) jeder der untern Abschnitte DG, EH, FJ,

$$\frac{m^2}{m^2 - mn + n^2}$$

von eben dieser Länge, also

4) die Länge jedes unteren Abschnittes $\frac{m}{n}$ von der Länge seines zugehörigen obern.

397. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze, so ist

1) jedes der Dreiecke AFJ, BGD, CEH

$$\frac{m^3}{m^2 n - mn^2 + n^3} \cdot \triangle$$

2) jedes der Vierecke AEHJ, BFJG, CHGD

$$\frac{mn^2 - m^2 n - m^3}{m^2 n - mn^2 + n^3} \cdot \triangle$$

3) das innere Dreieck GHJ

$$\frac{4\,m^2 - 4\,mn + n^2}{m^2 - mn + n^2} \cdot \triangle$$

398. Verlängert man die Seiten eines Dreiecks gleichmäßig um $\frac{m}{n}$ ihrer eignen Länge, verbindet die Endpuncte dieser Verlängerungen mit den Gegenecken des Dreiecks, und verlängert diese Transversalen bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so ist

1) jeder obere Abschnitt der Transversalen d. h. jede der bis zum genannten Durchschnitt nöthigen Verlängerungen

$$\frac{mn}{m^2 + mn + n^2}$$

von der eignen Länge der zugehörigen Transversale,

2) jeder untere Abschnitt d. h. jedes vom Fußpuncte einer Transversale aus auf ihr durch die andere abgeschnittene Stück

$$\frac{m^2}{m^2 + mn + n^2}$$

von der eignen Länge der zugehörigen Transversale, also

3) jeder untere Abschnitt $\frac{m}{n}$ von der Länge seines obern,

4) jeder mittlere Abschnitt d. h. jedes Stück einer Transversale, welches zwischen den beiden andern enthalten ist

$$\frac{n\,(n + 2\,m)}{m^2 + mn + n^2}$$

von der eignen Länge der zugehörigen Transversale.

Zus. Verlängert man die Seiten eines Dreiecks gleichmäßig um ihre eignen Längen, verbindet die Endpuncte dieser Verlängerungen mit den Gegenecken und verlängert

diese Transversalen bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so ist der obere Abschnitt jeder Transversale gleich dem untern.

399. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze, so ist der Flächenraum des Dreiecks, dessen Ecken die Durchschnittspuncte unserer drei Transversalen sind:

$$\frac{4\,m^2 + 4\,mn + n^2}{m^2 + mn + n^2} \cdot \triangle$$

400. Schneidet man von den Spitzen eines beliebigen Dreiecks aus so wohl auf den Seiten selbst als auch auf ihren Verlängerungen gleichmäßig Stücke ab, welche $\frac{m}{n}$ von der eignen Länge der Seiten ausmachen, verbindet sowohl die eine als die andere Ternion der zusammengehörigen Durchschnittspuncte mit den Gegenecken, so ist der Flächenunterschied der beiden Dreiecke, die von der einen und andern Ternion der so erhaltenen Transversalen gebildet werden

$$\frac{6\,mn^3}{m^4 + m^2\,n^2 + n^4} \cdot \triangle$$

Zus. Verlängert man daher jede der Seiten eines Dreiecks gleichmäßig um ihre eigne Länge, zieht die diesen Endpuncten zugehörigen Transversalen und verlängert sie bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so ist das von ihnen gebildete Dreieck dreimal so groß als das Urdreieck.

401. Wenn man jede von zwei Dreiecksseiten über ihren gemeinschaftlichen Endpunct um den dritten Theil ihrer eignen Größe verlängert, die Endpuncte dieser Verlängerungen mit den Gegenecken verbindet, die so erhaltenen Transversalen bis zum Durchschnitt verlängert und durch diesen Durchschnittspunct die dritte Transversale zieht, so ist das Stück derselben, welches außerhalb des Dreiecks liegt, gleich dem innerhalb desselben liegenden.

402. Allgemein, werden zwei Seiten eines Dreiecks um $\frac{m}{n}$ ihrer eignen Länge über ihren gemeinschaftlichen Endpunct hinaus verlängert, die Endpuncte dieser Verlängerungen mit den Gegenecken verbunden, diese Transversalen verlängert bis sie sich schneiden, und wird nun durch ihren Durchschnittspunct auch die dritte Transversale gezogen, so verhält sich das äußere d. h. außerhalb des Dreiecks liegende Stück derselben zum innern wie $2\,m : n - m$.

403. Schneidet man von den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks (ABC Fig. 81) aus auf dessen Seiten beliebige, aber gleich große Stücke gleichmäßig ab, fällt von den Durchschnittspuncten auf die Seiten gleichmäßig Perpendikel (DM, FN, EO) und verlängert dieselben bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so ist das so erhaltene gleichseitige Dreieck (GHJ) dreimal so groß als das ihm ähnliche Dreieck (BFK), welches man erhält, indem man durch einen der Durchschnittspuncte (F) eine Gerade parallel mit der Dreiecksseite (AC) zieht, auf welche man aus jenem Puncte die Senkrechte gezogen hat.

Fig. 83. — $LJ = JD = FH$, $LF = JH$, $FH = \frac{1}{2}\,KL$.

404. Zieht man in einem Paralleltrapezium zwischen den beiden nicht parallelen Seiten eine Parallele mit den beiden andern, welche gleich der mittlern Proportionale zwischen diesen letztern ist, so sind die beiden Paralleltrapezia, in welche durch sie das Urviereck zerlegt wird, einzeln den Dreiecken gleich, in welche das Urviereck durch eine seiner Diagonalen getheilt wird.

Fig. 75a. $BH_rEH = DH_rHF$; $\triangle\,BEH = \triangle\,DHF$.

405. Wenn man auf einer der Seiten (BC Fig. 82) eines Dreiecks von ihren Endpuncten aus eine beliebige Menge von Paaren gleicher Stücke (BD und CE, BF und CG ꝛc.) abschneidet, in jedem Paare zusammengehöriger Durchschnittspuncte Senkrechte errichtet, sie so weit verlängert, bis sie die an den abgeschnittenen Stücken anliegenden Dreiecksseiten schneiden, und endlich jedes Paar dieser Durchschnittspuncte mit den Gegenecken verbindet, so liegen die Durchschnittspuncte aller der zuletzt genannten Linienpaare in einer geraden Linie, welche auch senkrecht auf der Dreiecksseite steht, auf welcher die Stücke abgeschnitten worden sind, und sie in einem Puncte schneidet, der eben so weit von dem Halbirungspuncte entfernt ist, als dieser vom Fußpuncte des Höhenperpendikels.

406. Wenn man aus dem Fußpuncte (E Fig. 70) eines der Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks Senkrechte fällt sowohl auf die beiden andern Höhenperpendikel als auch auf die zu ihnen gehörigen Seiten, so liegen die Fußpuncte (H, M, N, J) derselben stets in einer geraden Linie.

Vorbereitung zum Beweise. Fälle EH, EJ, ziehe HJ, EM und EN und zeige, daß die beiden letztern senkrecht auf AD und CF stehen. MHE = FKE = FEK = DAC 2c.

Frage: Hört die Gültigkeit unseres Satzes für recht- und stumpfwinkelige Dreiecke ganz auf?

Zus. 1. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze, so ist die Entfernung (HJ) der Fußpuncte der auf die Dreiecksseiten gefällten Senkrechten stets größer als die Entfernung (LK) der Fußpuncte der beiden andern, und zwar um die Entfernung (DF) der Fußpuncte der beiden Höhenperpendikel, auf denen diese beiden letztern senkrecht stehen.

61, Zus. 1.

Zus. 2. Wenn man daher aus jedem der Fußpuncte der Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks Senkrechte sowohl auf die beiden andern Seiten als auch auf die beiden andern Höhenperpendikel fällt, so ist die Summe der Entfernungen der Fußpuncte je zweier zusammengehörigen Senkrechten der ersten Classe dreimal so groß als die Summe eben dieser Entfernungen bei den Perpendikeln der zweiten Classe.

407. Schneidet man auf den Seiten eines Dreiecks von dessen Spitzen aus gleichmäßig Stücke ab, welche gleiche aliquote Theile von der eignen Länge der Seiten ausmachen, verbindet diese Durchschnittspuncte mit den Gegenecken, zieht noch durch den Halbirungspunct jeder Seite des Urdreiecks eine Parallele mit der Transversalen, die nach eben dieser Seite gezogen ist, und verlängert sie bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so fallen die Durchschnittspuncte (O, P, Q) mit den Halbirungspuncten der Seiten des von den Transversalen gebildeten Dreiecks (GHJ) zusammen. Fig. 83.

A. 396.

408. Theilt man jede von zwei Gegenseiten (AD, BC Fig. 84) eines Vierecks von den Endpuncten derselben dritten Seite (AB) aus in zwei Stücke, die das Verhältniß m : n zu einander haben, und darauf auch die beiden andern Gegenseiten (AB, CD) auf gleiche Weise in Stücke, die das Verhältniß p : q haben, verbindet sowohl das eine als das andere Paar dieser Theilpuncte unter einander, so wird jede dieser Verbindenden durch die andere nach demselben Verhältnisse getheilt, nach welchem das Paar von Gegenseiten getheilt ist, deren Theilpuncte sie nicht verbindet; (also GJ : JH = m : n und FJ : JE = p : q).

Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz gilt nicht blos für die Umfangsseiten eines Vierecks, sondern für je zwei Paare zugeordneter Seiten.

Frage: Von welchem Satze des ersten Anhanges kann dieser als Erweiterung angesehen werden?

409. Schneidet man auf zwei Gegenseiten und zwar von den Endpuncten aus, mit denen sie an derselben dritten Seite anliegen, Stücke ab, welche den mten, nten, rten 2c. Theil der eignen Länge dieser Seiten ausmachen, verbindet jedes Paar zusammengehöriger Durchschnittspuncte und theilt alle diese Verbindenden von den Endpuncten aus, mit denen sie auf derselben Vielecksseite liegen, nach einem beliebigen, aber für alle gleichen, Verhältnisse wie p : q, so liegen alle diese Theilpuncte in einer geraden Linie.

Zus. Theilt man jede von zwei Gegenseiten in dieselbe, sonst beliebige, Anzahl gleicher Theile, verbindet je zwei gleichvielte Theilpuncte, und verfährt darauf mit dem andern Paare Gegenseiten eben so, so wird jede Verbindungslinie der einen Classe durch die sämmtlichen Verbindungslinien der andern Classe in gleiche Theile getheilt.

Aufgaben.

410. Eine gegebene Gerade harmonisch so zu theilen, daß die beiden Theilpuncte gleiche Entfernungen von den Endpuncten haben.

411. In ein Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, in welchem die Seiten ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

412. Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punct eine Gerade so zu ziehen, daß sie in diesem Puncte nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt wird.

413. Ein Dreieck zu halbiren durch eine Gerade, welche parallel einer der Dreiecksseiten ist.

414. Ein Dreieck zu construiren, wenn sein Umfang und seine Winkel gegeben sind.

415. Innerhalb eines Dreiecks (ABC Fig. 85) den Punct (P) zu finden, dessen Entfernungen (PQ, PR, PS) von den Seiten sich wie drei gegebene Linien (CD, CE, AF) verhalten.

Frage 1: Lassen sich nicht vielleicht außerhalb des Dreiecks Puncte von derselben Eigenschaft finden?

Frage 2: Würde es einen wesentlichen Unterschied für unsere Aufgabe herbeiführen, wenn die Winkel, unter denen die Linien von dem zu findenden Puncte nach den Seiten gezogen werden, nicht rechte wären, sondern eine beliebige andere, aber für alle drei Linien constante Größe hätten?

416. Ein Dreieck (ABC Fig. 86) zu construiren, wenn die nach den Halbirungspuncten der Seiten gezogenen Transversalen (AD, BE, CF) gegeben sind.

DH = DG.

417. Ein Dreieck (ABC Fig. 87) zu construiren, wenn die Summe (AE) der ersten und dritten Seite, die Summe (AF) der zweiten und dritten Seite, und der von der ersten und zweiten Seite eingeschlossene Winkel (BAC) gegeben ist.

EG = FH = HJ, JG ∥ EF, JM ∥ AE.

418. Ein Dreieck (ABC Fig. 88) zu construiren, wenn der Ueberschuß (AE) der ersten über die dritte Seite, eben so der Ueberschuß (AF) der zweiten über die dritte, und der von der ersten und zweiten eingeschlossene Winkel (BAC) gegeben sind.

FH = EG = HJ, JGL ∥ MEF, JM ∥ AG.

419. Ein Dreieck (ABC Fig. 89) zu construiren, in welchem eine Seite (AB), und einer der anliegenden Winkel (CAB) vorgeschriebene Größe, Summe und Unterschied der beiden andern Seiten dagegen ein vorgeschriebenes Verhältniß (AD : AE) haben.

DJ = JE = JH, JH ∥ BC.

420. Ueber einer gegebenen Geraden als Hypotenuse ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, in welchem die Seiten eine stetige geometrische Proportion bilden.

421. Ein Quadrat (ABCD Fig. 90) in ein Dreieck (AJH) zu verwandeln, in welchem die Winkel vorgeschriebene Größe haben.

AB = BE; AG : AH = AH : AF.

422. In ein gegebenes Dreieck (ABC Fig. 91) ein anderes (DEF) zu beschreiben, das einem dritten (GHJ) ähnlich ist, und dessen eine Seite (FE) mit einer Seite (AB) des erstern einen Winkel von vorgeschriebener Größe bildet.

W. ABK von vorgeschriebener Größe. — △ BLK ∾ △ GHJ.

423. In ein gegebenes Dreieck (ABC Fig. 92) über einer der Seiten ein Rechteck (DEFG) zu beschreiben, das seinem Inhalte nach ein Maximum ist.

AJ = JK.

Frage: Macht es für den Inhalt des Rechtecks einen Unterschied, je nachdem man dasselbe über der einen, oder der andern Dreiecksseite beschreibt?

424. Ein Dreieck zu construiren, dessen Höhenperpendikel vorgeschriebene Längen haben.

Auflösung 1. Suche zum kleinsten, mittlern und größten Höhenperpendikel, die vierte Proportionale, aus ihr und den beiden größern Perpendikeln als Seiten beschreibe ein Dreieck, ziehe in diesem das zu der zuerst genannten Seite gehörige Höhenperpendikel, verlängere es über seinen Fußpunct hinaus bis es dem kleinsten der gegebenen Höhenperpendikel gleich wird; durch diesen Endpunct ziehe eine Parallele mit eben jener Dreiecksseite und verlängere sie bis sie die beiden andern verlängerten Seiten schneidet.

Auflösung 2. Construire ein Dreieck, das die gegebenen Höhen zu Seiten hat, und darauf ein zweites, das die Höhen des ersten zu Seiten hat; dieses letztere ist dem gesuchten Dreieiecke ähnlich, also &c.

Fünftes Buch.

Vom Kreise*).

Einleitung.

228. Erklärung. Sehne oder Chorde eines Kreisbogens (BAE Fig. 112) nennt man eine Gerade (BE), welche innerhalb des Kreises so gezogen ist, daß sie durch die Endpuncte des Bogens geht, und mithin denselben spannt. Geht eine solche Sehne (DCF) zugleich durch den Mittelpunct (C), so führt sie den Namen Durchmesser, auch wohl Mittellinie; sie spannt auf beiden Seiten den halben Umkreis (DAF, DGF) und theilt sowohl den Kreis (DAFGD) als die Kreislinie in zwei gleiche Theile.

Eucl. I, Erkl. 17. — L. G. II, Erkl. 3.

Anmerkung 1. Daß jeder Durchmesser den Kreis halbirt, ist meines Bedünkens ein Axiom. Man kann allerdings einen Beweis führen, indem man den einen Halbkreis um seinen Durchmesser herum dreht und über den andern legt. Beide müssen sich alsdann genau decken, weil sonst nicht, wie es die Erklärung des Kreises fordert, die Halbmesser gleich sein könnten.

L. G. II, 1.

Anmerkung 2. Eine Sehne nennt man wohl auch eine in den Kreis eingeschriebene Linie.

L. G. II, Erkl. 6.

Zus. Jede Sehne oder Chorde spannt entweder auf jeder Seite den halben Umkreis, wenn sie durch den Mittelpunct geht, also Durchmesser ist, oder auf der einen Seite einen Bogen (BAE) der kleiner, und auf der andern einen, (BGFE) der größer als der halbe Umkreis ist, und die beide zusammen den ganzen Umkreis ausmachen.

Anmerkung 3. Spricht man von nur einem zu einer Sehne gehörigen Bogen, so versteht man nach einem feststehenden Gebrauche den kleinern der beiden Bogen, die von ihr gespannt werden.

229. Erklärung. Machen zwei Bogen (DHG, GJF Fig. 112) zusammen den halben Umkreis (DHGJF) aus, so heißt der eine das Supplement des andern; beide zusammen auch wohl Supplementar-Bogen.

Anmerkung. In dem VIII Buche wird weiter von Bogen dieser Art die Rede sein.

230. Erklärung. Ausschnitt (sector) heißt jedes Stück (DCG Fig. 112) des Kreises, welches zwischen zwei Halbmessern und dem Bogen enthalten ist, nach dessen Endpuncten jene Halbmesser gehen.

Eucl. III., Erkl. 10. — L. G. II, Erkl. 5.

Anmerkung. Ein Ausschnitt ist also eine völlig begränzte Fläche.

---

*) Die Erklärungen von Kreis, Kreisbogen ꝛc. siehe oben 11.

231. Erklärung. Abschnitt (Kreisabschnitt, segmentum) **nennt man jedes Stück (BAE Fig. 112) des Kreises, welches zwischen einem Bogen und der zu ihm gehörigen Sehne enthalten ist.**

Eucl. I, Erkl. 18, 19. — L. G. II, Erkl. 4.

Anmerkung 1. Ein Abschnitt ist also, wie ein Ausschnitt, vollkommen begränzt.

Anmerkung 2. Der Unterschied zwischen Abschnitt und Ausschnitt ist also der, daß jener von einem Bogen und einer Linie, nämlich der zugehörigen Sehne, dieser von einem Bogen und zwei, und zwar durch den Mittelpunct gehenden, Linien gebildet wird. Demnach gehört der Halbkreis eben so wohl zu den Abschnitten, als zu den Ausschnitten.

232. Erklärung. Von einem Winkel sagt man, er stehe in einem Kreisabschnitte (BDE Fig. 113), wenn sein Scheitel (D) auf dem Bogen des Abschnittes liegt und seine Schenkel (DB, DE) durch die Endpuncte der zugehörigen Sehne (BE) gehen.

Eucl. III, Erkl. 7.

233. Erklärung. Von einem Kreisabschnitte sagt man, er fasse einen gegebenen Winkel, wenn es möglich ist, diesen Winkel so in ihn hinein zu legen, daß der Scheitel auf dem Bogen liegt, und die Schenkel durch die Endpuncte der zugehörigen Sehne gehen.

234. Erklärung. Man sagt, ein Winkel stehe auf einem Bogen, wenn seine Schenkel durch dessen Endpuncte gehen, und zwar führt ein solcher Winkel den Namen Centriwinkel oder Peripheriewinkel, je nachdem sein Scheitel im Mittelpuncte oder im Umkreise liegt. Fig. 113.

Eucl. III, Erkl. 9. — L. G. II, Erkl. 6.

Zus. 1. Ein Peripheriewinkel (BDE), der also in einem Kreisabschnitte (BDE) steht, steht immer auf einem Bogen (BJFGE), welcher mit dem zu dem genannten Kreisabschnitte gehörigen, den ganzen Umkreis ausmacht.

Zus. 2. Der Bogen (BJFGE), auf welchem ein Winkel steht, ist daher kleiner, eben so groß, oder größer als der halbe Umkreis, je nachdem der Kreisabschnitt, in welchem der Winkel steht, größer, eben so groß, oder kleiner als der Halbkreis ist.

235. Erklärung. Tangente (Berührende) eines Kreises heißt diejenige Gerade (ATZ Fig. 121), welche der Kreislinie begegnet, ohne bei ihrer Verlängerung sie zu schneiden. Eine Schneidende (ASH) dagegen ist eine solche Gerade, welche beliebig von außerhalb nach dem Umkreise so gezogen ist, daß sie, über diesen Punct hinaus verlängert, innerhalb des Kreises fällt, also den Umkreis schneidet. Berührende sowohl als Schneidende sind daher unbegränzte Linien.

Eucl. III, Erkl. 2. — L. G. II, Erkl. 8.

Anmerkung. Sollte aus dieser Erklärung nicht geradezu folgen, daß eine Tangente den Kreis blos in einem Puncte berührt? Aber freilich man muß nachweisen, daß es überhaupt Linien geben kann, die der Kreislinie in einem Puncte begegnen, und doch, wie weit sie auch verlängert werden, dieselbe nicht schneiden; was wir in 242, Zus. thun werden.

236. Erklärung. Man sagt, daß zwei Kreise (Fig. 134 und 135) sich berühren, wenn sie sich begegnen, ohne sich zu schneiden. Die Berührung erfolgt entweder von außen, wenn jeder Kreis ganz außerhalb des andern liegt, oder von innen, wenn der eine ganz innerhalb des andern fällt.

Eucl. III, Erkl. 2. — L. G. II, Erkl. 9.

237. Grundsatz. Kreise von gleichen Halbmessern sind congruent.

Eucl. III, Erkl. 1.

238. Grundsatz. Der Durchmesser ist doppelt so groß, als der Halbmesser.

239. Grundsatz. Zieht man vom Mittelpuncte nach einem andern Puncte eine Gerade, welche kleiner ist als der Halbmesser, so liegt auch dieser zweite Punct so wie die ganze Linie ganz innerhalb des Kreises; z. B. CM Fig. 112.

Erster Abschnitt.

Von den Linien, die in und nach dem Kreise gezogen werden.

---

240. Lehrsatz. Verbindet man zwei beliebige Puncte (E, B Fig. 112) im Umkreise durch eine Gerade, so liegt diese ganz innerhalb des Kreises.

Eucl. III, 2.

Vorbereitung. Ziehe nach unserer Geraden aus dem Mittelpuncte eine beliebige andere CM, und die Radien CE, CB.

Beweis. Aus 38, Zus. 1; 51; 41; und 239.

Anmerkung. Eine solche Linie ist also in der That eine Sehne, die den Umkreis in den zwei Puncten E, B schneidet. Mehr als zwei solcher Durchschnittspuncte kann es aber niemals geben; denn wäre dies möglich, so müßte es auch möglich sein, von einem Puncte außerhalb einer Geraden nach ihr mehr als zwei Gerade von gleicher Länge zu ziehen, in vollem Widerspruche mit 29, Zus. 2.

L. G. II, 3.

241. Lehrsatz. Drei Puncte (A, B, D Fig. 114), die nicht derselben geraden Linie angehören, liegen stets im Umfange eines Kreises, oder mit andern Worten man kann jederzeit eine Kreislinie beschreiben, die durch die drei Puncte hindurch geht.

L. G. II, 7.

Vorbereitung. Nach Anleitung der Fig. 114.

Beweis. Aus 45.

Anmerkung. Aus dem Beweise unseres Satzes leuchtet zugleich hervor, daß es nur eine einzige Kreislinie giebt, welche durch die drei Puncte A, B, D hindurchgeht.

Zus. Der Beweis unseres Satzes lehrt noch folgende Eigenschaft der Dreiecke kennen: Die Senkrechten, die man auf den Seiten eines Dreiecks in ihren Halbirungspuncten errichtet, haben bei hinreichender Verlängerung einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, der innerhalb, oder im Umfange, oder außerhalb des Dreiecks liegen kann, und gleiche Entfernung von den drei Winkelspitzen hat.

Hieraus folgt nun wiederum, daß, wenn das Dreieck gleichseitig ist, die Senkrechten durch die Spitzen der Gegenwinkel gehen und diese halbiren (51, Zus. 4). Darum nennt man auch in diesem Falle den Durchschnittspunct Mittelpunct des Dreiecks; er ist von den Win-

kelspitzen um ⅓ der Länge der ganzen Perpendikel entfernt (208, Zus. 3 und 207).

Anmerkung 1. Man sehe in der 10ten Aufgabe des 5ten Buches das Verfahren, eine Kreislinie zu beschreiben, die durch drei gegebene Puncte geht.

Anmerkung 2. Die Vorbereitung zum Beweise unseres Satzes und dieser selbst bieten auch Mittel, um die beiden ersten Aufgaben des 5ten und die 5te des 6ten Buches zu lösen.

242. Lehrsatz. Eine gerade Linie (BD Fig. 116), welche einen Durchmesser in einem seiner Endpuncte unter rechten Winkeln schneidet, liegt ganz außerhalb des Kreises und trifft den Umkreis blos in diesem einzigen Puncte (B), nämlich dem Endpuncte des Durchmessers.

Eucl. III, 16. — L. G. II, 9.

Beweis. Indirect, nach Anleitung der Fig. 116, aus 41.

Zus. Jede Tangente berührt den zugehörigen Kreis nur in einem einzigen Puncte.

Anmerkung. Man kann nun die Aufgaben 11, 12 (zweite Auflösung) 15 und 16 des 5ten Buches auflösen.

243. Lehrsatz. Der nach dem Berührungspuncte (B, Fig. 116) einer Tangente (ED) gezogene Halbmesser (CB) steht auf der Tangente senkrecht; und umgekehrt.

Beweis. Erster Theil. Indirect aus 41.

Zweiter Theil. Indirect aus dem ersten Theile.

Zus. Von dem Berührungspuncte aus läßt sich zwischen dem Umkreise und der Tangente (BD) keine Gerade (BH) ziehen, die den Kreis nicht schnitte.

Beweis. Gewiß ist, daß die Linie den Kreis entweder berühren, oder schneiden muß. Das erstere aber ist nach dem Hauptsatze und 19, Zus. 2 unmöglich, also muß das zweite Statt haben.

Anmerkung 1. Wie klein also auch der Winkel HBD sein möge, den eine nicht senkrecht auf AB stehende Linie BH mit der Tangente BD im Berührungspuncte bildet, immer geht die Kreislinie zwischen seinen Schenkeln hindurch.

Anmerkung 2. Fig. 116. Der Bogen BJH hat eine Neigung gegen die Tangente DB, und man kann dieselbe auch einen Winkel nennen, dessen einer Schenkel die Tangente, der andere der Kreisbogen ist. Aber die Neigung eines Kreisbogens gegen eine gerade Linie ist etwas ganz Anderes, als die Neigung zweier Geraden gegen einander, und darum können zwei solche Winkel, wenn man sich an den einfachen und ursprünglichen Begriff von Neigung hält, gar nicht mit einander verglichen werden. Sagt man, daß der Winkel zwischen dem Bogen BJH und der Geraden BD kleiner ist, als der Winkel zwischen BD und irgend einer andern von B auslaufenden Geraden, so vergleicht man nicht die eigentliche Neigung, sondern stillschweigend die Räume, die diese Winkel zwischen ihre Schenkel schließen. So ist es z. B. außer allem Zweifel, daß in Fig. 143 die krummlinigen Dreiecke GJE, GJEL kleiner sind, als die geradlinigen GJE, GJL. Aber wir haben schon früher (16, Anm. 2) bemerkt, daß das Merkmal des von den Schenkeln umschlossenen Raumes gar nicht zu dem Begriffe des Winkels gehört. Man hat sehr viel über die Natur der von Geraden und Kreisbogen gebildeten Winkel gestritten, worüber man Clavius und Tacquet zu Eucl. III, 16 und Wallis opp. math. II, p. 605 nachsehen kann.

Anmerkung 3. Fig. 138. Es ist meines Bedünkens eben so wenig genau, wenn man geradlinige Winkel mit den von zwei Kreisbogen gebildeten vergleicht. Man sagt z. B. daß, wenn gleiche Kreise BAFD und BKDEG sich schneiden, und man in einem der Durchschnittspuncte B an einen der Kreise eine Tangente BF zieht, darauf in demselben den Bogen BKDEG gleich nimmt dem Bogen BAF, den die Tangente vom andern Kreise abschneidet, und endlich die Sehne BD zieht — daß alsdann der krummlinige Winkel FABKD gleich dem geradlinigen FBG ist. Denn, sagt man, jener Winkel FABKD ist = FAB + FBKD, aber FAB = BKDEG, also FABKD = BKDEG

$+$ FBKD $=$ FBG. Allein es ist, wie ich glaube, einleuchtend, daß man hier nicht, wie man sollte, die eigentliche Neigung des Bogens FAB zum Bogen BKD vergleicht mit der Neigung der Geraden BF und BG gegen einander, sondern vielmehr stillschweigend die von den Bogen FAB und BKD umschlossenen Räume mit demjenigen, welchen die Geraden BF, BG und die Bogen FD, DG umschließen. Es ist zwar wahr, daß, wenn man an den Bogen BA die Tangente BJ zieht, der geradlinige W. JBF durch die beiden Tangenten gebildet wird, allein die Neigung von JB zu BF ist mit der Neigung des Bogens FAB zum Bogen BKD gar nicht vergleichbar*).

Vieta opp. p. 382.

Zweiter Abschnitt.

Von den Winkeln im Kreise.

---

244. Lehrsatz. Ein Centriwinkel (GCF Fig. 115 a, b) ist doppelt so groß als ein Peripheriewinkel (GJF), mit welchem er auf demselben Bogen (GF) steht.

Eucl. III, 20.

Vorbereitung. Ziehe aus dem Scheitel J den Durchmesser JCL.

Beweis. Aus den S. S. 38, und 51, welche man auf die Dreiecke JCG und JCF anwendet ꝛc.

Zus. 1. Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, sind gleich.

Eucl. III, 21. — L. G. II, 18, Zus. 1.

Zus. 2. Die Summe oder der Unterschied zweier Peripheriewinkel ist gleich der halben Summe oder dem halben Unterschiede der beiden Centriwinkel, die auf denselben Bogen stehen.

Zus. 3. Die Summe zweier Peripheriewinkel (FJG, FLG Fig. 115, b), die auf Bogen stehen, welche zusammen den ganzen Umkreis ausmachen, ist gleich zwei Rechten; und die Summe der Peripheriewinkel, die auf Bogen stehen, welche zusammen den halben Umkreis bilden, ist gleich einem Rechten; und umgekehrt.

Zus. 4. Damit also eine Kreislinie durch vier Puncte hindurchgehe, müssen sie eine solche gegenseitige Lage haben, daß die Summe zweier Gegenwinkel (FJG und FLG, JFL und JGL) gleich zwei Rechten ist. Siehe 251, Anmerk. 4.

245. Lehrsatz. In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen stehen gleiche Winkel, sie seien sämmtlich Centriwinkel, oder sämmtlich Peripheriewinkel, auf gleichen Bogen, und umgekehrt. Fig. 117.

Eucl. III, 26, 27. — L. G. II, 11.

Vorbereitung. Ziehe die Sehnen DB, BA.

Beweis. Erster Theil. Nach S. 45 ist DB $=$ BA, also muß D auf A fallen, wenn BA auf BD gelegt wird, und folglich muß, wegen der Gleichheit der Halbmesser, auch der Bogen AHB genau auf BJD fallen; und darum beide gleich sein.

Zweiter Theil. Indirect aus dem ersten.

Zus. 1. In demselben, oder in gleichen Kreisen ist ein Peripherie- oder Centriwinkel das Doppelte, Dreifache ꝛc. eines andern

*) Man vergleiche die unten folgende Erklärung A. 595. Anm. des Uebers.

Peripherie- oder Centriwinkels, wenn er auf einem zwei, drei- rc. mal so großen steht als letzterer; und umgekehrt.

Zus. 2. Von zwei Peripherie- oder Centriwinkeln eines Kreises steht der größere auch auf einem größern Bogen.

Zus. 3. Ein Centriwinkel, der gleich einem Rechten, steht auf einem Bogen, der dem vierten Theile des ganzen Umkreises gleich ist.

Zus. 4. Die zwischen parallelen Sehnen enthaltenen Bogen sind von gleicher Größe, und umgekehrt (25).

L. G. II, 10.

Zus. 5. Aus dem Beweise unseres Satzes ergiebt sich, daß die Bogen, die in demselben Kreise zu gleichen Sehnen gehören, ebenfalls gleich sind; und umgekehrt.

Eucl. III, 29. — L. G. II, 4.

Anmerkung 1. Auf diesem und dem 3ten Zus. beruht der Beweis für die Auflösung der 8ten und 9ten Aufg. des fünften Buches.

Zus. 6. Aus jenem Beweise folgt ferner, daß von zwei Sehnen diejenige die größere, welche zu einem größern Bogen gehört.

Eucl. III, 28. — L. G. II, 5.

Anmerkung 2. Man kann nun die 10te Aufgabe des 5ten Buches auflösen.

246. Lehrsatz. Jeder Peripheriewinkel ist eben so groß, größer oder kleiner als ein Rechter, je nachdem der Abschnitt, in dem er steht, eben so groß, kleiner, oder größer als der Halbkreis ist.

Eucl. III, 31. — L. G. II, 18 Zuss. 2, 3, 4.

Vorbereitung. BCF (Fig. 118) sei ein Durchmesser; ziehe AG, AL.

Beweis 1. Aus 244 und 20
2. Weil ABG $>$ ABD
3. Weil ABL $<$ ABD.

Anmerkung 1. Aus 234, Zus. 2 sieht man, daß man unsern Satz auch so aussprechen könnte: Ein Peripheriewinkel ist eben so groß, kleiner oder größer als ein Rechter, je nachdem der Bogen, auf dem er steht, eben so groß, kleiner oder größer als der halbe Umkreis ist.

Anmerkung 2. Den ersten Theil unseres Satzes könnte man noch leichter daraus herleiten, daß ABD als Peripheriewinkel die Hälfte des Centriwinkels ACD, also die Hälfte von zwei Rechten ist.

Anmerkung 3. Durch Hülfe des ersten Theils unseres Satzes bringt man die Auflösung der Aufgabe I, 4 zu Stande. Man kann dann noch folgende auflösen: II, 6, 7, 9, 26, 27, und V, 1 (zweite Auflösung), 12 und 13; die alle voraussetzen, daß man wisse, der Winkel im Halbkreise sei ein Rechter.

Anmerkung 4. Diogenes Laertius schreibt die Erfindung des Satzes, daß der Winkel im Halbkreise ein Rechter ist, dem Thales zu. Unser Satz giebt ein leichtes Mittel zur Prüfung eines Winkelhakens an die Hand. Man legt letztern so, daß seine Ecke im Umkreise liegt und die Kante des einen Arms durch den einen Endpunct des Durchmessers geht, alsdann muß, wenn der Winkelhaken nicht fehlerhaft ist, die Kante seines andern Arms genau durch den andern Endpunct des Durchmessers gehen. Diese Art der Prüfung ist einfacher, als die früher in 87, Anmerk. 3 angegebene.

247. Lehrsatz. Der Winkel (DAB oder DAF Fig. 119), welchen eine Tangente (AB oder AF) mit einer vom Berührungspuncte (A) aus gezogenen Sehne (AD) macht, ist gleich dem Winkel (AJD oder AHD) in dem nicht auf derselben Seite der Sehne liegenden und von ihr gebildeten Kreisabschnitte (DEJA oder DHA).

Eucl. III, 32. — L. G. II, 19.

Vorbereitung. ECA sei ein Durchmesser, und daher $\perp$ auf FAB; ziehe ED, AH, DH.

Beweis. Aus 246, angewandt auf W. ADE, 38, Zus. 3, und 243 angewandt auf W. EAB ꝛc.

Anmerkung. Auf diesem Satze beruht die Auflösung der Aufgaben: V, 5, 6 und VI, 1.

Dritter Abschnitt.

Von den Linien, die sich innerhalb des Kreises schneiden, oder durch den Umkreis geschnitten werden.

---

248. Lehrsatz. Wenn ein Durchmesser (PK Fig. 122) eine Sehne (LH) halbirt, so schneidet er sie unter rechten Winkeln; und umgekehrt, steht ein Durchmesser senkrecht auf einer Sehne, so theilt er sowohl sie als ihren zugehörigen Bogen in zwei gleiche Theile. Aber zwei Sehnen (BE, AD) können einander nie so schneiden, daß jede die andere halbirt.

Eucl. III, 3, 4. — L. G. II, 6.

Vorbereitung zum ersten Theile. Ziehe LC, HC; — zum zweiten: ziehe CF.

Beweis. Erster Theil. Aus 50; und die Umkehrung aus 51 und 46, oder aus 25.

Zweiter Theil. Indirect aus dem ersten.

Zus. 1. Jede Sehne, die eine andere unter rechten Winkeln halbirt, ist ein Durchmesser.

Anmerkung. Durch Hülfe dieses Satzes löst man die Aufgaben: V, 1 (erste Auflösung), 2, 10.

249. Lehrsatz. Zieht man von einem Puncte A (Fig. 120), innerhalb eines Kreises, der nicht der Mittelpunct (C) ist, verschiedene Gerade (AB, AG, AD, AE, AH) nach dem Umkreise, so finden folgende Beziehungen Statt:

1. Die größte unter allen ist diejenige (AD), welche durch den Mittelpunct geht.
2. Die kleinste aber diejenige (AF), welche jene größte zum Durchmesser ergänzt.
3. Die übrigen Linien (AG, AE) werden desto kleiner, je weiter sie sich vom Durchmesser oder vom Mittelpuncte entfernen.
4. Von demselben Puncte (A) aus lassen sich zwei, und nie mehr, Linien (AG, AE) ziehen, die von gleicher Länge sind; sie liegen auf verschiedenen Seiten des Durchmessers und bilden mit diesem gleiche Winkel (DAG, DAE), oder sind gleichweit vom Mittelpunct entfernt.
5. Alle diese Beziehungen behalten ihre Gültigkeit, wenn der Punct im Umkreise selbst liegt.

Eucl. III, 7.

Zu 1, und 2. Vorbereitung. Ziehe die Halbmesser CG, CB, CE, CH.

Beweis. Aus 232, und 47.

Zu 3. Vorbereitung. Ziehe CL ⊥ auf AG und CO ⊥ auf AB.

Beweis. Aus 47, angewandt auf die Dreiecke ACG, und ACB folgt, daß AG > AB; und aus 41, daß CN und um so mehr also CO > CL.

Zu 4. Vorbereitung. Es sei GJE ⊥ auf AD; ziehe AE und dann CM ⊥ auf AE.

Beweis. Aus der Voraussetzung, aus 248, aus der Vorbereitung und aus 45 folgt, daß in den Dreiecken AJE und AJG sein muß W. GAJ = EAJ, und AE = AG; in den Dreiecken ACM und ACL aber ist CM = CL.

Daß nur Eine Linie AE, die gleich AG ist, gezogen werden kann, folgt aus 3.

Die Richtigkeit des 5ten Theiles von unserm Satze leuchtet von selbst ein.

Zus. Können von einem Puncte innerhalb des Kreises nach dem Umkreise mehr als zwei Linien von gleicher Länge gezogen werden, so ist dieser Punct der Mittelpunct.

Eucl. III, 9.

250. Lehrsatz. Zieht man von einem Puncte (A Fig. 121) außerhalb eines Kreises mehrere gerade Linien nach dem Umkreise, so finden folgende Beziehungen Statt:

1. Unter allen, die den Kreis schneiden und zum Theil zwischen den Umkreis fallen, ist die längste diejenige (AD), welche durch den Mittelpunct geht; die übrigen werden desto kleiner, je größere Winkel sie mit dieser größten bilden, oder je weiter sie sich vom Mittelpuncte entfernen.
2. Die kleinste unter denen, die blos bis an den Umkreis gehen (ganz außerhalb des Kreises liegen) ist diejenige (AF), deren Verlängerung durch den Mittelpunct geht, und die übrigen werden desto größer, je größere Winkel sie mit dieser kleinsten bilden, oder je weiter sie sich vom Mittelpuncte entfernen.
3. Beide Gattungen von Linien stimmen darin überein, daß von demselben Puncte aus immer nur zwei gezogen werden können, die von gleicher Länge sind; diese liegen auf verschiedenen Seiten des Mittelpunctes, sind gleichweit von diesem entfernt, oder bilden gleiche Winkel mit dem Durchmesser.

Eucl. III, 8.

Für 1 und 2. Vorbereitung. Ziehe die Halbmesser CG, CQ, CB, CP, ferner CO ⊥ auf BA und CL ⊥ auf GA.

Beweis. Nach 5 und 43 ist AD > AG.
Nach 47, GA > BA.
Nach 43, AQ > AF
Nach 44, PA > AQ
Nach 41, CN > CL
also CO > CL.

Für 3. Vorbereitung. Es sei GJE ⊥ auf AD, ziehe EA, CE, und CM ⊥ auf EA.

Beweis. Es ist EJ = JG (248), daher AE = AG (45), W. EAD = DAG, und CM = CL (46).

Zus. 1. Unter allen Sehnen, die in einem Kreise gezogen werden können, ist der Durchmesser die größte.

Eucl. III, 15. — L. G. II, 2.

Anmerkung 1. Man kann diesen Satz auch unmittelbar beweisen aus 232 und 41.

Anmerkung 2. Man kann nun die Aufgaben V, 3 und 4 lösen.

Zus. 2. Die gleichweit vom Mittelpuncte entfernten Sehnen sind gleich.

Eucl. III, 14. — L. G. II, 8.

Zus. 3. Unter allen den Linien, die ganz außerhalb des Kreises liegen, ist die Tangente die größte, unter denen hingegen, die zum Theil innerhalb des Kreises fallen, ist sie die kleinste.

Zus. 4. Von einem Puncte außerhalb eines Kreises lassen sich zwei Tangenten (AT, AU) an denselben ziehen; sie sind stets von gleicher Größe und die größten unter allen von eben diesem Puncte nach dem Kreise gehenden Geraden, die ganz außerhalb desselben liegen, die kleinsten dagegen unter denen, die zum Theil innerhalb fallen.

Anmerkung 3. Dieser Satz soll später (259, Zus. 2) noch auf einem andern Wege bewiesen werden. Er läßt sich auch unmittelbar beweisen aus 243, und 25.

Zus. 5. Von einem Puncte außerhalb eines Kreises lassen sich nach demselben blos zwei Linien ziehen, die von gleicher Länge sind.

Anmerkung 4. Vergleicht man unsern Hauptsatz mit dem vorhergehenden, so sieht man leicht, daß beide in der That nur Einen Lehrsatz ausmachen, und daß der Unterschied nur in der Verschiedenheit der Lage des Punctes A besteht.

251. Lehrsatz. Wenn zwei Sehnen (AD, BE Fig. 123) sich beliebig schneiden (in F), so ist stets das Rechteck aus den Segmenten (AF, FD) der einen, gleich dem Rechteck aus den Segmenten (BF, FE) der andern.

Eucl. III, 35. — L. G. III, 28, Zus.

Erster Beweis. Aus den Eigenschaften rechtwinkeliger Dreiecke entlehnt.

Vorbereitung. Ziehe durch F den Durchmesser NCFG, ferner CD, endlich CH ⊥ auf AD.

Beweis. Aus 243 und 87, Zus. 4 folgt, daß

$$CD_q - CF_q = DH_q - FH_q$$

$$NF_rFG = AF_rFD$$ (5 und 81), und auf eben die Weise läßt sich zeigen, daß

$$NF_rFG = BF_rFE.$$

Zweiter Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke.

Vorbereitung. Ziehe AB, DE.

Beweis. $\triangle ABF \sim \triangle DFE$ (244, Zus. 1) ꝛc.

Anmerkung 1. Dieser Satz, so bewiesen, liefert zugleich auch einen Beweis unseres frühern Satzes 204.

Anmerkung 2. Unser Satz ist ganz allgemein. Wenn inzwischen für die sich schneidenden Sehnen noch besondere Umstände eintreten, so lassen sich auch noch besondere Folgerungen daraus ziehen; z. B. wenn beide Sehnen sich rechtwinkelig schneiden und eine ein Durchmesser ist — ein Fall, der im folgenden Lehrsatze und seinen Zusätzen näher betrachtet werden soll; oder wenn zwar keine ein Durchmesser ist, aber sie sich unter rechten Winkeln schneiden, welcher Fall den Gegenstand unseres S. 253 ausmacht.

Zus. 1. Bei zwei sich schneidenden Sehnen verhält sich immer das eine Segmentenpaar (AF, BF aus zwei nicht zu derselben Sehne gehörigen Segmenten gebildet) umgekehrt als das andere (FD, FE), also: AF : BF = FE : FD.

Anmerkung 3. Bedient man sich des ersten Beweises unseres Hauptsatzes, so leitet man diesen Zusatz aus ihm her durch Hülfe von 203, Zus. 3. Für den zweiten Beweis ist unser Zusatz weniger eine Folgerung aus dem Hauptsatze als der wörtliche Ausdruck eines Theiles von dem Beweise selbst.

Zus. 2. Damit eine Kreislinie sich beschreiben lasse, welche durch vier gegebene Puncte (A, B, D, E) hindurchgehe, müssen diese eine solche gegenseitige Lage haben, daß die sie verbindenden Linien sich in Segmente theilen, von denen das eine Paar sich umgekehrt verhält, als das andere, oder daß AF : BF = FE : FD.

Anmerkung 4. Man kann also nicht immer eine Kreislinie beschreiben, welche durch vier gegebene Puncte hindurchgeht, während dieß für drei Puncte, so fern sie nur nicht in einer geraden Linie liegen, nach dem, was in 196 gezeigt worden, stets möglich ist. Man vergleiche auch 232, Zus. 4.

252. **Lehrsatz. Fällt man aus einem Puncte (B Fig. 124) im Umkreise eine Senkrechte (BF) auf einen Durchmesser, so ist das Quadrat derselben gleich dem Rechtecke aus den zugehörigen Abschnitten (AF, FD) des Durchmessers; ist demnach die mittlere Proportionale zwischen diesen Abschnitten; also:**

$$BF_q = AF_r FD \text{ und } (203, \text{ Zus. } 4)$$
$$AF : BF = BF : FD.$$

Vorbereitung. Ziehe BA, BD.

Beweis. Aus 246 und 89.

Anmerkung 1. Man kann den Beweis unseres Satzes auch aus 246, und 86 herleiten.

Anmerkung 2. Hierauf beruhen die Auflösungen der Aufgaben: III, 3, 7, 8, 9, 16 (3te Auflös.), und II, 29.

Anmerkung 3. Ist der eine Abschnitt AF gleich dem mfachen des andern FD, also $AF = m \,.\, FD$, so ist $BF_q = m \,.\, FD_q$ und $BD_q = FD_q + BF_q = FD_q + m \,.\, FD_q = (m + 1) FD_q$ d. h. das Quadrat der Sehne BD faßt den Flächenraum des Quadrates von dem Abschnitte FD so vielmal in sich, so vielmal der Durchmesser AD den andern Abschnitt AF in sich schließt.

Zus. 1. Dieselbe Linie (BF), nämlich eine Senkrechte auf einen Durchmesser ist auch immer so beschaffen, daß ihr Quadrat gleich ist dem Ueberschuß des Quadrates vom Halbmesser über das Quadrat des Stücks vom Durchmesser, das zwischen dem Mittelpuncte und der Senkrechten selbst enthalten ist. — Entweder aus dem Hauptsatze und 85, oder unmittelbar aus 87, Zus. 2.

Zus. 2. Der Hauptsatz sowohl als der vorhergehende Zusatz lassen sich umkehren. Ist nämlich eine krumme Linie ABD so beschaffen, daß für jeden beliebigen Punct derselben ist $BF_q = AF_r FD$ oder $= BC_q - CF_q$, so ist diese Linie der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser AD ist.

Pappus mathem. S. VII, 168.

Anmerkung 4. Dieser Zusatz bietet uns das dar, was die Geometer neuerer Zeit Gleichung des Kreises nennen. Die Linie (AD), deren Lage gegeben ist, führt den Namen Axe; der Punct A, oder C, von welchem aus man die Stücke AF oder CF, welche Abscissen heißen, nimmt oder abschneidet, ist der Anfangspunct der Abscissen; die Linien BF nennt man Ordinaten.

Die krumme Linie ist bestimmt, sobald man die Beziehung kennt, die zwischen je zwei zusammengehörigen Abscissen und Ordinaten Statt findet.

Für den Kreis wird die Beziehung ausgedrückt durch

$$BF_q = AF_r FD \text{ oder}$$
$$= AD_r FD - FD_q$$

bezeichnet man also BF mit y, FD mit x, AD mit 2a, und erwägt was wir früher 209, Zus. 5 und Anmerk. 5 erinnert haben, so ist

$$y^2 = (2a - x)\,x = 2ax - x^2$$

die Gleichung, welche die Natur und Eigenthümlichkeit des Kreises darstellt. Sie verwandelt sich, wenn man die Abscissen nicht vom Endpuncte des Durchmessers sondern vom Mittelpuncte aus nimmt, in

$$y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$$

Anmerkung 5. Wir haben oben in 203, Zus. 1, Anm. 2 angegeben, was die Alten unter ebenen Oertern oder ebenen Aufgaben verstanden, diejenigen nämlich, in denen die gesuchte Zahl sowohl in der zweiten Potenz, als auch durch eine andere, aber bekannte, Zahl multiplicirt erscheint; und es ist unser Satz, durch welchen sie dieselben geometrisch auflösten. Alle Probleme dieser Art, oder, wie die Geometer sie jetzt ausdrücken, alle Gleichungen des zweiten Grades können auf eine dieser beiden Formen gebracht werden:

$$\text{I, } x^2 \pm ax = b^2. \quad \text{II, } x^2 \pm ax = -b^2.$$

Erster Fall. Nimm (Fig. 125) $GC = \frac{1}{2}a$, errichte darauf senkrecht $GJ = b$, und beschreibe mit CJ als Halbmesser aus C einen Kreis, welcher die verlängerte CH in den Puncten D und F schneidet. Alsdann ist DG die Zahl x, welche der Gleichung $x^2 + ax = b^2$, GF dagegen der Werth für x, welcher der Gleichung $x^2 - ax = b^2$ Genüge leistet, oder diese Gleichung auflöst.

Denn nimmt man $HF = DG$, so ist $DG = HF = GF - GH = GF - a$, und $DF = a + 2\,DG$, also $GF = a + DG$.

Mit Berücksichtigung von 203, Zus. 5, haben wir

$$\overline{JG}^2 = b^2 = DG\,.\,GF = DG\,(a + DG) = a\,.\,DG + \overline{DG}^2$$

d. i. $x^2 + ax = b^2$ und

$$\overline{JG}^2 = b^2 = DG\,.\,GF = GF\,(GF - a) = \overline{GF}^2 - a\,.\,GF$$

d. i. $x^2 - ax = b^2$.

Zweiter Fall. Nimm (Fig. 126) $AC = \frac{a}{2}$; beschreibe aus C mit CA als Halbmesser den Kreis ADB; errichte $AE = b$ senkrecht auf BA, ziehe $ED \parallel AB$ und $DF \perp$ auf AB; alsdann ist $CB = -\frac{a}{2}$, $DF = EA = b$, also $\overline{FC}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{DF}^2 = \frac{a^2}{4} - b^2$, also $FC = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, mithin $BF = CB + CF = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, woraus folgt

1) $-\sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = BF + \frac{a}{2}$, mithin

$$\frac{a^2}{4} - b^2 = \frac{a^2}{4} + a\,.\,BF + \overline{BF}^2, \text{ oder}$$

$$\overline{BF}^2 + a\,.\,BF = -b^2$$

BF stellt demnach den Werth für x dar, welcher die Gleichung

$$x^2 + ax = -b^2$$

auflöst.

2) $AF = AC - FC = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$,

also $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = \frac{a}{2} - AF$,

und $\frac{a^2}{4} - b^2 = \frac{a^2}{4} - a\,.\,AF + \overline{AF}^2$

oder $\overline{AF}^2 - a\,.\,AF = -b^2$

AF drückt also den Werth für x aus, welcher der Gleichung

$$x^2 - ax = -b^2$$

Genüge leistet.

Man sieht also, daß zur Auflösung der quadratischen Gleichungen durch Hülfe der Geometrie nichts weiter erfordert wird, als daß eine Linie eine Zahl $\frac{a}{2}$ darstelle und eine zweite die Wurzel b aus einer b^2, die man als ein Quadrat, es sei nun commensurabel, oder incommensurabel, betrachtet. Es fällt aber von selbst in die Augen, daß das erstere stets möglich sei, und nicht minder das zweite, wenn b^2 eine wirkliche Quadratzahl ist. Findet letzteres nicht Statt, so kann man b^2 als ein Produkt aus zwei Zahlen m und l betrachten, von denen eine nöthigenfalls als Einheit angesehen werden kann, diese Zahlen m und l können durch Linien dargestellt werden; die mittlere Proportionale zwischen ihnen ist die gesuchte Linie b.

253. Lehrsatz. Schneiden sich zwei Sehnen (AD, BE Fig. 127)

rechtwinkelig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Segmente (AF, BF, DF, EF) gleich dem Quadrate des Durchmessers.

Anmerkung. Der Beweis dieses Satzes läßt sich auf verschiedene Weise führen.

Vorbereitung. Es sei der Mittelpunct C; ziehe den Durchmesser BCJ, dann BD, BE, BA, AJ, JD.

Erster Beweis. AF : BF = FE : DF (251)

$AF_q : BF_q = FE_q : DF_q$ (155, Zus. 1)

$AF_q + BF_q + FE_q + DF_q : FE_q + FD_q = BF_q + FD_q : FD_q$ (126),

aber $FE_q + FD_q = DE_q$, $BF_q + FD_q = BD_q$,

und, weil △ DFE ∾ △ BJD (196)

$BJ_q : DE_q = BD_q : DF_q$ rc.

Zweiter Beweis. Durch Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes. Man ziehe dann die Hülfslinien CB, CD, CE, CA und die Senkrechten CL, CM, wende dann S. 87 auf die Dreiecke BCL, ECL, ACM und MCD an, um Werthe für die Quadrate von BC, CD, CE, CA zu erhalten; deren Summe ist $= 4\, BC_q = BJ_q$; die Summe ihrer Werthe nach 87 und 75 entwickelt giebt

$$AF_q + BF_q + FE_q + FD_q.$$

Dritter Beweis. Da W. BAD + ABE gleich einem Rechten, also die Bogen AE und BD zusammen den halben Umkreis bilden (244, Zus. 3), und eben so auch die Bogen AB und ED, so ist AJ = ED; aber $BJ_q = BA_q + AJ_q = BA_q + ED_q$ rc.

Anmerkung 1. Dieser dritte Beweis ist der kürzeste und einfachste.

Anmerkung 2. Dieser Satz ist der 11te in der Archimedeischen Schrift: „Lemmata."

254. Lehrsatz. Die Quadrate der Sehnen (AB, AE Fig. 124), welche von dem Endpuncte eines Durchmessers auslaufen, verhalten sich wie die Segmente (AF, AP) des Durchmessers, welche durch die aus den Endpuncten der Sehnen nach ihm gezogenen Senkrechten (BF, EP) abgeschnitten werden.

Viviani divinatio de locis solidis pr. 9.

Beweis. Aus 246 und 89.

Zus. $AB_q : BD_q = AF : FD$.

Anmerkung 1. Diese Eigenschaft des Kreises giebt ein leichtes Mittel an die Hand, zwei Quadrate zu construiren, die sich wie zwei gegebene Linien zu einander verhalten. Ist z. B. $AF = \frac{1}{3} FD$, so ist auch $AB_q = \frac{1}{3} BD_q$.

Siehe Papp. coll. mathem. V, 3 und VIII, 6.

Anmerkung 2. Hierdurch ist man nun auch in den Stand gesetzt, den Zusatz zur ersten Aufg. des 4ten Buches aufzulösen.

255. Lehrsatz. Zieht man aus den Endpuncten A und B (Fig. 132) eines Durchmessers nach zwei oder mehrern Puncten (D, E) im Umkreise gerade Linien, so sind stets die Quadratsummen der nach demselben Puncte gezogenen Linien unter einander gleich.

Dasselbe findet auch noch dann Statt, wenn es nicht die Endpuncte selbst des Durchmessers, sondern gleich weit von diesen entfernte (J, K) sind, von denen aus man die Linien zieht.

Simpson Elem. of Geom. III, 20.

Beweis. Für den ersten Theil leicht. Für den zweiten ziehe DO und EP ⊥ auf AB. Alsdann ist:

$$\left.\begin{aligned} DJ_q &= AD_q - AJ_q - 2\, AJ_r JO \\ DK_q &= BD_q - BK_q - 2\, BK_r KO \end{aligned}\right\} (90)$$

also $DJ_q + DK_q = AD_q + BD_q - AJ_q - BK_q - 2\,AJ_r JO - 2\,BK_r KO$
$= AB_q - 2\,AJ_r(AJ, + JO + KO)$
$= AB_q - 2\,AJ_r AK$

Auf gleiche Weise:

$EJ_q + EK_q = AB_q - 2\,BK_r BJ$ rc.

256. **Lehrsatz.** Zieht man von einem Puncte (F Fig. 128) außerhalb eines Kreises gerade Linien (FA, FE) nach dem Umkreise, welche verlängert den Kreis schneiden, so sind die Rechtecke, die man einzeln aus den ganzen verlängerten Linien (FE, FA) und ihren außerhalb des Kreises liegenden Segmenten (FB, FD) bildet, also die Rechtecke $FA_r FD$ und $FE_r FB$ unter einander gleichflächig.

L. G. III, 29.

Erster Beweis. Aus den Eigenschaften rechtwinkeliger Dreiecke.

Vorbereitung. Ziehe die Halbmesser CA, CE, die Senkrechten CM auf AD, und CQ auf BE, und den Durchmesser FCN.

Beweis. In den rechtwinkeligen Dreiecken CFQ, CEQ, CFM, und CAM ist (87, Zus. 4) $FQ_q - QE_q = FM_q - MA_q$, woraus unser Satz durch Anwendung von S. 81 und S. 248 hergeleitet wird.

Zweiter Beweis. Durch Hülfe der ähnlichen Dreiecke.

Vorbereitung. Ziehe EA, BD.

Beweis. $\triangle AFE \sim \triangle BFD$, denn W. FBD = FAE (244, Zus. 3) rc. also FA : FE = FB : FD rc.

Anmerkung 1. Man sieht deutlich, daß unser Satz einer und derselbe mit dem frühern S. 251 ist, und daß man beide allgemeiner so ausdrücken kann: Zieht man zwei Gerade, die sich innerhalb oder außerhalb des Kreises schneiden, so sind die Rechtecke, die man aus denjenigen Segmenten einer jeden derselben bildet, welche zwischen dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte und den Durchschnittspuncten mit dem Umkreise enthalten sind, stets gleichflächig.

Zus. 1. Die Schneidenden werden durch den Umkreis im umgekehrten Verhältnisse geschnitten, so daß ist

AF : EF = BF : DF.

Anmerkung 2. Für den ersten Beweis folgt dieser unser Zusatz aus dem Hauptsatze in Verbindung mit 202, Zus. 5; für den zweiten Beweis ist es weniger ein Folgesatz aus dem Hauptsatze, als der Ausdruck in Worten von einem Theile des Beweises selbst.

Zus. 2. Ist der äußere Abschnitt (BF) der einen Linie (EF) die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten (DF, DA) einer andern (FA), so ist auch stets der äußere Abschnitt (FA) dieser letztern die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der erstern.

Denn DF : BF = BF : AD (Voraussetzung)
DF : BF = FE : FA (Hauptsatz)
also auch BF : FE = AD : FA
FE — BF : BF = FA — AD : AD
EB : BF = DF : AD
EB : DF = BF : AD
also EB : DF = DF : BF.

Vieta Opp. p. 242.

Zus. 3. Werden (Fig. 129) die beiden Linien so gezogen, daß der äußere Abschnitt der einen sich zu ihrem innern verhält, wie der innere der zweiten zum äußern derselben, so sind die äußern Abschnitte der ersten und zweiten zwei mittlere Proportionalen zwischen den innern Abschnitten der zweiten und ersten.

Beweis. Aus 153 und dem Hauptsatze.

Anmerkung 3. Könnte man also in einem Kreise zwei Linien so ziehen, daß KD : AK = AP : HP, so würde die Aufgabe, zwei mittlere Proportionalen zu finden, geometrisch gelöst sein. Allein streng geometrisch dieß auszuführen ist unmöglich; aber vereinfachen läßt sich die Sache auf folgende Weise: Man beschreibe (Fig. 129) mit der größern der beiden gegebenen Linien als Durchmesser einen Kreis; trage in ihn die kleinere als Sehne (HP), verlängere dieselbe so, daß HL = HP, ziehe alsdann LC und JP ∥ LC, und endlich durch den Mittelpunct C die Linie DCKA so, daß AG = CK wird, so ist PH : AP = AP : AK = AK : KD.

Denn AL : AP = AC : AG

AL + AP : AC + AG = AL — AP : AC — AG = AP : AG

2 AH : AD = 2 PH : CG = AP : AG

AH : AD = PH : AK = AP : KD ꝛc.

Vieta Opp. p. 243.

Zus. 4. Wenn der Winkel ABC (Fig. 130) ein Rechter ist, und man vollendet das Rechteck ABCD, verlängert DA und DC und zieht durch B die GBOF so, daß BG = FO (also auch OG = BF), so sind AF und GC zwei mittlere Proportionalen zwischen AB und BC.

Denn: $FD_r AF = BF_r FO = OG_r BG = DG_r GC$, also

DG : FD = AF : GC, aber

DG : FD = AB : AF (196), mithin

AB : AF = AF : GC.

Ferner DG — AB : DG = FD — AF : FD

GC : BC = DG : FD = AF : GC ꝛc.

Anmerkung 4. Philo von Byzanz bediente sich dieses Satzes zur Auffindung zweier mittlern Proportionalen. Siehe Tacquet zu Eucl. VI, 13.

257. Lehrsatz. Wenn ein Durchmesser (GCD Fig. 131) einer den Kreis Schneidenden (ABD) so begegnet (in D), daß das außerhalb des Kreises liegende Stück (BD) der letztern gleich ist dem Halbmesser des Kreises, so ist der eine (AG) der beiden Bogen, welche zwischen diesen Linien liegen, das Dreifache des andern (BF).

Archimedes, Lemma 8.

Beweis. Ziehe GE ∥ AB, und die Halbmesser CE, CB, so ist: W. BDC = BCD = CGE = CEG, aber W. DCE = 2 CGE = 2 BCF, daher W. GCA = BCE = DCE + BCF ꝛc.

Anmerkung. Könnte man für einen gegebenen Bogen AG aus einem seiner Endpuncte einen Durchmesser und aus dem andern eine Sehne so ziehen, daß der Theil der Verlängerung der Sehne, welcher von dem verlängerten Durchmesser abgeschnitten wird, gleich dem Radius des Kreises wäre, so hätte man die berühmte Aufgabe, einen gegebenen Bogen oder Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, gelöst.

258. Lehrsatz. Nimmt man auf dem Halbmesser (CH Fig. 155) eines Kreises einen Punct (J) und auf dessen Verlängerung einen zweiten (A) so, daß der Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen (CJ, CA) dieser Puncte vom Mittelpuncte ist, und zieht ferner aus dem Puncte (A) auf der Verlängerung eine beliebige Schneidende (AGg) nach dem Kreise, so ist stets:

GJ : GA = HJ : HA = gJ : gA.

L. G. III, 34.

Vorbereitung. Ziehe CG, Cg.

Beweis. CJ : CH = CH : CA

CJ : CG = CG : CA

△ CJG ∾ △ CGA

GJ : GA = CJ : CH

CJ : CH = CH — CJ : CA — CH = HJ : HA

GJ : GA = HJ : HA.

259. **Lehrsatz.** **Zieht man von einem beliebigen Puncte (F Fig. 128) außerhalb eines Kreises eine Tangente (FJ) und eine beliebige Schneidende (FA) nach dem Kreise, so ist das Quadrat der Tangente gleich dem Rechtecke aus der ganzen Schneidenden und ihrem äußern Abschnitte; und umgekehrt.**

Eucl. III, 36, 37. — L. G. III, 30.

Anmerkung 1. Wir können diesen Satz als einen unmittelbaren Folgesatz aus S. 256 betrachten; denn wird die Schneidende FE zur Tangente, so fallen offenbar B und E zusammen, und zwar beide auf T, es wird also FE = FB = FT, und daher $FE_r FB = FT_q$. Andere, wie z. B. Euclides leiten aus diesem unsern Satze als Hauptsatz den genannten S. 256 als Zusatz her, und dann wird sein Beweis durch Hülfe der Eigenschaften entweder rechtwinkeliger oder ähnlicher Dreiecke geführt.

Anmerkung 2. Hierauf gründet sich die Auflösung der Aufgabe I, 11; und auch der Beweis für die erste Auflösung der Aufgabe II, 11.

Zus. 1. **Die Tangente ist die mittlere Proportionale zwischen der Schneidenden und dem außerhalb des Kreises liegenden Abschnitte derselben.**

Beweis. Aus 202, Zus. 6.

Zus. 2. **Die zwei Tangenten, die man von einem Puncte außerhalb nach einem Kreise ziehen kann, sind von gleicher Länge.**

Anmerkung 3. Wir hatten dieß schon früher in 250, Zus. 4 erwiesen.

260. **Lehrsatz.** **Verbindet man die Berührungspuncte (T, J) zweier von einem Puncte (F) aus an einen Kreis gezogener Tangenten durch eine Gerade (TJ) und zieht von eben jenem Puncte außerhalb eine beliebige Schneidende (FE), die dem Umkreise in B und der Berührungssehne in O begegnet, so wird sie in eben diesen beiden Puncten harmonisch getheilt. Fig. 128.**

Krafft geom. sublim. §. 77.

Beweis. Es sei FN ⊥ auf TJ, und gehe also durch den Mittelpunct C, so ist

$$FJ_q = FO_q + OJ_q - 2\,OJ_r OP \ (90)$$
$$= FO_q + OJ_r(OJ - 2\,OP)$$
$$= FO_q + OJ_r(JP - OP)$$
$$= FO_q + OJ_r(TP - OP)$$
$$= FO_q + OJ_r OT$$

also

$$FE_r FB = FO_q + OB_r OE \ (259 \text{ und } 251)$$
$$BF_q + BF_r BE = BF_q + 2\,BF_r BO + BO_q + BO_r OE \ (75 \text{ und } 76)$$
$$BF_r BE = BF_r BO + BO_r EF$$
$$BF_r EO + BF_r BO = BF_r BO + BO_r EF$$
$$BF_r EO = BO_r EF$$
$$BF : EF = BO : EO$$
$$BF : EF = FO - BF : EF - FO$$

also (174) BF, FO, EF in harmonischer Proportion.

Vierter Abschnitt.

Von Kreisen, welche sich entweder berühren oder schneiden.

261. Lehrsatz. Kreise, die sich entweder schneiden oder berühren, haben nie einen gemeinschaftlichen Mittelpunct.

Eucl. III, 5, 6.

Allgemeine Anmerkung. Diesem sowohl als den drei folgenden Sätzen liegt die Annahme zum Grunde, daß sich berührende oder schneidende Kreise so viel Puncte mit einander gemein haben, als Berührungs- oder Durchschnittspuncte zwischen ihnen vorhanden sind, daß mithin die Linien, die man aus diesen Puncten nach dem Mittelpuncte jedes Kreises zieht, unter einander gleich sind.

Beweis. Berühren die Kreise einander von außen (Fig. 135), so leuchtet die Richtigkeit unserer Behauptung von selbst ein, weil dann jeder Kreis ganz außerhalb des andern fällt. Schneiden sich die beiden Kreise (Fig. 133) oder berühren sie sich von innen (Fig. 134), so wird der Beweis leicht indirect geführt, indem die Annahme des Gegentheils auf die Ungereimtheit $CE = CA = CB$ führen würde.

262. Lehrsatz. Wenn zwei Kreise sich von innen oder von außen berühren, so geht die ihre beiden Mittelpuncte verbindende Gerade stets durch den Berührungspunct.

Eucl. III, 11, 12.

Beweis. Für beide Fälle indirect. Denn könnte im erstern Falle (Fig. 134) der Mittelpunct J des Kreises ADE außerhalb der Geraden FA liegen, so ließe sich durch Hülfe von S. 43 leicht zeigen, daß auch die Ungereimtheit $DF > BF$ wahr sein müßte. Auf ähnliche Weise könnte man im zweiten Falle (Fig. 135) darthun, daß wenn die Linie cf die beiden Mittelpuncte verbände, ohne durch den Berührungspunct zu gehen, $cD + fB > cf$ sein müßte, was offenbar unmöglich ist.

Anmerkung. Man kann nun die Aufgaben V, 17, 18, 19 auflösen.

263. Lehrsatz. Ein Kreis berührt einen andern nur in einem einzigen Puncte.

Eucl. III, 13.

Beweis. Indirect. Wären, wenn beide Kreise sich von innen berührten, A und B zwei Berührungspuncte, F und C aber die beiden Mittelpuncte, so wäre $FB = FC + CB$, im Widerspruche mit S. 43, und auf ähnliche Weise für die Berührung von außen.

Anmerkung. Man sieht, daß zwei Kreise sich berühren, wenn ihre Mittelpuncte um die algebraische Summe ihrer Halbmesser von einander entfernt sind, und zwar von außen, wenn diese Entfernung gleich der wirklichen Summe, und von innen, wenn sie dem Unterschiede der Halbmesser gleich ist.

L. G. II, 13, 14.

264. Lehrsatz. Wenn zwei Kreise sich schneiden, so sind der Durchschnittspuncte allezeit zwei und von solcher Lage, daß die sie verbindende Gerade senkrecht auf der Axe, d. h. der geraden Linie steht, welche die Mittelpuncte beider Kreise verbindet, und durch diese halbirt wird; aber mehr als zwei Durchschnittspuncte kann es nie geben.

Eucl. III, 10. — L. G. II, 11.

Beweis. Erster Theil. Hätten die beiden Kreise nur einen

Punct mit einander gemein, so würden sie sich blos berühren; da sie sich aber schneiden, so müssen es also wenigstens zwei Puncte sein, die beiden gemeinschaftlich sind.

Diese Puncte können nicht auf derselben Seite der Axe (CDG Fig. 137) liegen, weil sonst ein Widerspruch mit 249 entstehen würde; sie liegen also auf verschiedenen Seiten dieser Axe und ihre Verbindende wird durch diese unter rechten Winkeln halbirt, nach 51, Zus. 4.

Zweiter Theil. Indirect. Beide Kreise hätten dann einen gemeinschaftlichen Mittelpunct, was (261) unmöglich ist.

Anmerkung. Ein flüchtiger Blick auf die Figur lehrt,

1) daß die Entfernung der Mittelpuncte unsrer beiden Kreise kleiner ist als die Summe ihrer Halbmesser, CH, DG aber
2) größer als der Unterschied derselben.

Und diese beiden Beziehungen finden, wenn Kreise sich schneiden, allezeit Statt.
L. G. II, 12.

265. Lehrsatz. Wenn zwei Kreise sich von innen oder außen (Fig. 134 und 135) berühren, und man zieht durch den Berührungspunct (A) eine Gerade (LAM), welche beide Kreise schneidet, so sind beide Centriwinkel (AFM, ACL), welche die nach dem Berührungspuncte und den Durchschnittspuncten (L, M) gezogenen Halbmesser mit einander bilden, von gleicher Größe.

Papp. Coll. math. lemma 4 ad prop. 9.

Vorbereitung. Man verbinde die Mittelpuncte durch die Gerade FC, welche (nöthigenfalls verlängert) durch den Berührungspunct geht (262).

Beweis. $\triangle ACL \sim \triangle AFM$ ꝛc.

Anmerkung. Es soll später (316, 3. 2) gezeigt werden, daß wenn Winkel ACL = AFM ist, die Bogen AL und ABM dasselbe Verhältniß zu den Umkreisen haben, von denen sie Theile ausmachen d. h. daß sie ähnliche Bogen sind. Daher lautet unser Satz bei Pappus also: „Berühren sich zwei Kreise von innen oder außen, so schneidet jede durch den Berührungspunct gehende Gerade (bei hinreichender Verlängerung) ähnliche Bogen von den Umkreisen ab.“

Sechstes Buch.

Von den in und um den Kreis beschriebenen Vielecken.

Einleitung.

266. **Erklärung.** Man sagt eine Figur stehe in einer andern, oder sei in letztere beschrieben, wenn ihre Ecken auf den Seiten dieser zweiten Figur liegen.

Demgemäß nennt man eine Figur eine im Kreise stehende oder in den Kreis beschriebene, wenn ihre Ecken im Umfange des Kreises liegen. Ein Kreis heißt in eine Figur beschrieben, wenn sein Umfang alle Seiten derselben berührt.

Eucl. IV, Erkl. 1, 3, 5.

Anmerkung. Dem zufolge, was wir oben (116) bewiesen haben, kann man in jedes regelmäßige Vieleck (Fig. 82) so viel andere ähnliche Vielecke beschreiben, als man will, die aber alle von verschiedener Größe sind. Da es gleichwohl nöthig ist, wenn man allgemein von Vielecken spricht, die in Vielecke beschrieben sind, an solche dabei zu denken, die eine bestimmte Größe haben, und dieser Fall, wie wir aus 222, Zus. wissen, dann eintritt, wenn die Ecken E, F, G, J, L mit den Halbirungspuncten der Seiten AD, DC, CB, BQ, QA zusammenfallen, so kann man ein solches Vieleck vorzugsweise das in ein anderes beschriebene nennen. Siehe 282.

267. **Erklärung.** Eine Figur heißt um eine andere beschrieben, wenn alle ihre Seiten durch die Ecken der letztern hindurchgehen.

Ein Kreis ist daher um eine Figur beschrieben, wenn die Kreislinie durch deren Ecken geht.

Eine Figur ist dagegen um einen Kreis beschrieben, wenn alle ihre Seiten den Kreis berühren.

Eucl. IV, Erkl. 2, 4, 6.

Anmerkung 1. Wir werden in 283, Zus. 2 sehen, wie ein regelmäßiges Vieleck um ein regelmäßiges beschrieben wird.

Anmerkung 2. Zuweilen werden wir der Kürze halber anstatt Vielecke in und um den Kreis blos sagen das Vieleck in und das Vieleck um; (oder auch innere und äußere Vielecke. Uebers.)

268. **Erklärung.** Wenn ein regelmäßiges Vieleck in oder um einen Kreis beschrieben ist, und eben so ein zweites von doppelt so großer Seitenzahl, so wollen wir jenes das frühere, dieses das spätere Vieleck nennen.

269. **Grundsatz.** Ein Vieleck kann weder in noch um ein anderes beschrieben werden, wenn nicht beide gleich viel Seiten haben.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der in und um den Kreis beschriebenen Vielecke.

---

270. Lehrsatz. Keine Figur (Figg. 141, 139) kann in einen Kreis beschrieben werden, wenn nicht innerhalb oder außerhalb derselben sich ein Punct (C) von solcher Beschaffenheit findet, daß alle Linien, die man von ihm nach den Ecken der Figur zieht, alle unter einander gleich sind.

Eben so wenig kann eine Figur um einen Kreis beschrieben werden, wenn nicht innerhalb derselben ein Punct (C Fig. 139) sich findet, der so beschaffen ist, daß alle Senkrechten, von ihm auf die Seiten gezogen, von gleicher Länge sind.

Beweis. Erster Theil. Aus der Beschaffenheit des Kreises und 266.

Zweiter Theil. Aus 267 und 243.

271. Lehrsatz. Keine Figur läßt sich um einen Kreis beschreiben, wenn nicht, bei gerader Seitenzahl, die Summe der ersten, dritten, fünften rc. Seite, so groß ist als die Summe der zweiten, vierten, sechsten rc., und, bei ungerader Seitenzahl, die Summe der ersten, dritten, fünften rc., gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten rc., wenn man diese letztere Summe noch vermehrt um die doppelte Länge des Stücks der letzten Seite, welches zwischen der ersten und dem Berührungspuncte liegt.

Pitot Mem. de l'Acad. de Paris. A. 1725 p. 45.

Beweis. Aus 267, und 205, Zus. 4.

Zus. Ein Parallelogramm läßt sich also nur dann um einen Kreis beschreiben, wenn es gleichseitig ist.

272. Lehrsatz. Es giebt kein Dreieck, welches nicht in und um einen Kreis beschrieben werden könnte, und mithin auch keines um und in welches sich nicht ein Kreis beschreiben ließe.

Beweis. Erster Theil. Die Möglichkeit, unter allen Umständen ein Dreieck in einen Kreis, und umgekehrt einen Kreis um ein Dreieck zu beschreiben, ist aus 241 einleuchtend.

Zweiter Theil. Beschreiben eines Dreiecks um den Kreis.

Vorbereitung. Es mögen sich die Linien BC und CD (Fig. 139), welche die Winkel ABD und ADB halbiren, sich in C schneiden; ziehe CA, und die Senkrechten CJ, CK, CL, so ist zu beweisen (270), daß CJ = CK = CL.

Beweis. Aus 46.

Anmerkung 1. Vorbereitung und Beweis des zweiten Theils unseres Satzes lehren uns folgende Eigenschaften der Dreiecke kennen:

Zus. 1. Die winkelhalbirenden Linien eines Dreiecks haben innerhalb desselben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, der gleich weit von den Seiten entfernt ist.

L. C. §. 502.

Anmerkung 2. Das Dreieck ist die einzige Figur, in und um welche in allen Fällen ein Kreis sich beschreiben läßt, und welches jederzeit sowohl in als um einen Kreis beschrieben werden kann.

Anmerkung 3. Man kann nun die Aufgaben VI, 2, 4 auflösen.

Zus. 2. Der Inhalt eines Dreiecks wird dargestellt durch das Produkt aus seinem Umfange in den halben Radius des eingeschriebenen Kreises.

L. G. III, 32 Anmerk.

Beweis. Aus der Betrachtung der Dreiecke ACD, ACB, BCD, auf welche man 203, Zus. 6 anwendet.

Zus. 3. Halbirt eine Linie (AC) einen Winkel (BAD), so kann jeder Punct auf ihr Mittelpunct eines Kreises werden, der die beiden Schenkel berührt. Der Halbmesser desselben ist die Senkrechte, die man aus dem angenommenen Puncte auf einen der Schenkel fällt. Die Stücke der Schenkel zwischen den Berührungspuncten und dem Scheitel sind von gleicher Länge.

273. Lehrsatz. **Ist ein Dreieck (ABD Fig. 127) in einen Kreis beschrieben, so ist das Rechteck aus zwei seiner Seiten (AB, BD) gleichflächig mit dem Rechtecke aus dem zur dritten Seite (AD) gehörigen Höhenperpendikel (BF) und dem Durchmesser des Kreises.** —

L. G. III, 32.

Beweis. $\triangle$ ABJ $\sim$ $\triangle$ BFD.

Zus. 1. Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird dargestellt durch das Produkt seiner drei Seiten, dividirt durch den doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Beweis. Aus dem Hauptsatze und 203, Zus. 6.

L. G. III, 32, Zus.

Zus. 2. Wenn verschiedene Dreiecke in denselben oder in gleiche Kreise beschrieben werden, so verhalten sich ihre Flächenräume, wie die Produkte aus ihren Seiten.

Anmerkung. Die beiden, in dem ersten Zusatze dieses und dem zweiten Zusatze des vorhergehenden Hauptsatzes mitgetheilten Ausdrücke für den Flächeninhalt eines Dreiecks, wie sehr sie auch von den frühern Ausdrücken in 203, Zus. 6, und 84, Zus. 1 scheinbar verschieden sind, sind dennoch unmittelbar auf diese gegründet. Wir wollen später (399 und 400) noch zwei andere Ausdrücke für den Inhalt eines Dreiecks angeben. Alle diese Ausdrücke kommen bei vielen Untersuchungen sehr zu Statten.

274. Lehrsatz. **Nicht alle unregelmäßigen, aber wohl alle regelmäßigen Vielecke lassen sich in und um den Kreis beschreiben.**

L. C. §. 530.

Beweis. Erster Theil. Aus 270 und 271.

Zweiter Theil. Aus 270, 271 und 107.

Anmerkung 1. Die beiden ersten Sätze dieses Buches, verbunden mit 108, zeigen deutlich genug, wie man verfahren müsse, um einen Kreis in oder um ein gegebenes regelmäßiges Vieleck zu beschreiben. Man kann daher die Aufgaben VII, 13, 14 auflösen.

Anmerkung 2. Wir sprechen hier und in den folgenden Sätzen von 277 an von regelmäßigen Vielecken, die in und um den Kreis beschrieben sind. Doch bemerkt Clavius (zu Eucl. IV, 16) mit Recht, daß zwar ein in den Kreis beschriebenes gleichseitiges Vieleck stets auch gleichwinkelig und mithin regelmäßig sein müsse, aber nicht so ein umschriebenes Vieleck; bei ihm hat die Gleichheit der Seiten nur dann zur nothwendigen Folge Gleichheit der Winkel, wenn entweder die Seitenzahl ungerade, oder, falls sie gerade ist, wenn zwei an derselben Seite anliegende Winkel gleich sind, oder allgemein zwei solche Winkel, von denen, wenn man den einen als den ersten bezeichnet, der andere eine gerade Stellenzahl erhält, also der 4te, oder 6te rc. ist. Clavius bemerkt

ferner, daß ein gleichwinkeliges Vieleck zwar stets gleichseitig sein müsse, wenn es um den Kreis, aber nicht, wenn es in denselben beschrieben sei; sondern im letztern Falle nur dann, wenn entweder dir Seitenzahl ungerade oder bei gerader Seitenzahl entweder zwei an einander gränzende Seiten gleich seien, oder allgemeiner zwei solche, von denen, wenn die eine als erste betrachtet werde, die andere als vierte, sechste rc. erscheint.

275. Lehrsatz. In allen Kreisvierecken d. h. in allen Vierecken (ABCD Fig. 140), die in den Kreis beschrieben sind, beträgt die Summe zweier Gegenwinkel (ABC und ADC; BAD und BCD) zwei Rechte.

Eucl. III, 22.

Beweis. Aus 244, Zus. 3.

Anmerkung. Es kann also kein Viereck in den Kreis beschrieben werden, welches nicht diese Eigenschaft besitzt; also kein schiefwinkeliges Parallelogramm.

276. Lehrsatz. In allen dem Kreise eingeschriebenen Vierecken (ABCD Fig. 140) ist die Summe der beiden Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten (BA und DC, AD und CB) gleich dem Rechtecke aus den beiden Diagonalen (AC und BD).

L. G. III, 36. — Tacquet in seiner Anm. zu Eucl. VI, 26.

Vorbereitung. Ziehe BG so, daß W. ABG = DBC, woraus in Verbindung mit 244, Zus. 1, folgt, daß △ ABG ∾ △ DBC und △ GBC ∾ △ ABD.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der △ ABG ∾ △ DBC, und △ GBC ∾ △ ABD.

Anmerkung 1. Diesen Satz nennt man den Ptolemäischen Lehrsatz, weil Ptolemäus ihn erfunden, oder doch zuerst vorgetragen und gebraucht hat, um die Sehnen gegebener Bogen zu berechnen. Diese Berechnung soll später (357) näher angegeben werden.

Siehe Ptolemaei Almagestum I, cap. 9.

Anmerkung 2. Vergleicht man diesen unsern Satz mit dem vorhergehenden, mit 244, Zus. 4, und mit 251, Anm. 4, so sieht man, daß ein Viereck, um in einen Kreis beschrieben werden zu können, drei Eigenschaften besitzen muß, die aber in einem so engen Zusammenhange stehen, daß keine von ihnen an einem Vierecke vorhanden sein kann, ohne daß auch zugleich die beiden andern Statt haben.

Zus. 1. Ein Quadrat kann in und um den Kreis beschrieben werden.

Anmerkung 3. Man kann nun lösen die Aufgaben: VI, 6, 7, 8, 9, 10,

Zus. 2. Die Diagonalen eines Kreisvierecks verhalten sich zu einander wie die Summen der Rechtecke, aus den Vierecksseiten gebildet, die in den Endpuncten eben dieser Diagonalen zusammentreffen.

L. G. III, 33, Anm.

Vorbereitung. Zuvörderst dieselbe wie für den Beweis des Hauptsatzes; verlängere alsdann BG bis O, wodurch ⌢ OC = ⌢ AD; ziehe OC, nimm ⌢ BP = ⌢ AD, und ziehe CP.

Beweis. $BG_r BD = BC_r AB$ weil △ ABD ∾ △ BGC
$OG_r BD = CO_r DC$ weil △ GCO ∾ △ DBC
$= AD_r DC$
also $OG_r BD + BG_r BD = AD_r DC + BC_r AB$
$BO_r BD = AD_r DC + BC_r AB.$

Auf gleiche Weise ist:
$PC_r CA = AB_r AD + BC_r CD$
Aber, weil ⌢ PB + ⌢ BC = ⌢ CO + ⌢ BC
d. i. ⌢ PBC = ⌢ BCO

so ist BO = PC, also

$$BO_r BD : PC_r CA = BD : CA \text{ ꝛc.}$$

Zus. 3. Der Flächenraum eines Kreisvierecks wird ausgedrückt durch das Produkt aus einer seiner Diagonalen in die Summe der beiden Rechtecke, die man aus je zwei auf derselben Seite eben dieser Diagonale liegenden Seiten bildet, dividirt durch den doppelten Kreisdurchmesser. Fig. 127.

Bew. $\square$ ABED $= \triangle ABE + \triangle BED$

$$= \frac{AB \cdot AE \cdot BE}{2\,BJ} + \frac{BD \cdot DE \cdot BE}{2\,BJ} \quad (273, 3.1)$$

$$= \frac{BE\,[AB \cdot AE + BD \cdot DE]}{2\,BJ}$$

Zus. 4. Sind die vier Seiten des Vierecks gegeben, so kann man dessen Diagonalen finden.

Beweis. Bezeichnen wir der Kürze halber die Seiten mit a, b, c, d, die Diagonalen mit x, y, so ist

$$1)\; x \cdot y = ac + bd$$

$$2)\; \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \quad (\text{Zus. } 2.)$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$x^2 = \frac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd}$$

$$y^2 = \frac{(ac + bd)\,(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Anmerkung 4. Castillon hat (Mem. de l'Acad. de Berlin 1766 p. 357) gezeigt, daß der Pythagoräische Lehrsatz (87) und seine Erweiterung (90) aus dem Ptolemäischen Lehrsatze hergeleitet werden können.

Es sei (Fig. 140) das in Rede stehende Dreieck ABC; man beschreibe einen Kreis um dasselbe, nehme BD = AC und ziehe AD, DC Ist nun

1. das Dreieck in B rechtwinkelig, so ist AC ein Durchmesser, also auch BD, mithin DC = AB, und AD = BC, und darum
$$AC_q = AB_q + BC_q.$$
2. Ist $\triangle$ ABC nicht rechtwinkelig, so sei, damit W. BDC = ABD werde, DC ∥ AB; man ziehe ferner AE ∥ BC, alsdann ist EC = AB, BC = AE = AD, also $AD_r BC = BC_q$ und der Ptolemäische Lehrsatz giebt in unserm Falle:
$$BD_q = AB_r DC + BC_q.$$
3. Man ziehe jetzt AH ⊥ auf DC; weil AE = AD, ist DE = 2 HE; ferner AF ⊥ auf CBF, so ist, weil W. AED = BCD = FBA, $\triangle$ AHE ∾ $\triangle$ AFB, also
$$AB_r HE = BF_r AE = FB_r BC = FB_r AD.$$
Aber es ist
$$AB_r DC = AB_r(DE + EC) = AB_r DE + AB_r EC = 2\,AB_r HE + AB_q$$
Substituirt man diesen Werth für $AB_r DC$ in 2, so ergiebt sich
4. $AC_q = BC_q + AB_q + 2\,FB_r BC.$
d. h. unser früherer Satz (90) für den Fall, wo W. ABC stumpf ist. Für den Fall, wo W. ABC spitz ist, und AF innerhalb des Dreiecks fällt, erhält man auf demselben Wege:
$$AC_q = BC_q + AB_q - 2\,FB_r BC.$$

Anmerkung 5. Man sieht hier wiederum ein Beispiel, wie man zu derselben Wahrheit auf verschiedenen Wegen gelangen kann. Zwar verdient der aus dem Satze des Pappus (91) hergeleitete Beweis schon darum den Vorzug vor dem hier gegebenen und auf den Ptolemäischen Lehrsatz sich stützenden, weil zu letzterm Kenntniß der Eigenschaften des Kreises erfordert wird, die man bei jenem entbehren kann; und noch besser als beide ist, sowohl für den Pythagoräischen Lehrsatz selbst, als für dessen Erweiterung, der

nach Euclides Vorgang und Art geführte Beweis, weil in ihm Alles eben so einfach als einleuchtend und aus den ersten Grundbegriffen hergeleitet ist; nichts desto weniger ist es von großem Nutzen, bei jeder Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen und zu zeigen, wie genau die verschiedenen Grundbegriffe der Geometrie unter einander zusammen hängen, und zu denselben Wahrheiten führen.

Zweiter Abschnitt.

Von den in und um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecken.

---

277. **Lehrsatz.** Ist ein regelmäßiges Vieleck (Figg. 141 und 142) in den Kreis beschrieben, so

1) theilen seine Seiten den Umkreis in so viele gleiche Bogen, als das Vieleck Seiten enthält.
2) Die Seiten sind die zugehörigen Sehnen dieser Bogen.
3) Der Mittelpunct des Kreises ist auch der des Vielecks.
4) Auch der Halbmesser des Kreises ist zugleich Halbmesser des Vielecks.
5) Die Sehne, welche die Endpuncte zweier an einander gränzenden Seiten verbindet, ist die Seite des regelmäßigen Vielecks in eben diesen Kreis, das halb so viel Seiten hat, als das gegebene, wenn die Seitenzahl dieses letztern gerade ist.

Beweis. Aus den Erklärungen und 107 von selbst einleuchtend.

Anmerkung 1. Gerade muß natürlich die Seitenzahl des Urvielecks sein, damit der unter 5. mitgetheilte Satz Statt finden könne, weil nur in diesem Falle alle Seiten sich zu halb so viel Paaren, als ihre eigne Menge beträgt, verbinden lassen (Fig. 142).

Zus. 1. Die Seite eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks ist die Sehne eines Centriwinkels, der $= \frac{4\,R}{n}$ ist, wenn n die Seitenzahl bezeichnet.

(85, Zus. 1).

Zus. 2. Die Seite des in den Kreis beschriebenen Sechsecks ist gleich dem Halbmesser des Kreises (82, Zus. 2).

Anmerkung 2. Hierdurch kann man lösen die Aufgaben: VI, 3, 15.

278. **Lehrsatz.** Die Seiten und Umfänge ähnlicher regelmäßiger Vielecke, die in oder um Kreise von verschiedenen Durchmessern beschrieben sind, verhalten sich wie diese Durchmesser, ihre Flächenräume aber wie die Quadrate derselben.

Eucl. XII, 1.

Beweis. Aus 274, 107 und 222.

Anmerkung 1. Auf diesem Satze und dem frühern 196 beruht der Gebrauch der Linien des Proportionalzirkels, welche sich unter der Benennung „Polygones" auf demselben finden; und dazu dienen Polygone oder regelmäßige Vielecke in gegebene Kreise oder über gegebenen Linien zu beschreiben. Ist nämlich der Kreis gegeben, so ist dessen Halbmesser gegeben; der Halbmesser des Kreises aber, auf welchen sich die auf dem Proportionalzirkel verzeichneten Seiten der Polygone beziehen, ist die darunter befindliche Seite des regulären Sechsecks 277, Zus. 1.

Ist dagegen die Linie gegeben, über welcher das Vieleck zu beschreiben ist, so kömmt es darauf an, den Halbmesser des Kreises zu finden, in welchen das Vieleck sich beschrei-

den läßt d. h. den Halbmesser des Vielecks selbst finden. Man erlangt dieß unmittelbar durch die Sechsecks-Seite des Proportionalzirkels. Darauf beschreibt man über der gegebenen Linie als Grundlinie ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem jeder Schenkel gleich dem gefundenen Halbmesser ist; die Spitze desselben ist der Mittelpunct des zu beschreibenden Kreises.

Anmerkung 2. Ueber die Construction von Vielecken über gegebenen Linien oder in den Kreis siehe in den Aufgaben VI, 18.

279. **Lehrsatz.** **Wenn man aus den Endpuncten (F, E Fig. 141) eines regelmäßigen Vielecks von ungerader Seitenzahl (n) nach der Spitze des Gegenwinkels (ABD) gerade Linien zieht, so bilden diese mit der genannten Seite ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem jeder Winkel über der Grundlinie sich zu dem an der Spitze verhält wie $\frac{n-1}{2} : 1$.**

Tacquet zu Eucl. IV, 11, Anm.

Beweis. $\triangle$ FBE gleichschenkelig nach 244, Zus. 1. Ferner W. FBE $= \frac{1}{2}$ FCE $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\,R}{n} = \frac{2\,R}{n}$, also W. BFE $=$

$$\frac{2\,R - \frac{2\,R}{n}}{2}$$ (38, Zus. 2) rc.

Anmerkung 1. Unser Satz gilt auch noch dann, wenn das Vieleck nicht in den Kreis beschrieben ist, und stellt daher eine allgemeine Eigenschaft aller regelmäßigen Vielecke von ungerader Seitenzahl dar.

Zus. 1. Die Winkel über der Grundlinie in unsern gleichschenkeligen Dreiecken sind also Vielfache von dem Winkel an der Spitze, und zwar ist diese Beziehung

im (regelmäßigen)	Dreieck	. . . . . .	=	1 : 1
— — —	Fünfeck	. . . . . .	.	2 : 1
— — —	Siebeneck	. . . . . .	.	3 : 1
— — —	Neuneck	. . . . . .	.	4 : 1

Anmerkung 2. Man kann nun die Aufgaben: VI, 11, 12 lösen.

280. **Lehrsatz.** **Wenn man aus dem Mittelpuncte eines Kreises eine Senkrechte (CK) auf die Seite eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks von gerader Seitenzahl (n) fällt, dieselbe nach beiden Seiten hin so weit verlängert, daß sie ein Durchmesser (HJ) wird, so wird die genannte Vielecksseite stets halbirt, und die Geraden, die man aus ihren Endpuncten nach dem (entferntern) Ende (H) des Durchmessers zieht, bilden mit ihr ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem jeder Winkel über der Grundlinie sich zu dem an der Spitze verhält wie $\frac{n-1}{2} : 1$.**

Tacquet zu Eucl. IV, 11, Anm.

Beweis. Wie beim vorhergehenden Satze.

Zus. Die Winkel über der Grundlinie sind also Vielfache von dem zugehörigen Winkel an der Spitze; und zwar

verhält sich jeder von jenen zu diesem beim	Viereck	wie	$\frac{3}{2} : 1$
— — — — — — — —	Sechseck	—	$\frac{5}{2} : 1$
— — — — — — — —	Achteck	—	$\frac{7}{2} : 1$
— — — — — — — —	Zehneck	—	$\frac{9}{2} : 1$

Anmerkung. Aus diesem und dem vorhergehenden Satze geht hervor, daß wenn man die Aufgabe: ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, in welchem jeder Winkel über der Grundlinie, ein =, anderthalb =, zwei =, drittehalb =, drei = mal u. s. w. so groß als der Winkel an der Spitze ist, mit geometrischer Strenge lösen könnte, man auch im Stande wäre, in einen Kreis ein regelmäßiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl zu beschreiben. Und die Lösung dieser Aufgabe hinsichtlich des gleichschenkeligen Dreiecks hängt, wie man von selbst sieht, und wie schon Pappus sehr richtig bemerkt hat, wieder von der Lösung der Aufgabe ab: einen gegebenen Kreisbogen in zwei Stücke zu theilen, die ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben. Allein diese letztere Aufgabe läßt sich nicht allgemein auf elementar=geometrischem Wege d. h. durch Hülfe von Lineal und Zirkel auflösen.

Die Vielecke, welche sich in den Kreis beschreiben lassen, sind folgende: Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, mit allen denen, die durch wiederhohlte Halbirung der zu ihren Seiten gehörigen Bogen erhalten werden können.

Man gebraucht das gleichschenkelige Dreieck, nach der in den beiden letzten Sätzen angegebenen Weise nicht wirklich bei der Construction, des Dreiecks, Vierecks und Sechsecks, die man noch einfacher erhalten kann, aber wohl für das Fünfeck. Siehe die Aufgabe VI, 11.

281. Lehrsatz. Zieht man von dem Puncte F (Fig. 141) im Umfange eines Kreises die Sehne FE, welche die Seite eines Vielecks von N Seiten ist, und die Sehne FM, welche als Seite zu einem Vielecke von n Seiten gehört, so ist der Winkel (ECM), welcher gleich dem Unterschiede der Centriwinkel der beiden genannten Vielecke ist, gleich $\frac{N-n}{Nn} \cdot 4\,R$.

Beweis. $W.\ ECM = FCM - FCE = \frac{4\,R}{n} - \frac{4\,R}{N}$ (110, Zus. 1)

$$= \frac{N-n}{Nn} \cdot 4\,R.$$

Zus. Ist also Nn theilbar durch $N-n$, so ist EM die Seite eines Vielecks in den Kreis von $\frac{Nn}{N-n}$ Seiten. Ist zwar Nn kein Vielfaches von $N-n$, aber diese letztere Zahl gleich 2, oder einer Potenz von 2, so läßt sich das Vieleck ebenfalls construiren; indem der Bogen EM alsdann so viele Seiten desselben umschließt, als diese Potenz von 2 Einheiten hat; so daß man durch fortgesetztes Halbiren, welches immer mit geometrischer Strenge ausführbar, den zu jeder einzelnen Seite gehörigen Bogen finden kann; was nicht möglich ist, wenn $N-n=3$, oder 5, oder 6 rc. ist. Ist z. B. MF die Seite des gleichseitigen Dreiecks, und FE die Fünfecksseite, so umschließt der Bogen EM zwei Seiten des Funfzehnecks in den Kreis.

Man kann nun die Aufgabe VI, 16 lösen.

282. Lehrsatz. Wenn man zwei an einander gränzende Seiten (DE, FE Fig. 143) eines regelmäßigen Vielecks halbirt (in K und R), diese Halbirungspuncte verbindet, so finden folgende Beziehungen Statt:

1) Diese Verbindende (KR) ist die Seite eines neuen regelmäßigen Vielecks, welches dem gegebenen ähnlich, und in dasselbe beschrieben ist.

2) Diese Seite verhält sich zu der des gegebenen wie das Per-

pendikel (CK) des letztern zum Radius seines umschriebenen Kreises.

3) Die Umfänge beider Vielecke stehen in eben diesem Verhältnisse;

4) Die Flächenräume in dem zweifach Hohen des genannten Verhältnisses oder

5) Die Flächenräume verhalten sich wie das Perpendikel (CQ) des neuen Vielecks zum Radius (CE) des um das gegebene beschriebenen Kreises.

Beweis. Erster Theil. Aus 116 und 266.

Zweiter und dritter Theil. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke KQE, CKE und CKQ.

Vierter Theil. Aus 222.

Fünfter Theil. Aus der Betrachtung, daß die Vielecke sich verhalten wie △ CKQ : △ CKE verbunden mit 200.

Zus. Beschreibt man mit dem Perpendikel CK des gegebenen Vielecks FEDBA aus demselben Mittelpunct C einen Kreis, so ist, wie man leicht sieht, das neue Vieleck, dessen Seite KR, nicht nur in das gegebene Vieleck, sondern auch in diesen Kreis beschrieben, um welchen das gegebene Vieleck beschrieben ist. Fährt man auf diese Weise fort mit der Construction von Kreisen, so erhält man eine Reihe von regelmäßigen Vielecken, alle von gleicher Seitenzahl, welche hinsichtlich sowohl ihrer Seiten als Flächenräume in einem bestimmten Verhältnisse zu einander stehen.

Anmerkung. Man könnte solche Vielecke, indem man von dem gegebenen anfing, das erste, zweite, dritte ꝛc. nennen.

283. Lehrsatz. Verlängert man die Halbmesser (CF, CE Fig. 143) eines in den Kreis beschriebenen Vielecks (FEDBAF) bis sie der Tangente (NG) begegnen (in N und G), welche man an den Punct (J) gezogen hat, wo das verlängerte Perpendikel (CK) dem Umkreise begegnet, so ist dieses Stück (NG) dieser Tangente die Seite des dem gegebenen ähnlichen und um den Kreis beschriebenen Vielecks; oder wenn man aus dem Mittelpuncte nach den Halbirungspuncten (K und R) zweier an einander stoßenden Seiten gerade Linien zieht, und dieselben verlängert bis sie der Tangente (VU) begegnen, die an den gemeinschaftlichen Endpunct (E) dieser beiden Seiten gezogen ist, so ist das so erhaltene Stück dieser Tangente gleichfalls die Seite des dem gegebenen ähnlichen und um den Kreis beschriebenen Vielecks.

Außerdem verhalten sich die Seiten (NG, VU) des äußern Vielecks zu denen (FE, JL) des innern wie der Kreishalbmesser (CJ) zum Perpendikel (CK) des innern; ihre Umfänge stehen in eben diesem Verhältnisse; ihre Flächenräume in dem zweifach Hohen desselben; oder auch in dem Verhältnisse des Kreishalbmessers zum Perpendikel (CQ) des in das gegebene (FEDBAF) beschriebenen Vielecks.

Beweis.

Erster und zweiter Theil. Aus 46.

Dritter Theil. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CKE und CJG, verbunden mit 223 und 222. Endlich aus der Betrachtung, daß die ähnlichen Vielecke sich verhalten wie △ CJG : △ CKE = JG : KQ (200) = CJ : CQ.

Zus. 1. Offenbar ist das Vieleck NGampN, welches um den Kreis FJELBAF beschrieben ist, auch zugleich um das Vieleck (FEDBAF) beschrieben, welches in dem Kreise steht; und beschreibt man mit CG als Radius einen Kreis, so ist das Vieleck, welches um den gegebenen Kreis beschrieben war, zugleich eingeschriebenes Vieleck für den neuen Kreis. Es ist daher einleuchtend:

1) daß das umschriebene Vieleck in Beziehung auf das eingeschriebene und alle die folgenden successiv eingeschriebenen in die Classe der Vielecke gehört, von denen in 282, Zus. die Rede war;
2) daß die Construction eines Vielecks um ein anderes zusammenfällt mit der Construction eines Vielecks um einen Kreis.

Zus. 2. Aus unserm Satze ergiebt sich, wie man um ein regelmäßiges Vieleck oder um einen Kreis ein jenem ähnliches Vieleck beschreiben kann, und daß nur diejenigen Vielecke sich um den Kreis beschreiben lassen, die auch in denselben beschrieben werden können; wodurch man in den Stand gesetzt ist, die Aufgabe VI, 12 zu lösen.

Zus. 3. Ist die Seite eines in den Kreis beschriebenen Vielecks gegeben, so kennt man auch die Seite des ihm ähnlichen umschriebenen.

Zus. 4. Die Seite eines Vielecks, das um ein anderes oder um den Kreis beschrieben ist, verhält sich zur Seite des gegebenen oder in den Kreis eingeschriebenen Vielecks, wie sich eben diese letztere Seite zur Seite des Vielecks verhält, das man in das gegebene beschreibt d. h. es ist, den beiden letzten Hauptsätzen zufolge

$$VU : JL = JL : KR$$

und ist mithin die Seite jedes Vielecks die mittlere Proportionale zwischen den Seiten der in und um dasselbe beschriebenen Vielecke; und eben so verhält es sich mit den Flächenräumen dieser drei Vielecke, da

$$VU_q : JL_q = JL_q : KR_q$$

ist.

Zus. 5. Zieht man die Gerade FD, so ist sie $\parallel$ KR, und darum $= 2$ KR; unser vorhergehender Zusatz kann daher auch so ausgedrückt werden:

$$VU : JL = JL : \tfrac{1}{2} FD.$$

d. h. die Seite jedes in den Kreis beschriebenen Vielecks ist die mittlere Proportionale zwischen der Seite des ihm ähnlichen umschriebenen Vielecks, und der halben Seite desjenigen eingeschriebenen Vielecks, welches halb so viel Seiten, als das gegebene hat.

Huygens de circuli magnitudine pr. 13.

Zus. 6. Aus dem vierten Zusatze ergiebt sich ferner, daß der Unterschied der Flächenräume eines um den Kreis und eines ihm ähnlichen in denselben beschriebenen Vielecks sich zum Flächenraume des äußern verhalte, wie das Quadrat der Seite des innern Vielecks zum Quadrate des Kreisdurchmessers. Bezeichnen wir das Vieleck über FE oder JL mit V; das über VU mit V′ und das über KR mit V″, so ist

$$V' : V = V : V''$$

also auch

$$V' - V : V' = V - V'' : V$$
$$= \triangle RQE : \triangle CRE$$
$$= EQ : CE$$
aber $EQ : ER = ER : CE$
also $EQ : CE = ER_q : CE_q$
mithin $V' - V : V' = ER_q : CE_q$
$$= FE_q : ET_q$$

Zus. 7. Daher ist der genannte Flächenunterschied gleich dem Inhalte eines jenen beiden ähnlichen Vielecks, das um einen Kreis beschrieben ist, dessen Durchmesser gleich der Seite (FE) des eingeschriebenen (gegebenen) Vielecks ist.

Du Fay Mem. de l'Acad. 1729 p. 297.

Zus. 8. Der erwähnte Flächenunterschied ist darum auch gleich dem Vieleck, dessen Ecken die Durchschnittspuncte der Linien sind, welche, bei gerader Seitenzahl des gegebenen Vielecks, die Endpuncte je zweier Gegenseiten verbinden, oder bei ungerader Seitenzahl als Senkrechte auf den Seiten in ihren Endpuncten errichtet werden. (Zus. 7, 113, und 115). Denn in solchen Vielecken ist das Perpendikel halb so groß, als die Seite des gegebenen Vielecks, also diese Seite gleich dem Durchmesser des in das neue Vieleck beschriebenen Kreises.

Du Fay ibid. p. 299.

284. Lehrsatz. Beschreibt man in einen Kreis (Fig. 144) ein regelmäßiges Vieleck von gerader Seitenzahl, zieht einen durch zwei Gegenecken gehenden Durchmesser (AE) und von einem seiner Enden (E) eine Sehne (EB) nach dem Endpuncte einer von den an dem andern Ende (A) des Durchmessers anliegenden Seiten (AB), und verbindet die Endpuncte je zweier, gleich weit von eben diesem zweiten Ende (A) des Durchmessers entfernter Seiten, (AB und AH, BC und HG, CD und GF) unter einander (durch BH, CG, DF), so ist das Rechteck aus dem Kreisdurchmesser und der genannten Sehne (EB) gleichflächig mit dem Rechtecke aus der Seite (AB) des gegebenen Vielecks und der Summe aller jener die Seiten verbindenden Geraden.

Archim. de sphaera et cylindro pr. 22.

Vorbereitung. Ziehe CH, DH, DG, welche den Durchmesser in L, M, N schneiden.

Beweis. $\triangle ABK \sim \triangle LKH \sim \triangle LCM \sim \triangle MGN \sim \triangle NDO \sim \triangle OFE$; also

$$BK : KA = HK : KL = CM : ML = GM : MN = DO : ON = FO : OE$$

also $BK + HK + CM + GM + DO + FO : KA + KL + ML + MN + ON + OE = BK : KA$ 2c.

Anmerkung 1. Die Seitenzahl des Vielecks muß gerade sein, weil sonst AE kein Kreisdurchmesser, und BH, CG, DF nicht unter einander parallel sind, worauf die Aehnlichkeit der Dreiecke beruht.

Anmerkung 2. Gilt, wie wir gezeigt haben, unser Satz allgemein für Vielecke von gerader Seitenzahl, so gilt er natürlich auch für solche, deren Seitenzahl doppelt gerade oder ein Vielfaches von 4 ist. Und auf diesen besondern Fall beschränkt Tacquet diesen Satz des Archimedes, in seiner Schrift: Theoremata selecta ex Archimede pr. 16, weil es dieser Fall allein ist, den Archimedes zur Bestimmung des cubischen Inhaltes der Kugel gebraucht hat; wie wir näher im 12ten Buche zeigen wollen.

285. Lehrsatz. Beschreibt man in einen Kreisabschnitt (DAF Fig. 144) ein Vieleck, in welchem alle Seiten, außer der den Abschnitt begränzenden DF, unter einander gleich und von gerader Zahl sind, zieht aus der der Grundlinie (DF) gegenüberliegenden Ecke (A) den Durchmesser (AE), verbindet dessen Scheitel (E) mit dem Ende (B) der dem andern Scheitel anliegenden Seite (AB), so ist das Rechteck aus dieser Sehne (BE) und dem Theil des Durchmessers (AO), welcher durch die Grundlinie (DF) abgeschnitten wird, gleichflächig mit dem Rechtecke aus einer der gleichen Seiten des Vielecks (BA) und der um die halbe Grundlinie vermehrten Summe der Linien (BH, CG), welche die Seiten des Vielecks wie im vorigen Satze verbinden.

Archim. de sphaera et cylindro pr. 23.

Vorbereitung. Wie beim vorigen Satze.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABE, ABK, HKL, LCM, MGN, NDO, erhält man:

$$AB : BE = AK : BK = LK : HK = LM : CM = MN : MG = NO : OD$$

also auch (163)

$$AB : BE = AO : BH + CH + DO.$$

Anmerkung. Die beiden Anmerkungen zum vorigen Satz gelten auch hier.

Dritter Abschnitt.

Von den Eigenschaften einiger besondern in den Kreis beschriebenen Vielecke.

---

286. Lehrsatz. Das Perpendikel (CX Fig. 142) eines in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist gleich der Hälfte des Radius; das Höhenperpendikel des Dreiecks ist anderthalb mal so groß als der Halbmesser.

Eucl. XIV, 1, Zus. für den ersten Theil.

Beweis. Erster Theil. Aus der Betrachtung der gleichseitigen Dreiecke FCE und CED.

Zweiter Theil. Aus dem ersten.

287. Lehrsatz. Das Quadrat der Seite des in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks (Fig. 142) ist dreimal so groß als das Quadrat des Halbmessers, oder gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser und dem Höhenperpendikel des Dreiecks.

Eucl. XIII, 12. — L. G. IV, 4, Anm.

Beweis. $\frac{1}{4}\, FD_q = DX_q = CD_q - CX_q$ (87, Zus. 2)

aber $CX_q = \frac{1}{4}\, CD_q$, also

$\frac{1}{4}\, FD_q = \frac{3}{4}\, CD_q$,

mithin $FD_q = 3\, CD_q$

oder $FD_q = CD \,.\, 3\, CD = 2\, CD \,.\, \frac{3}{2}\, CD = AE \,.\, AX$ (286).

Anmerkung. Siehe Stedman Philos. Transact. LXVI, p. 299, wobei Horsley sehr richtig bemerkt, daß dieser Satz eine unmittelbare Folgerung aus dem allgemei-

nen für alle Dreiecke gültigen Satze ist, den wir oben in 273 bewiesen haben; da für das gleichseitige Dreieck das Rechteck aus zwei Seiten, das Quadrat einer Seite ist.

Zus. Die Seite des Dreiecks ist also zum Radius incommensurabel.

288. Lehrsatz. Das in den Kreis beschriebene Quadrat ist doppelt so groß als das Quadrat des Halbmessers und halb so groß als das Quadrat des Durchmessers.

Zus. 1. Daher verhält sich die Seite des Quadrates zum Radius wie $\sqrt{2} : 1$.

Anmerkung. Dieses Verhältniß ist das der Diagonale eines Quadrates zur Seite; auch ist wirklich die Seite des in Kreis beschriebenen Quadrates die Diagonale in dem Quadrate des Halbmessers.

L. G. IV, 3, Anm.

Zus. 2. Das Quadrat über den Durchmesser ist das um den Kreis und folglich auch das um das innere Quadrat beschriebene Quadrat.

Zus. 3. Beschreibt man daher in ein Quadrat ein anderes, in dieses ein drittes u. s. f., so bilden die Flächenräume dieser Quadrate die fallende geometrische Reihe: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ rc.

289. Lehrsatz. Das Quadrat des Perpendikels bei dem in den Kreis beschriebenen Sechseck verhält sich zum Quadrat des Radius oder der Seite des Sechsecks wie 3 zu 4.

Beweis. $CK_q = CF_q - FK_q = CF_q - \frac{1}{4} CF_q = \frac{3}{4} CF_q$.

Zus. Bezeichnet r den Radius oder die Seite des Sechsecks, so kann man das Perpendikel des letztern ausdrücken durch $\frac{r}{2}\sqrt{3}$. Es ist also zum Halbmesser incommensurabel.

290. Lehrsatz. Theilt man den Halbmesser (CJ Fig. 143) nach dem äußern und mittlern Verhältniß in Z, so ist das größere Stück die Seite des in den Kreis eingeschriebenen Zehnecks.

Pappus V, 47. — L. G. IV, 5.

Vorbereitung. Nimm $JE = CZ$; ziehe CE, EZ.

Beweis. W. $CJE = CEJ = 2\, JCE$ (97), also

$$5\, JCE = 2\, R$$
$$JCE = \frac{2}{5}\, R = \frac{4}{10}\, R$$

also JE, oder CZ die Seite des Zehnecks.

Zus. 1. Die Seite des Zehnecks ist also zum Radius incommensurabel.

Anmerkung 1. Bezeichnet r den Radius, so kann man die Seite des Zehnecks ausdrücken durch

$$\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

wie aus 213, Anm. 2 hervorgeht.

Zus. 2. Das Perpendikel (CK) des Fünfecks ist halb so groß als der Radius (oder Sechsecks-Seite) und die Seite des Zehnecks zusammen genommen.

Eucl. XIV, 1.

Beweis. Wenn $JE = JF = CZ$ der Seite des Zehnecks ist, so ist FE die Seite des Fünfecks und CK dessen Perpendikel. Nun ist:

$$CK = CZ + ZK = CZ + \frac{1}{2} ZJ, \text{ weil } EZ = EJ,$$
$$= CZ + \frac{1}{2}(CJ - CZ)$$
$$= \frac{1}{2} CJ + \frac{1}{2} CZ$$
$$= \frac{CJ + JE}{2}.$$

Anmerkung 2. Die Größe dieses Perpendikels kann also ausgedrückt werden durch

$$\frac{r + \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{2r + r(\sqrt{5} - 1)}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} r$$

Anmerkung 3. Das ganze Perpendikel BK aus einer Winkelspitze auf die Gegenseite wird daher ausgedrückt durch

$$r + \frac{1 + \sqrt{5}}{4} r = \frac{5 + \sqrt{5}}{4} r.$$

Zus. 3. Nimmt man die Summe des Radius und der Zehnecksseite, so ist die ganze Linie nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilt, und der Radius ist der größere Abschnitt (211).
Eucl. XIII, 9.

291. Lehrsatz. Das Quadrat der Fünfecksseite ist gleich der Summe der Quadrate des Radius und der Zehnecksseite. Fig. 143.
Eucl. XIII, 10.

Vorbereitung. Ziehe Cb senkrecht auf die Zehnecksseite JE, wodurch also Jb = bE; den Punct O, wo diese Senkrechte die Fünfecksseite schneidet, verbinde mit J; so ist OJ = OE.

Beweis. W. ECO $= \frac{1}{2}$ ECJ = JFE (232); aber W. JFC = 2 JCF (weil FJ die Zehnecksseite) = FCE, also auch W. FCE — ECO = JFC — JFE d. i. W. FCO = CFO, daher CO = FO, und △ OCF ∾ △ CFE; also FE : FC = FC : FO, und, weil auch △ OJE ∾ △ FJE, FE : JE = JE : OE, also $JE_q + FC_q = FE_r OE + FE_r FO = FE_r FE = FE_q$

Anmerkung 1. Dieser Beweis ist von Euclides. Einen merklich kürzern hat Castillon mitgetheilt (Mem. de l'Acad. de Berlin 1766 p. 358) nämlich

$$ZJ_q + CJ_q = 3\, CZ_q = 3\, JE_q \text{ (217)},$$

also $ZJ_q + CJ_q + JE_q = 4\, JE_q = 4\, KE_q + 4\, JK_q = EF_q + ZJ_q$
und mithin $EF_q = CJ_q + JE_q$.

Zus. 1. Die Seite des Fünfecks ist sowohl zum Radius als zur Zehnecksseite incommensurabel; sie wird ausgedrückt durch

$$r \,.\, \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

Beweis. Bezeichnen wir die Fünfecksseite mit v, so ist nach unserm Hauptsatze und 290, Anm. 1

$$v^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 = \frac{r^2}{4}[4 + (\sqrt{5} - 1)^2]$$

$$= \frac{r^2}{2}(5 - \sqrt{5})$$

also $v = r \dfrac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

Anmerkung 2. Eine Größe wie $5 - \sqrt{5}$, d. h. den Unterschied zweier blos in Potenz commensurabler Linien, die überdieß so beschaffen sind, daß der Unterschied (20) ihrer Quadrate (25 und 5) auch wiederum blos in Potenz und nicht in Länge gegen die größere (5) commensurabel ist, nennt Euclides (X, 85) *vierte Apotome*. Eine Linie, deren Quadrat gleich ist dem Rechteck aus einer commensurablen Linie ($\frac{r}{2}$) und einer vierten Apotome ($r[5 - \sqrt{5}]$) führt bei Euclides (X, 77) den Namen der *kleinern Irrationale*.

Zus. 2. Das Quadrat der Fünfecksseite (FE) und das Quadrat der Sehne (FD), welche die Endpuncte zweier an einander gränzen-

den Seiten des Fünfecks verbindet, sind zusammengenommen dem fünffachen Quadrate des Radius gleich.

Beweis. $FB_q + FJ_q = BJ_q = 4\ CJ_q$

$FE_q = FJ_q + CJ_q$

also $FB_q + FJ_q + FE_q = 4\ CJ_q + FJ_q + CJ_q$

oder $FB_q + FE_q = 5\ CJ_q$.

Eucl. XIV, 2, Lehns.

Zus. 3. Wenn man auf dem Durchmesser AB (Fig. 145) im Mittelpuncte eine Senkrechte CD errichtet, den Endpunct D mit E dem Halbirungspuncte von CB verbindet, und von E mit ED den Bogen DF beschreibt, so ist die Sehne DF die Seite des Fünfecks in den Kreis, und FC die Seite des Zehnecks.

Beweis. $BF_r FC + CE_q = FE_q$ (80) $= DE_q = DC_q + CE_q$,

also $BF_r FC = DC_q = BC_q$

und darum $BF : BC = BC : FC$

also auch $BF - BC : BC = BC - FC : FC$ (153)

$FC : AC = AF : FC$

oder $AC : FC = FC : AF$.

Der Radius AC ist mithin nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilt, daher FC die Seite des Zehnecks (290) und, weil $FC_q + CD_q = FD_q$, FD die Seite des Fünfecks nach dem Hauptsatze.

Anmerkung 3. Dieser Zusatz giebt ein leichtes Verfahren an die Hand, sowohl das Fünfeck als das Zehneck in einen Kreis zu beschreiben, was sich schon beim Ptolemäus findet, Almag. I, 9. Siehe der Aufgabe VI, 11 2te Auflösung.

292. Lehrsatz. Der Flächeninhalt des Fünfecks ist gleich dem Rechteck aus zwei Linien, von denen die eine anderthalb mal so groß als der Halbmesser, und die andere $\frac{5}{6}$ von der Sehne ist, welche zwei an einander gränzende Seiten des Fünfecks verbindet.

Eucl. XIV, 4, Lehns.

Beweis. Da FD $\perp$ auf CE (Fig. 143), so ist

$$\triangle FCE = \frac{CE}{2} . FS = \frac{3\ CE}{2} . \frac{FS}{3} = \frac{3\ CE}{2} . \frac{FD}{6}$$

$$\text{mithin } FEDBAF = 5 . \triangle FCE = \frac{3\ CE}{2} . \frac{5\ FD}{6}.$$

Vierter Abschnitt.

Von den Eigenschaften der spätern*) Vielecke in Beziehung auf ihre frühern.

---

293. Lehrsatz. Halbirt man die zu den Seiten eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks (Fig. 143) gehörigen Bogen, so

1) bilden die Sehnen dieser Hälften die Seiten eines neuen re-

*) Siehe 268.

gelmäßigen Vielecks von doppelt so viel Seiten, als das gegebene hat.

2) Jede Seite (JE) des spätern Vielecks steht zu der halben Seite (KE) des frühern in dem zweifach niedern Verhältniß des Durchmessers (BJ) zu dem Stücke (BK) von ihm, welches durch die Seite des frühern Vielecks abgeschnitten wird.

3) Dasselbe Verhältniß haben die Umfänge beider Vielecke.

4) Der Flächenraum des spätern Vielecks verhält sich zu dem des frühern, wie der Halbmesser zum Perpendikel (CK) des frühern; oder

5) wie die Seite (FE) des frühern zu der Senkrechten (FS) aus ihrem Endpuncte auf den Radius, oder

6) diese Flächenräume stehen in dem zweifach niedern Verhältniß des Durchmessers (TE) und des Stücks (TS) von ihm, welches durch die vorhin genannte Senkrechte (FS) von ihm abgeschnitten wird.

Beweis. Erster Theil. Ist von selbst klar.

Zweiter und dritter Theil. Nachdem FE in K halbirt und der Durchmesser BCKJ gezogen, aus 245 und der Aehnlichkeit der Dreiecke JKE, JBE und KBE.

Vierter Theil. Aus der Betrachtung, daß, wenn n die Anzahl der Seiten des gegebenen Vielecks bezeichnet, der Inhalt desselben ausgedrückt wird, durch

$$2\,n\,.\,\triangle\,KCE$$

und das zugehörige spätere Vieleck durch

$$2\,n\,.\,\triangle\,JCE$$

also, wenn man jenes durch V, dieses durch V′ bezeichnet, ist:

$$V : V' = 2\,n\,.\,\triangle\,KCE : 2\,n\,.\,\triangle\,JCE$$
$$= \triangle\,KCE : \triangle\,JCE = CK : CJ.$$

Fünfter und sechster Theil. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke FSE und CEK ist

$$CK : CE \text{ oder } CJ = FS : EF = \sqrt{TS} : \sqrt{TE}.$$ (209, Zus. 3)

$$\text{also } V : V' = FS : EF = \sqrt{TS} : \sqrt{TE}.$$

Anmerkung. Der letzte Theil unseres Satzes ist das schöne Theorem, welches zuerst Hennert in dem 5ten Theile der Verhandlungen der Haarlemmer Gesellschaft der Wissenschaften bekannt machte.

Zus. 1. Der Umfang eines in den Kreis beschriebenen Vielecks ist kleiner als der Umfang des zu ihm gehörigen spätern Vielecks.

Zus. 2. Dasselbe gilt von den Flächenräumen zweier solchen Vielecke.

Zus. 3. Es ist $V : V' = CK : CJ = CK : CE = FT : TE$, d. h. ein in den Kreis beschriebenes Vieleck verhält sich zu seinem spätern, wie die Sehne des zur Seite des erstern gehörigen Supplementarbogens zum Kreisdurchmesser.

Vieta opp. pag. 398.

Zus. 4. Aus unserm vorigen Zusatz folgt wiederum, daß wenn man in einen Kreis ein beliebiges regelmäßiges Vieleck beschreibt, darauf sein späteres, zu diesem letztern wieder das spätere und auf diese Weise fortfährt, so daß man z. B. n Vielecke erhält, so ver-

hält sich der Flächenraum des ersten zu dem des letzten (nten), wie das Produkt aller zu den Supplementarbogen der Seiten gehörigen Sehnen zur (n—1)ten Potenz des Durchmessers.

Dieser Satz ist von Vieta (Opp. p. 399) und kann zur Bestimmung des Flächenraumes vom Kreise mit großem Nutzen gebraucht werden.

Zus. 5. Nach dem vierten Theile unseres Satzes kann man den Flächenraum eines Vielecks durch Hülfe eines andern, das halb so viel Seiten hat, also den Inhalt eines spätern Vielecks durch Hülfe des zugehörigen frühern berechnen.

Da alsdann der Gebrauch der Zahlen nöthig wird, so muß man auf das achten, was wir früher (203, Anmerkung 5) darüber gesagt haben.

Bedient man sich der früher angegebenen Ausdrücke, so ist die Zahl, welche den Inhalt des frühern Vielecks darstellt $= 2n \,.\, \triangle CKE = n \,.\, CK \,.\, KE$, also, bezeichnet man das spätere Vieleck mit V', so ist

$$V' : n \,.\, CK \,.\, KE = CJ : CK$$

mithin

$$V' = \frac{n \,.\, CK \,.\, KE \,.\, CJ}{CK} = \frac{n \,.\, FE \,.\, CJ}{2} = (\text{wenn } CJ = 1) = \frac{n \,.\, FE}{2},$$

woraus der bemerkenswerthe Satz Ludolf's van Ceulen (in seiner Schrift über den Kreis), der auch bei Snellius prop. 3 sich findet, folgt, nämlich: Multiplicirt man die Seite eines in den Kreis, dessen Halbmesser der Einheit gleich gesetzt wird, beschriebenen Vielecks, mit der halben Anzahl seiner Seiten, so erhält man den Inhalt des in eben diesen Kreis beschriebenen Vielecks von doppelt so großer Seitenzahl.

Siehe hierüber L. G. IV, 13.

Zus. 6. Da der Inhalt des spätern Vielecks $= \frac{n \,.\, FE \,.\, CJ}{2}$ ist, so ist also ein Vieleck gleichflächig einem Dreiecke, dessen Höhe gleich dem Radius und dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks ist, das halb so viel Seiten als das gegebene hat.

Dieser wichtige Satz findet sich bei Huygens im Beweise des 7ten Satzes seiner Schrift: de vera circuli magnitudine.

Zus. 7. Daher verhält sich der Inhalt des Sechsecks zu dem des Dreiecks wie CF : CX (Fig. 142) = 2 : 1 (286) d. h. das Sechseck ist doppelt so groß als das Dreieck. Dieß ist der 5te Satz bei Snellius.

Zus. 8. Der Flächenraum eines Zwölfecks wird daher dargestellt durch das Produkt aus dem Sechsfachen des halben Radius in den ganzen Radius d. h. durch das dreifache Quadrat desselben; das Zwölfeck ist also so groß als das Quadrat der Dreiecksseite (287).

Der erste Theil unseres Satzes ist bei Snellius der 6te, der zweite dagegen sein 4ter.

Zus. 9. Aus dem vorigen Zusatz verbunden mit 258 ergiebt sich

wiederum, daß das Zwölfeck sich zum Quadrate in dem Kreis verhält wie 3 : 2, und zum Quadrat des Durchmessers wie 3 : 4.

294. **Lehrsatz.** Das Quadrat der Seite (FE Fig. 141) eines in den Kreis beschriebenen Vielecks verhält sich zum Mittelpunctsdreieck (FCJ) des in eben diesen Kreis beschriebenen Vielecks von doppelt so großer Seitenzahl, wie die halbe Seite (KE) des erstern zum achten Theile des Radius.

Beweis. $\triangle$ CJE : $\triangle$ CKE = CJ : CK
$\triangle$ CJE : $\frac{1}{2}$ $CK_r KE$ = CJ : CK
$\triangle$ CJE : $\frac{1}{2}$ KE = CJ : 1
$\triangle$ CJE : KE_q = CJ : 2 KE (155, Zus. 2)
also FE_q : $\triangle$ CJE = KE : $\frac{1}{8}$ CJ.

Anmerkung. Dieß ist der artige Satz, den Hennert an dem vorhin angeführten Orte p. 245 mittheilt, und den wir hier kürzer bewiesen haben.

Zus. $\triangle$ CJE : CJ_q = $\frac{1}{2}$ KE : CJ
d. h. das Mittelpunctsdreieck eines Vielecks verhält sich zum Quadrat des Radius, wie der vierte Theil der Seite des Vielecks von halb so großer Seitenzahl zum Radius.

Hennert p. 255.

295. **Lehrsatz.** Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges regelmäßiges Vieleck (EFABDE Fig. 143) und auch das zu ihm gehörige spätere (EJFtA ꝛc.), so ist die Seite des letztern die mittlere Proportionale zwischen dem Radius und dem Ueberschuß (QE) des Durchmessers (TE) über die Sehne (FT), die zum Supplementarbogen (FtaT der Seite (FE) des andern Vielecks gehört.

Vorbereitung. Ziehe Cb $\perp$ auf JE, welche KE in O schneidet; dann JOP nach CE, und beschreibe aus T mit TF den Bogen FQ, so daß TQ = TF, und daher QE = TE — TF.

Beweis. 1) JO = OE (51, Zus. 5). 2) $\triangle$ CJO $\cong$ $\triangle$ CEO, also W. CJO = CEO, daher 3) $\triangle$ KJO $\cong$ $\triangle$ OEP, also W. OPE ein Rechter; und JOP $\perp$ auf CE; daher 4) $\triangle$ CKO $\cong$ $\triangle$ CPO, und CK = CP, und daraus endlich 5) weil $\triangle$ CKE $\sim$ $\triangle$ EFT ist, CK = $\frac{1}{2}$ FT = CP.

Dieß vorausgeschickt, ist nun, weil $\triangle$ TEJ $\sim$ $\triangle$ JPE,

$$\begin{aligned} JE_q &= TE_r EP \\ &= TE_r(CE - CP) \\ &= TE_r(CE - \tfrac{1}{2}\,FT) \\ &= TE_r\left(\frac{2\,CE - FT}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\,TE_r(TE - FT) \\ &= CE_r QE. \end{aligned}$$

Anmerkung. Man findet diesen Satz bei Snellius (pr. 1) und schon bei Ptolemäus (Almag. I, 9), aber auf folgende Weise ausgedrückt:

TE : JE = JE : PE

allein PE = $\frac{1}{2}$ (TE — TF) = $\frac{1}{2}$ QE.

Zus. Man hat daher auch

$$JE_q = \tfrac{1}{2}\,TE_r(TE - TF),$$

also, weil

$$JT_q = TE_q - JE_q$$
$$JT_q = TE_q - \frac{1}{2} TE_r(TE - TF)$$
$$= TE_r TE - \frac{1}{2} TE_r(TE - TF)$$
$$= \frac{1}{2} TE_r(TE + TF).$$

Diese Erweiterung unseres Satzes, welche bei der Bestimmung des Flächenraums der Vielecke so wesentlichen Nutzen leistet, fand Snellius; man kann sie in Worten so aussprechen: Das Quadrat der Sehne, welche zu dem Supplementarbogen der Seite eines beliebigen Vielecks gehört, ist gleich dem Rechteck aus dem Halbmesser und der Summe des Durchmessers und der Sehne des Supplementarbogens, der zu der Seite des Vielecks von halb so großer Seitenzahl gehört.

Anmerkung 2. Dieser unser Satz und sein Zusatz leisten wesentliche Dienste, um mit Leichtigkeit die Umfänge von Vielecken zu berechnen, die man dadurch erhält, daß man die Anzahl der Seiten des zuletzt berechneten verdoppelt. Ist z. B. das Sechseck gegeben, so berechnet man zuerst durch Hülfe des Hauptsatzes die Seite des Zwölfecks; alsdann durch Hülfe des Zusatzes die Sehne des Supplementarbogens, der zur Seite des Zwölfecks gehört; alsdann wiederum durch Anwendung des Hauptsatzes die Seite des Vierundzwanzigecks u. s. w. Die auszuführenden Rechnungen kehren immer in ununterbrochener Ordnung wieder; wie man dieß bei Snellius und auch bei Montucla de la quadrature du cercle p. 52 sehen kann.

296. Lehrsatz. Fällt man aus dem Mittelpuncte (C Fig. 143) eines Kreises Senkrechte (CJ, CL) auf zwei an einander gränzende Seiten (NG, Ga) eines um denselben beschriebenen regelmäßigen Vielecks (NGa ꝛc.), zieht darauf einen Halbmesser (CEG) nach dem Durchschnittspuncte (G) eben jener beiden Seiten, und halbirt endlich die Winkel (ECJ und ECL), welche derselbe mit den genannten beiden Senkrechten bildet, durch die Geraden CX und CY, welche die Vielecksseiten (in X, und Y) schneiden, so finden folgende Beziehungen Statt:

1) Die Gerade XY, welche die Durchschnittspuncte der Winkelhalbirenden mit den Vielecksseiten verbindet, ist die Seite des um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks, welches doppelt so viel Seiten hat, als das gegebene.

2) Die Seite des neuen Vielecks verhält sich zu der des gegebenen, wie der Halbmesser (CJ) des innern Kreises für das letztere Vieleck zur Summe der Halbmesser (CJ + CG) des innern und äußern Kreises.

3) Die Umfänge beider Vielecke verhalten sich wie der Durchmesser des innern Kreises für das gegebene Vieleck zur Summe der Halbmesser des innern und äußern Kreises.

4) Die Flächenräume beider Vielecke stehen in eben diesem Verhältnisse.

Beweis.

Erster Theil. $\triangle CJX \cong \triangle CLY$, daher $CX = CY$, $JX = LY$, daher auch $GX = GY$, mithin $CG \perp$ auf XY, und mithin, weil $CE = CJ$, berührt XY den Kreis in E; und ist $XE = XJ$, so wie $YE = YL$.

Zweiter Theil. $VX : XE = CV : CE$ (206)
$VE : XE = CV + CE : CE$
$VU : XY = CV + CE : CE$

Dritter Theil. Bezeichnet U den Umfang des gegebenen, U' den des neuen Vielecks, so ist

$$U : U' = n \,.\, VU : 2\,n \,.\, XY$$
$$= VU : 2\,XY$$
$$= CV + CE : 2\,CE.$$

Vierter Theil. Aus 224 verbunden damit, daß hier die Perpendikel beider Vielecke gleich dem Halbmesser des innern Kreises sind.

Zus. 1. Die Seite eines um den Kreis beschriebenen Vielecks ist kleiner als die Seite des gleichfalls umschriebenen Vielecks von halb so großer Seitenzahl.

Zus. 2. Sowohl die Umfänge als die Flächenräume sind gleichfalls kleiner als die Umfänge und Flächenräume der umschriebenen Vielecke von halb so großer Seitenzahl.

Zus. 3. Die Seite eines um den Kreis beschriebenen Vielecks verhält sich zur Seite des Vielecks, das in den Kreis beschrieben und halb so viel Seiten als das erstere hat, wie der Kreishalbmesser zur Summe des Halbmessers und Perpendikels von dem eingeschriebenen Vieleck.

Beweis.

$$JX : JG = CJ : CJ + CG = CK : CK + CE$$
$$\text{aber } JG : KE = CJ : CK$$
$$\overline{JX : KE = CJ : CK + CE \; (155) = XY : FE.}$$

Siehe hierüber L. G. IV, 14.

Zus. 4. Daher verhält sich die Seite des um den Kreis beschriebenen Sechsecks zur Seite des eingeschriebenen Dreiecks wie $r : r + \frac{r}{2}$ (286) d. i. wie 2 : 3.

Snellius pr. 7.

297. Lehrsatz. Jedes Vieleck in den Kreis ist die mittlere Proportionalfläche zwischen dem innern und äußern Vieleck eben dieses Kreises von halb so großer Seitenzahl; und jedes Vieleck um den Kreis ist die harmonische Mittelfläche zwischen dem ihm ähnlichen eingeschriebenen Vieleck und dem umschriebenen Vieleck von halb so viel Seiten.

Snellius pr. 9 für den ersten Theil.

Saurin Mem. de l'Acad. 1723 p. 10. für den zweiten Theil.

Erster Theil. Vorbereitung. Ist JE (Fig. 143) die Seite des gegebenen Vielecks, so sind FE und NG die Seiten des innern und äußern Vielecks von halb so großer Seitenzahl; diese drei Vielecke verhalten sich daher wie 2 △ JCE : △ FCE : △ NCG = △ JCE : △ KCE : △ JCG.

Beweis.

$$\triangle KCE : \triangle CJE = KQ : JP$$
$$= CK : CJ$$
$$= CE : CG$$
$$\triangle JCE : \triangle JCG = KE : JG = CE : CG$$
$$\text{also } \triangle KCE : \triangle JCE = \triangle JCE : \triangle JCG \text{ etc.}$$

Zweiter Theil. Vorbereitung. Sind NG und FE die Seiten

der beiden ähnlichen Vielecke um und in den Kreis, so ist tL = FD die Seite des innern Vielecks von halb so viel Seiten, und, verlängert man CL bis zum Durchschnitt mit der verlängerten Tangente NJG, so ist JH die halbe Seite des äußern Vielecks von der halben Seitenzahl; daher verhalten sich die Vielecke über NG, FE und dem Doppelten von JH,

wie $\triangle CNG : \triangle FCE : \triangle JCH$, oder weil $\triangle JCN = \triangle LCG$, und $\triangle JCZ = \triangle FOE$

$JCLG : \triangle JCL : \triangle JCH$.

Da nun (174) drei Größen harmonisch proportionirt sind, wenn sich die erste zur dritten wie der Unterschied der beiden ersten zum Unterschiede der beiden letzten verhält, so ist zu beweisen, daß

$$\triangle JCL : \triangle JCH = JCLG - \triangle JCL : \triangle JCH - JCLG$$
$$\triangle JCL : \triangle JCH = \triangle JGL : \triangle GLH \text{ ist.}$$

Beweis. $\triangle JCL : \triangle JCH = CL : CH = CJ : CH$
$\triangle JGL : \triangle GHL = JG : GH = CJ : CH$ (217) 2c.

Anmerkung. So ist also z. B. das Sechseck in den Kreis die mittlere Proportionalfläche zwischen dem äußern und innern Dreieck; und das Sechseck um den Kreis die harmonische Mittelfläche zwischen dem Sechseck in und dem Dreieck um den Kreis.

298. Lehrsatz. Beschreibt man in einen beliebigen Kreisabschnitt (FIELD Fig. 143) ein gleichschenkeliges Dreieck (FED) und in die durch dessen Schenkel gebildeten Kreisabschnitte wiederum gleichschenkelige Dreiecke (FJE, ELD), so ist die vierfache Summe dieser beiden letztern stets größer als das erstere.

Huygens de vera circuli magnitud. pr. 1.

Vorbereitung. Ziehe JL, und dann EC ⊥ auf JL, woraus folgt, daß $FE = ED = JL$ und $\triangle JEL = \triangle ELD = \triangle FJE$.

Beweis. $FE_q : JE_q = ES : EP$ (254),
aber $FJ = JE$, und $FJ + JE > FE$, also $2JE > FE$
und darum $FE_q : JE_q < 4 : 1$, also auch
$ES : EP < 4 : 1$
Eben so $FD : JL < 2 : 1$
also $ES \,.\, FD : EP \,.\, JL < 8 : 1$
Weil nun
$$\triangle FED : \triangle JEL = ES \,.\, FD : EP \,.\, JL,$$
so ist auch
$$\triangle FED : \triangle JEL < 8 : 1$$
$$\triangle FED : \triangle JEF + \triangle ELD < 4 : 1 \text{ 2c.}$$

299. Lehrsatz. Beschreibt man in einen Kreisabschnitt (JEL Fig. 143), welcher kleiner als der Halbkreis ist, ein gleichschenkeliges Dreieck (JEL) und über derselben Grundlinie (JL) ein zweites (JGL), dessen Schenkel Tangenten an den Kreis sind, so schneidet die Tangente (XEY), welche man durch die Spitze (E) des ersten Dreiecks zieht, von dem zweiten (JGL) stets ein Dreieck (XGY) ab, welches größer ist, als die Hälfte jenes erstern (JEL).

Huygens de v. c. m. pr. 2.

Vorbereitung. Ziehe den Halbmesser CE, der verlängert durch G gehen und senkrecht auf JL stehen muß (51, Zus. 5).

Beweis. $\triangle JGL : \triangle JEL = PG : EP$ (201)
$= JG : JX$
$\triangle XGY : \triangle JGL = GX_q : JG_q$ (205)

$\triangle XGY : \triangle JEL = GX_q : JG_r JX$
aber $GX > JX$ und $> \frac{1}{2} GJ$ (296, Zus. 1)
also $GX_q > \frac{1}{2} JX_r JG$,
und darum $\triangle GXY > \frac{1}{2} \triangle JEL$.

Fünfter Abschnitt.

Von den Vielecken, welche durch Diagonalen gegebener Vielecke gebildet werden.

---

300. Lehrsatz. In jedem Vieleck (Fig. 161) lassen sich so viel Diagonalen d. h. gerade Linien, die zwei Ecken der Figur verbinden, ohne mit einer seiner Seiten zusammen zu fallen, ziehen als die Zahl $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Einheiten hat, wenn n die Anzahl der Ecken der Figur bezeichnet.

Lexell Novi Commentarii Acad. Petr. XIX, p. 231.

Beweis. Giebt es, wie wir angenommen haben, in der Figur n Ecken, also außer der einen A noch $n-1$, so lassen sich von dieser nach den übrigen offenbar $n-1$ verschiedene Linien ziehen, wie AB, AE, AF ꝛc.; von der zweiten Ecke B aus lassen sich nur $n-2$ von einander und von den vorigen verschiedene Linien ziehen, denn außer der Ecke B selbst fällt auch die Ecke A, als schon mit B verbunden, weg. Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, daß aus der dritten Ecke $n-3$, aus der vierten $n-4$ verschiedene Linien gezogen werden können, und so fort bis man zur vorletzten Ecke gelangt, aus der sich nur noch eine einzige Linie ziehen läßt. Die Summe aller Linien ist also:

$$n-1+n-2+n-3+\dots+2+1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \quad (173)$$

Aber unter dieser Zahl sind auch die n Seiten begriffen, also die Menge der Diagonalen ist

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-1) - 2n}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2} \text{*)}.$$

Zus. 1. Man kann daher die von derselben Ecke (A) auslaufenden Diagonalen, als erste, zweite, dritte ꝛc. von einander unterschei-

---

*) Kürzer läßt sich unser Satz so beweisen: Von jeder der n Ecken aus lassen sich nach den übrigen $n-1$ verschiedene Linien ziehen, also zwischen allen Ecken überhaupt $n \cdot (n-1)$ Linien; je zwei derselben aber, welche dieselben Endpuncte haben, fallen ganz zusammen, wirklich verschiedener Linien sind also nur $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, also Diagonalen $\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.
Anm. des Uebers.

den, je nachdem sie nach der zweiten (D), dritten (E), vierten (F) ꝛc. spätern Ecke in Beziehung auf die gemeinschaftliche gezogen sind.

Zus. 2. Ist das Vieleck regelmäßig und in einen Kreis beschrieben, so bildet jede Seite mit der ersten, zweiten, dritten ꝛc. der von ihrem Ende auslaufenden Diagonalen Winkel, die als Peripheriewinkel auf dem Einfachen, Doppelten, Dreifachen ꝛc. des zur Vieleckseite gehörigen Bogens stehen, mithin einzeln gleich einem, zwei, drei ꝛc. halben Centriwinkeln sind d. h. jede Seite bildet mit ihrer mten Diagonale einen Winkel =

$$\frac{m \cdot 2R}{n} \text{ (110, Zus. 1)}$$

Dieser Winkel ist also ein Rechter, wenn $\frac{2m}{n} = 1$, oder $m = \frac{n}{2}$.

Zus. 3. Die Winkel, welche zwei auf einanderfolgende Diagonalen (z. B. AD und AE) mit einander bilden, sind immer der Größe nach halbe Centriwinkel, also $= \frac{2R}{n}$. Da nun der Winkel, den zwei an einander gränzende Seiten mit einander bilden, $\frac{n-2}{n} \cdot 2R$ ist (110, Zus. 1), so wird der Winkel, welchen zwei von derselben Ecke auslaufende Diagonalen, von denen die eine die mte, die andere, von der andern Seite aus gerechnet, die rte ist, bilden

$$\frac{n-2-(m+r)}{n} \cdot 2R = \frac{n-(m+r+2)}{n} \cdot 2R$$

Damit also ein solcher Winkel ein Rechter sei, muß $\frac{n-(m+r+2)}{n} = \frac{1}{2}$, oder

$$\frac{n-4}{2} = m + r$$

sein.

Zus. 4. Ist eine Diagonale die rte unter den von einer Ecke auslaufenden, so umspannt sie auf der Seite, von der aus man zählt und auf welcher die Vielecksseite liegt, von deren Endpuncte sie ausläuft, $r+1$ Vielecksseiten, — die erste Diagonale nämlich umspannt zwei, die zweite drei u. s. f., — also auf der andern Seite umspannt sie $n-r-1$ Seiten.

Zus. 5. Wenn daher n eine gerade Zahl und

$$n - r - 1 = r + 1$$
$$\text{oder } n = 2r + 2$$
$$\text{oder } r = \frac{n-2}{2}$$

ist, so geht die rte Diagonale durch den Mittelpunct, man kann zwischen dieser Seite und dem Mittelpuncte keine Diagonale von höherem Range ziehen und alle von den einzelnen Ecken auslaufenden rten Diagonalen schneiden sich im Mittelpuncte.

Ist dagegen, wenn n, wie vorher, eine gerade Zahl, $r <$

$\frac{n-2}{2}$, so sind die rten Diagonalen von einem niederern Range als die durch den Mittelpunct gehenden, schneiden sich daher außerhalb des Mittelpunctes und bilden dadurch verschiedene Vielecke.

Die Diagonalen von dem Range $\frac{n-2}{2} - 1$ oder $\frac{n-4}{2}$ sind die höchsten, die sich außerhalb des Mittelpunctes schneiden.

Zus. 6. Ist n eine ungerade Zahl, so kann keine Diagonale durch den Mittelpunct gehen (114) also auch nicht die rte, die, wie wir wissen, auf der einen Seite $r+1$ und auf der andern $n-r-1$ Vielecksseiten umspannt. Ist nun diese rte Diagonale die höchste, so wird ihre nächste Nachfolgerinn, die also von ihr blos durch eine Vielecksseite getrennt ist, nach der entgegengesetzten Richtung hin gleichfalls $r+1$ Seiten umspannen; die Anzahl aller Vielecksseiten wird also $r+1+r+1+1$ d. i. $2r+3$ sein; und mithin ist die $\frac{n-3}{2}$te Diagonale die höchste unter denen, die sich zwischen einer Seite und dem Mittelpuncte ziehen lassen, wenn n ungerade ist.

301. Lehrsatz. Zieht man in einem regelmäßigen neck alle Diagonalen, so finden folgende Beziehungen Statt:

1) bilden diese durch ihre gegenseitigen Durchschnitte innerhalb desselben so viele neue dem gegebenen ähnliche Vielecke, als die Zahl $\frac{n-3}{2}$ Einheiten hat, wenn n ungerade, oder so viel $\frac{n-4}{2}$ Einheiten hat, wenn n gerade ist.

2) Die neuen Vielecke alle haben mit dem Urvieleck einen gemeinschaftlichen Mittelpunct; nicht dieselbe völlige Uebereinstimmung findet aber in Hinsicht ihrer Lage Statt. Das erste derselben steht nämlich in Beziehung auf das Urvieleck verkehrt, das zweite dagegen gerade, das dritte wiederum verkehrt, das vierte gerade rc., so daß, wenn n gerade ist, jede zwei Gegenecken des Urvielecks verbindende Gerade abwechselnd entweder zwei Gegenseiten des neuen Vielecks unter rechten Winkeln halbirt, oder gleichfalls durch zwei Gegenecken desselben hindurchgeht, und wenn n ungerade ist, jede Gerade, welche eine Ecke des Urvielecks mit dem Halbirungspuncte der Gegenseite verbindet, auch stets durch eine Ecke und den Halbirungspunct ihrer Gegenseite im neuen Vielecke hindurchgeht.

3) Die ersten Vielecke werden durch die ersten von den Ecken auslaufenden Diagonalen gebildet, die zweiten durch die zweiten rc.

Beispiele. Für das Sechseck (Fig. 80) ist $\frac{n-4}{2} = 1$, es wird ein Sechseck PQRSTU innerhalb des gegebenen ABDEFG gebildet.

Für das Fünfeck (Fig. 79) ist $\frac{n-3}{2} = 1$; es wird ein Fünfeck ONVXY innerhalb des gegebenen gebildet.

Für das Zehneck (Fig. 161) ist $\frac{n-4}{2} = 3$; innerhalb des Zehnecks ABDEFHJKLG entstehen drei neue Zehnecke, nämlich: PQRSTVXYZU, abcdefghik, und lmnopqrstu.

Ferner geht in Fig. 161 der Durchmesser BCJ, durch die Ecken c und h des zweiten der neuen Zehnecke, während er unter rechten Winkeln zwei Gegenseiten halbirt, sowohl in dem ersten Vieleck, nämlich die Seiten PQ und XV, als auch in dem dritten, die Seiten mn und rs. Aber in dem Fünfeck (Fig. 80) geht derselbe Durchmesser, der eine Ecke mit dem Halbirungspuncte der Gegenseite in dem Urvielecke verbindet, auch durch eine Ecke und den Halbirungspunct ihrer Gegenseite in dem neuen Vieleck.

Beweis. Erster Theil. Der Rangordnungen für die hier in Betracht kommenden Diagonalen sind so viele als die Zahl $\frac{n-3}{2}$ oder $\frac{n-4}{2}$ Einheiten hat, je nachdem n ungerade oder gerade ist (300, Zus. 6 und 5).

Aber jede zu derselben Rangordnung gehörige Diagonalenreihe bildet ein Vieleck, und zwar von so viel Seiten als diese Diagonalenreihe Glieder zählt d. h. von so viel als das Urvieleck Seiten hat, da von jeder Ecke eine solche Diagonale ausläuft.

Demnach werden $\frac{n-3}{2}$ oder $\frac{n-4}{2}$ solcher Vielecke entstehen je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Alle diese Vielecke sind regelmäßig, da, wie von selbst einleuchtet (Fig. 80 und 161) $\triangle$ ABQ $\cong$ $\triangle$ QDE, $\triangle$ ABP $\cong$ $\triangle$ DRE ꝛc.

Zweiter Theil. Da $\triangle$ BQD (Fig. 80) gleichschenkelig ist, so liegt der Punct Q auf der Senkrechten, die man auf BD im Halbirungspuncte errichtet, und folglich durch den Mittelpunct geht, also W. PQC = RQC, und $\triangle$ PCQ $\cong$ CQR, mithin PC = CQ = CR ꝛc. d. h. C ist der Mittelpunct dieses Vielecks; und so für die übrigen; woraus das übrige des zweiten Theiles folgt.

Dritter Theil. Der dritte Theil unseres Satzes ist für sich klar.

Zus. 1. Ist die Anzahl der Seiten des Vielecks ungerade, so tragen alle Diagonalen zur Bildung der neuen Vielecke bei; bei gerader Seitenzahl dagegen nur diejenigen, die nicht durch den Mittelpunct gehen, die also nicht zwei Gegenecken verbinden. Die Zahl der durch den Mittelpunct gehenden ist $\frac{n}{2}$, also im Sechseck (Fig. 80) drei, AE, BF, DG, im Zehneck (Fig. 161) fünf, AH, BJ, DK, EL, FG.

Zus. 2. Es ist nicht möglich, die Seiten und Perpendikel für alle die neuen Vielecke unter einander und gegen das Urvieleck zu be-

stimmen, wenn man nicht das zu Hülfe nimmt, was wir im VIII Buche über die Sinusse beibringen werden.

Es ist nämlich (Fig. 161), wenn die Anzahl der Seiten gerade ist, und der Mittelpunctswinkel mit w bezeichnet wird, die Senkrechte Cz der Sinus des Winkels $EGF = \frac{1}{2} w$; die Senkrechte $C\alpha$ der Sinus des Winkels $DGF = \frac{2}{2} w$; die Senkrechte $C\beta$ der Sinus des Winkels $BGF = \frac{3}{2} w$, und $C\gamma$ ist der Cosinus von W. $GC\gamma = \frac{1}{2} w$.

Betrachten wir nun das innerste Vieleck als das erste, und die übrigen der Reihe nach von innen nach außen sich folgenden, als das zweite, dritte, vierte ꝛc.; bezeichnen die Höhenperpendikel derselben der Reihe nach mit p_1, p_2, p_3, p_4, ꝛc. das Höhenperpendikel des Urvielecks mit p, so haben wir:

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 \ldots : p = \sin \tfrac{1}{2} w : \sin w : \sin \tfrac{3}{2} : \sin 2 w \ldots : \cos \tfrac{1}{2} w.$$

Ist dagegen die Seitenzahl ungerade, so ist

$$EGF = \tfrac{1}{2}\, EGH = \tfrac{1}{4}\, ECH = \frac{w}{4}$$

$$\text{also } BGF = 3\, EGF = \frac{3\, w}{4} \text{ u. s. f., also}$$

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots : p = \sin \frac{w}{4} : \sin \frac{3 w}{4} : \sin \frac{5 w}{4} \ldots : \cos \frac{w}{2}$$

Die Seiten und Umfänge unserer Vielecke stehen in eben diesem Verhältnisse (278 und 223).

Zus. 3. Ist die Anzahl der Seiten gerade, so wird das innerste d. h. das dem Mittelpuncte nächste Vieleck durch die Diagonalen von dem Range $\frac{n - 4}{2}$ gebildet (300, Zus. 5). Die Diagonale (AF) bildet also mit der Seite (AB), aus deren Endpuncte sie ausläuft, einen Winkel von der Größe

$$\frac{(n - 4)\, 2\, R}{2\, n} = \frac{n - 4}{n} \,.\, R$$

Da nun zwei an einander gränzende Seiten (AB, AG) einen Winkel mit einander bilden, der $= \frac{n - 2}{n} \,.\, 2\, R$ (110, Zus. 1), so ist die Größe des Winkels, welche die Diagonale mit der andern Seite (AG) bildet, offenbar

$$\frac{n - 2}{n} \,.\, 2\, R - \frac{n - 4}{n} \,.\, R = R$$

d. h. die Diagonalen, welche das innerste Vieleck bilden, stehen senkrecht auf den Gegenseiten, deren Endpuncte sie verbinden; dieses Vieleck ist also kein anderes als dasjenige, von welchem oben in 113 und in 283, Zus. 7 die Rede war, und welches, wie Du Fay zuerst gezeigt hat, dem Ueberschuß des umschriebenen über das eingeschriebene Vieleck gleich ist.

Dieselbe Folgerung kann man auch aus dem vorigen Zusatze herleiten. Denn ihm zufolge ist das Perpendikel des innersten Vielecks gleich dem Sinus des halben Mittelpunctswinkels, also gleich der

halben Sehne des ganzen Centriwinkels d. h. gleich der halben Seite des Urvielecks.

302. **Lehrsatz.** Hat ein regelmäßiges Vieleck (Fig. 80 und 161) eine gerade Seitenzahl, und man verbindet je zwei an einander gränzende Seiten durch Diagonalen, oder mit andern Worten, zieht man alle Diagonalen des niedrigsten Ranges, so entstehen dadurch zwei regelmäßige und congruente Vielecke, von denen jedes halb so viel Seiten hat als das gegebene.

Beispiele. Im Sechseck (Fig. 80) entstehen die beiden gleichseitigen Dreiecke ADF, BEG.

Im Zehneck (Fig. 161) die beiden Fünfecke ADFJLA und GBEHKG.

Beweis. Betrachtet man eine Ecke z. B. B als die erste, so entsteht offenbar ein Vieleck von der angegebenen Beschaffenheit, indem man diese erste Ecke mit der dritten E, diese mit der fünften H u. s. f. und endlich die vorletzte mit der ersten verbindet. Um das zweite der genannten Vielecke zu erhalten, verbindet man die zweite Ecke D mit der vierten F, diese mit der sechsten J u. s. f. endlich die letzte mit der zweiten.

Aber mehr als zwei solcher Vielecke zu erhalten, ist auch nicht möglich. Denn wollte man z. B. die dritte Ecke mit der fünften, diese mit der siebenten etc. verbinden, so erhielt man nichts anders als Seiten des ersten Vielecks, so wie die Verbindungen zwischen der vierten und sechsten, zwischen dieser und der achten etc. Seiten des zweiten Vielecks geben.

Anmerkung 1. Der Grund für die Folgerung, daß das Vieleck eine gerade Seitenzahl haben müsse, ist von selbst klar.

Zus. 1. Die Seiten unserer beiden Vielecke fallen in ihrer Richtung zusammen mit den Seiten des ersten innern Vielecks PQRSTVXYZU, von welchem in 301 die Rede war, so nämlich, daß die erste, dritte, fünfte etc. Seite desselben zu den Seiten des ersten, die zweite, vierte, sechste etc. Seite dagegen zu den Seiten des zweiten Vielecks gehören.

Zus. 2. Die Seiten unserer beiden Vielecke kann man daher als bloße Verlängerungen der Seiten des innern Vielecks, und ihre Winkel dadurch entstanden betrachten, daß man abwechselnd alle Seiten von gerader Stellenzahl und alle von ungerader bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert hat.

Zus. 3. Man kann aus jedem der innern Vielecke, die auf die in (301) angegebene Weise entstanden sind, durch Verlängerung seiner Seiten zwei regelmäßige und congruente Vielecke von halb so großer Seitenzahl, als die des Urvielecks erhalten. Die Seiten aller dieser so entstandenen Vielecke fallen also in ihrer Richtung mit Diagonalen zusammen und zwar mit Diagonalen der so vielten Rangordnung, das so vielte in der Reihe der innern Vielecke dasjenige ist, dessen Seiten man verlängert hat.

Zus. 4. Der Winkel, welchen die erste Diagonale mit der $r$ten von derselben Winkelspitze auslaufenden bildet, ist

$$\frac{r-1}{n} \cdot 2\,R$$

Damit also dieser Winkel ein rechter ist, muß

$$\frac{2\,(r-1)}{n} = 1$$

oder $r = \frac{n+2}{2}$ sein. Die erste Diagonale ist aber in unserm Falle die Seite des neuen Vielecks, auf dieser steht also die $\frac{n+2}{2}$te Diagonale senkrecht; oder für sie ist diese Diagonale als ein in ihrem Endpuncte errichtetes Perpendikel zu betrachten.

Zus. 5. Ist die Anzahl der Seiten des Urvielecks keine doppelt gerade Zahl, das neue Vieleck also von ungerader Seitenzahl, wie z. B. in Fig. 161 das Fünfeck GBEHK, so wird die $\frac{n+2}{2}$te (für das Zehneck also die 6te GJ) Diagonale des Urvielecks die Senkrechte auf der Seite des neuen Vielecks sein, welche zur Bildung des innern Vielecks ($\delta\xi\vartheta\lambda\varphi$) beiträgt, von dem wir früher in 113 und 283, Zus. 7 gehandelt haben, und welches dem Flächenunterschied zwischen dem um und dem in den Kreis beschriebenen Vieleck von ungerader Seitenzahl gleich ist.

Da aber aus einer Ecke sich $n-3$ Diagonalen ziehen lassen, so sind von der $\frac{n+2}{2}$ten bis zur letzten noch $n-3-\frac{n+2}{2} = \frac{n-8}{2}$ übrig. Zählt man also, wie wir dieß bisher gethan haben, nach der andern Seite (von G nach L, K rc.) hin, so ist unsere in Rede stehende Diagonale die $\left(\frac{n-8}{2}+1\right)$te, d. i. die $\left(\frac{n-6}{2}\right)$te. Beschreibt man demnach um ein regelmäßiges Vieleck von ungerader Seitenzahl einen Kreis, und darauf durch Halbirung der zu seinen Seiten gehörigen Bogen ein zweites von doppelt so viel Seiten, so bilden die $\left(\frac{n-6}{2}\right)$ten Diagonalen in diesem neuen Vieleck ein demselben ähnliches, dessen Seiten verlängert zwei Vielecke erzeugen, die dem Urvieleck ähnlich, unter einander congruent, und an Inhalt gleich dem Unterschiede zwischen dem Urvieleck und dem ihm ähnlichen um den Kreis beschriebenen, wie wir oben nach dem Vorgange von Du Fay gezeigt haben.

Anmerkung 2. Man sieht hieraus, wie das Du Fay'sche Theorem für die ungeraden Vielecke d. i. für die Vielecke von ungerader Seitenzahl in der That nur ein Zusatz zu seinem Satze für Vielecke von gerader Seitenzahl ist; und daß es blos darauf ankömmt, innerhalb des gegebenen Vielecks nicht, wie bei geraden, blos ein neues Vieleck zu bilden, sondern zwei, von denen jedes die angegebenen Eigenschaften hat. Ja da in Vielecken von gerader Seitenzahl die Geraden, welche ihre (parallelen) Gegenseiten verbinden, auf denselben stets senkrecht stehen, so kann man beide Sätze in einen einzigen zusammen ziehen und diesen allgemeinen Satz so aussprechen: Errichtet man auf jeder

Seite eines regelmäßigen Vielecks in ihren Endpuncten Perpendikel, so bilden die Durchschnittspuncte derselben die Ecken eines neuen dem gegebenen ähnlichen Vielecks wenn das Urvieleck von gerader Seitenzahl ist, zwei solcher, einander congruenter, Vielecke entstehen wenn die Seitenzahl ungerade ist.

Anmerkung 3. Es versteht sich von selbst, daß man jedes der neuen Vielecke durch Diagonalen wiederum zerlegen kann.

303. **Lehrsatz. Verlängert man jede Seite eines regelmäßigen Vielecks über beide Endpuncte hinaus und verbindet sämmtliche Durchschnittspuncte dieser Verlängerungen unter einander, so entstehen neue regelmäßige, dem gegebenen ähnliche und mit ihm um denselben Mittelpunct beschriebene Vielecke und zwar beträgt die Anzahl derselben $\frac{n-4}{2}$ für eine gerade, und $\frac{n-3}{2}$ für eine ungerade Seitenzahl des Vielecks.**

Beispiele. Für das Fünfeck ONVXY (Fig. 79) erhält man durch Verlängerung der Seiten die Puncte CBEHK, welche die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks bilden.

Für das Sechseck PQRSTU (Fig. 80) entstehen die Durchschnittspuncte ABDEFGH, die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks.

Für das Zehneck emnopqrstu (Fig. 162) erhält man durch Verlängerung der Seiten drei neue Zehnecke, nämlich durch Verlängerung von em und no, mn und op, no und pq u. s. f. d. h. durch Verlängerung je zweier Seiten, die um eine getrennt sind, das Zehneck aNbvcxdylo; ferner durch Verlängerung der Seiten em und op und so je zweier, die durch zwei Seiten getrennt sind, das Zehneck MSTVUXPYRQ; endlich durch Verlängerung von je zwei Seiten, die durch drei andere getrennt sind, also durch Verlängerung von mn und qr rc. das Zehneck ABDEFHJKLG.

Beweis. Erster Theil. Die zwei Gegenseiten eines regelmäßigen Vielecks von gerader Seitenzahl können, weil sie parallel sind, verlängert einander nicht schneiden; zwei solche Seiten sind durch $\frac{n-2}{2}$ Zwischenseiten getrennt; jede Seite eines solchen Vielecks kann also, wenn man sie über beide Endpuncte hinaus verlängert, nur $\frac{n-2}{2} - 1$ d. i. $\frac{n-4}{2}$ Seiten auf jeder Seite begegnen, da natürlich die an sie zunächst angränzenden Seiten hierbei nicht in Rechnung kommen können, es sind darum $\frac{n-4}{2}$ verschiedene Vielecke möglich.

Zweiter Theil. In einem Vieleck von ungerader Seitenzahl liegen zwischen jeder Seite und ihrer Gegenecke $\frac{n-1}{2}$ Zwischenseiten; jede Seite begegnet daher, auf jeder Seite ihrer Verlängerung, $\frac{n-1}{2}$ $- 1$ d. i. $\frac{n-3}{2}$ der übrigen Vielecksseiten, jeder Durchschnitts-

punct bildet eine Ecke zu einem der in Rede stehenden Vielecke, $\frac{n-3}{2}$ solcher Vielecke sind daher möglich, die, wie von selbst einleuchtet, in diesem so wie in dem vorigen Falle, alle regelmäßig und mit dem Urvieleck denselben Mittelpunct haben.

Anmerkung 1. Unser Urvieleck bildet mit seinen auf die angegebene Weise entstandenen äußern Vielecken nicht, wie man vielleicht zu glauben geneigt sein möchte, genau dieselbe Vielecksreihe, nur in umgekehrter Ordnung, als diejenige war, von welcher wir im vorigen Satze handelten. Zwar stehen das Urvieleck emnopqrstu und das äußerste ABCDEFHJKLG (Fig. 162) in derselben gegenseitigen Beziehung, wie die mit eben diesen Buchstaben in Fig. 161 bezeichneten Vielecke, aber nicht so ist es mit den beiden andern Zehnecken.

Anmerkung 2. Verbindet man die Durchschnittspuncte der verlängerten Seiten nicht durch Gerade unter einander, so bilden sie die Spitzen von sternähnlichen, um das Urvieleck beschriebenen Figuren, deren Seiten die verlängerten Vielecksseiten sind.

Siebentes Buch.

Von dem Umfange und Inhalte des Kreises.

Erster Abschnitt.

Ueber die Gränzen der Größen und der Verhältnisse.

---

304. Ich halte für nöthig, zur bessern wissenschaftlichen Begründung des Hauptgegenstandes, dem dieses Buch gewidmet ist, ehe ich mich zu ihm selbst wende, Einiges über gewisse hierher gehörige Grundbegriffe, namentlich über die Gränzen veränderlicher Größen vorauszuschicken, wäre es auch nur, um den unrichtigen Begriffen und den in jeder Hinsicht ungenauen und ungenügenden Beweisen, wie sie sich in manchen neuern Schriften finden, nachdrücklich zu begegnen. Newton hat von den Gränzen, unter der Benennung rationes primae et ultimae in der ersten Abtheilung des ersten Buches seiner principia gehandelt. Maclaurin hat denselben Gegenstand ganz im Geiste der Alten, besonders des Archimedes, in der Einleitung zu seinem Werke: Treatise of Fluxions vortrefflich behandelt. Ihm folgte hierin sein Landsmann Robert Simson, von dem wir eine Abhandlung: de limitibus quantitatum et rationum fragmentum besitzen, welche sich in dem nach seinem Tode herausgekommenen seltnen Werke: Roberti Simson opera quaedam reliqua etc. Glasguae 1776 befindet. Auch verdient nachgelesen zu werden, was darüber gesagt haben: La Chapelle institutions de geom. Tom. II, §. 433 sqq. und d'Alembert sowohl in der Encyclopädie in dem Artikel „Limite" als auch in seinen Melanges de philosophie Tom. V p. 239. Aber Niemand hat in neuerer Zeit diesen Gegenstand gründlicher und vollständiger abgehandelt als l'Huilier in seiner: Exposition des principes des calculs superieurs. chap. 1; und später in der: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio.

Ich werde aus diesen Schriften das Wenige entlehnen, was unmittelbar zu meinem Zwecke gehört, und auf die erforderliche Weise ordnen. Beispiele möchten wohl am meisten dazu beitragen, um eine deutliche Vorstellung von Gränze zu erlangen.

305. Erklärung. Wenn eine Größe (A) durch fortdauerndes Zunehmen oder Abnehmen einer andern Größe (L) immer näher und näher gebracht werden kann, ohne jedoch dieselbe jemals erreichen

oder gar übertreffen zu können, so heißt diese zweite Größe (L) die **Gränze** der erstern (A), und zwar die **Wachsthumsgränze** oder die **Verminderungsgränze**, je nachdem die Größe A sich der L nähert entweder dadurch daß sie im Zunehmen oder im Abnehmen begriffen ist.

Zus. 1. Da die Größe A ihrer Gränze L durch fortdauerndes Zu- oder Abnehmen immer näher und näher kommt, so folgt daraus nothwendig, daß A sich stets so weit vermehren oder vermindern lasse, daß sie sich von ihrer Gränze um weniger als irgend eine gegebene Größe, wie klein diese auch sein möge, unterscheidet.

Erläuterung des Gesagten durch Beispiele.

Erstes Beispiel. Die Tangente AT (Fig. 121) ist die Verminderungsgränze für alle von eben dem Puncte A außerhalb auslaufende, nach der concaven Seite der Kreislinie gezogene, und darum den Kreis schneidende Geraden AD, AE, AH ꝛc.; Wachsthumsgränze dagegen ist sie für alle die blos nach dem convexen Theile des Umkreises gehenden Geraden AF, AR, AS ꝛc.

Anmerkung. Es würde dem aufgestellten Begriff von Gränze nicht in aller Strenge gemäß sein, wenn man sagen wollte: Der Durchmesser eines Kreises ist die Wachsthumsgränze für die Sehnen; darum weil der Durchmesser selbst zu den Sehnen gehört, also eine Größe ist, die von einer Sehne, indem sie Sehne bleibt, erreicht werden kann. In unserm angeführten Beispiele dagegen, können die schneidenden Linien so lange sie wirklich Schneidende bleiben, niemals die Kürze der Tangente erreichen.

Zweites Beispiel. Der gemeine Bruch $\frac{1}{3}$ ist die Wachsthumsgränze des Decimalbruchs : 0,33333 . . . . . .

Drittes Beispiel. Die mittlere Proportionale zwischen zwei Größen ist die Verminderungsgränze für das arithmetische Mittel eben dieser Größen (169).

Viertes Beispiel. Die Einheit ist die Wachsthumsgränze für die Summe der geometrischen Reihe : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots\ldots$

Fünftes Beispiel. Der Bruch $\frac{4}{3}$ ist die Wachsthumsgränze für die Summe der beliebig weit fortgesetzten, oder, wie man zu sagen pflegt, der **unendlichen** geometrischen Reihe : $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots\ldots$

Man vergleiche damit 163, Zus. 1, Anm. 2.

Anmerkung 1. Der Ausdruck für die wirkliche Summe S einer geometrischen Reihe aus n Gliedern, von der Form A, Ae, Ae^2, ... Ae^{n-1} ist (163, Zus. 1)

$$S = \frac{e^n - 1}{e - 1}A = \frac{1 - e^n}{1 - e}A = \frac{A}{1 - e} - \frac{Ae^n}{1 - e}$$

Ist die Reihe eine fallende, also e ein ächter Bruch, so wird offenbar e^n und mithin auch $\frac{Ae^n}{1 - e}$ desto kleiner, je größer n wird d. h. je weiter man die Reihe fortgesetzt: es ist also in diesem Falle $\frac{A}{1 - e}$ die Wachsthumsgränze für S. Daher kömmt es, daß man wohl auch sagt, die Summe einer unendlichen d. h. unendlich weit fortgesetzten fallenden geometrischen Reihe, deren Anfangsglied A und Exponent e, werde ausgedrückt durch $\frac{A}{1 - e}$, wofür man auch $\frac{A^2}{A - B}$ setzen kann, wenn man das zweite Glied der Reihe mit B bezeichnet.

Dieser Ausdruck $\frac{A}{1 - e}$ wird offenbar = 1, wenn, wie in Beispiel 4, A = $\frac{1}{2}$

und $e = \frac{1}{4}$ gesetzt wird; dagegen nimmt er den Werth $\frac{4}{3}$ an, wenn, wie in Beispiel 5, $A = 1$ und $e = \frac{1}{4}$ genommen wird.

Anmerkung 2. Der Ausdruck $S = \frac{A^2}{A - B}$ für die Summe einer unendlichen Menge von Gliedern einer fallenden Reihe, giebt die Proportion:

$$S : A = A : A - B$$

woraus der Satz folgt, den ich in dem handschriftlichen Nachlaß von Huygens gefunden habe; nämlich: Sind Größen so beschaffen, daß sie eine fallende geometrische Reihe bilden, so verhält sich die größte sammt allen auf sie folgenden und ins Unendliche fortgehenden zu dieser größten allein, wie eben diese größte zu ihrem Ueberschuß über ihre nächste Nachfolgerin.

Anmerkung 3. Diese Gränze: $S = \frac{A}{1 - e}$ kömmt nicht selten auch unter der Gestalt folgenden Satzes vor: nimmt man von einer beliebigen gegebenen Größe den Theil $\frac{1}{e}$; von der so erhaltenen Größe wiederum denselben Theil $\frac{1}{e}$ u. s. f. immer von jeder zuletzt erhaltenen Größe den Theil $\frac{1}{e}$, so sind alle diese Theile zusammen genommen, so groß als der $\frac{1}{e - 1}$te Theil der gegebenen Größe.

Anmerkung 4. Wendet man die Gränze $S = \frac{A}{1 - e}$ auf das 5te Beispiel an, und vergleicht alles zusammen mit dem, was wir in 163, Zus. 1, Anm. 2 gesagt haben, so wird man sich überzeugen, wie unsere Lehre mit dem dort behandelten Satz des Archimedes übereinstimmt.

306. Erklärung. Wenn das Verhältniß zwischen zwei Größen dem bestimmten und sich gleich bleibenden Verhältnisse zweier andern Größen durch fortgehendes Zu- oder Abnehmen immer näher und näher kommen kann, so heißt das letztere (unveränderliche) Verhältniß die Gränze des erstern (veränderlichen).

Beispiele. Das Verhältniß $\sqrt{2} : 1$ ist die Wachsthumsgränze für alle Zahlen, durch welche man das Verhältniß der Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite ausdrücken kann.

Das Verhältniß $2 : \sqrt{3}$ ist die Verminderungsgränze für die Zahlen, durch welche man das Verhältniß der Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu seinem Höhenperpendikel ausdrücken kann.

Das Verhältniß $\sqrt{3} : 1$ ist die Wachsthumsgränze des Verhältnisses, welches die Seite des gleichseitigen Dreiecks zum Halbmesser des umschriebenen Kreises hat, wenn man dieses Verhältniß in Zahlen ausdrückt.

307. Lehrsatz. Sind A und B zwei beliebige (gleichartige) Größen und man zieht von der größern A eine dritte Größe ab, die wenigstens halb so groß als A, von diesem Unterschiede wiederum eine Größe, die wenigstens so groß als seine Hälfte und fährt immer auf dieselbe Weise fort, so gelangt man zuletzt immer zu einer Größe, die kleiner als die zweite B der gegebenen ist, wie klein diese letztere auch immer sein möge.

Eucl. X, 1.

Vorbereitung. Es sei (Fig. 146) AB die größere, F die kleinere der gegebenen Größen. Man nehme von F ein solches Vielfaches GM, daß dieses zwar größer als AB, das unmittelbar vorhergehende Vielfache aber noch kleiner als diese Linie ist. Man schneide

nun auf AB ein Stück AC, das eben so groß oder größer als die Hälfte von AB; auf dem Unterschiede, den man so erhalten, CB wiederum ein Stück, das eben so groß oder größer als seine Hälfte; und wiederhohle dieß so vielmal, als F in GM enthalten ist; also in unserer Figur viermal.

Beweis. Weil $GM > AB$, $GJ < \frac{1}{2} GM$, und $AC \geqq \frac{1}{2} AB$, so ist offenbar $GM - GJ > AB - AC$

d. i. $JM > CB$

Weil ferner $JK < \frac{1}{2} JM$

und $CD \geqq \frac{1}{2} CB$

so ist $JM - JK > CB - CD$

d. i. $KM > DB$

weil endlich $KL = \frac{1}{2} KM$

und $DE \geqq \frac{1}{2} DB$

so ist $KM - KL > DB - DE$

d. i. LM oder $F > EB$.

Und man sieht, daß diese Schlußfolge ihre volle Gültigkeit behält, wie klein auch F sein möge.

Zus. Die Größe F kann also niemals so klein werden, daß man nicht auf dem angegebenen Wege zu einem Unterschiede gelangen könnte, der noch kleiner als sie ist.

308. Lehrsatz. Hat man eine unveränderliche Größe (L) und eine veränderliche A, und kann letztere durch fortgesetztes Zu- oder Abnehmen der erstern näher und näher gebracht werden, so daß ihr Unterschied kleiner als jede noch so kleine Größe wird, so ist das Verhältniß der Gleichheit die Wachsthums- oder Verminderungsgränze des Verhältnisses dieser beiden Größen; und umgekehrt.

L'Huilier §. 2. — Tacquet theor. selecta ex Archim. pr. 1, 2.

Beweis. Denn wäre das Gegentheil möglich, könnte also $L = A \pm B$ sein, so wäre offenbar der Unterschied unserer Größen $L - A$ einer bestimmten Größe gleich, was der Voraussetzung, nach welcher dieser Unterschied kleiner als jede noch so kleine Größe sein soll, geradezu widersprechen würde.

Anmerkung 1. Zur nähern Erläuterung des Satzes kann man sich der in 305 angeführten Beispiele bedienen.

Anmerkung 2. Daher der von einigen gebrauchte Ausdruck, daß eine veränderliche Größe in ihrer Gränze endigt.

309. Lehrsatz. Ist eine und dieselbe Größe (L) für mehrere Größen z. B. A und B zugleich die Wachsthums- oder Verminderungsgränze, so ist das Verhältniß der Gleichheit die Gränze des Verhältnisses dieser letztern Größen.

Beweis. Das Verhältniß $A : L$ wird zuletzt das der Gleichheit, oder es wird zuletzt $A : L = 1 : 1$ (308), eben so ist es mit dem Verhältnisse $B : L$, also wird zuletzt $A : B = 1 : 1$, oder es nähert sich das Verhältniß $A : B$ immer mehr und mehr dem Verhältnisse der Gleichheit.

Anmerkung. Daher der von einigen gebrauchte Ausdruck, daß das letzte Verhältniß dieser Größen das Verhältniß der Gleichheit sei.

Erstes Beispiel. Die Gränze des Verhältnisses der Summen von den beiden Reihen

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \ldots\ldots$

und $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots$

jede unbegränzt weit fortgeführt, ist das Verhältniß der Gleichheit.

Zweites Beispiel. Bilden die beiden senkrecht auf einander stehenden Geraden AB, BC (Fig. 147) mit der krummen Linie AC eine Figur, und man theilt eine derselben z. B. BC in eine beliebige Menge gleicher Theile BD, DE ꝛc., um mittelst der Parallelen MD, NE ꝛc. und AM, SLN, RKO ꝛc. die Rechtecke AMDB, SLDB, MNED, RKED ꝛc. zu erhalten, so wird, je größer die Menge der Theile von BC und je kleiner mithin jeder einzelne wird, desto mehr die krummlinige Figur ABCA zur Gränze sowohl für die äußere oder umschriebene BAMLNKOJPHTCB als auch für die innere oder eingeschriebene BSLRKQJUHGB werden, die Gränze des Verhältnisses dieser beiden geradlinigen Figuren wird daher das Verhältniß der Gleichheit sein.

Newton Lemm. 2, 3.

Beweis. Die äußere Figur ist größer als die krummlinige um die Summe der Dreiecke ALM, LKN, KJO ꝛc.; die innere Figur ist kleiner als die krummlinige um die Summe der Dreiecke ALS, LKR, KJQ ꝛc. Diese Dreiecke aber und mithin auch ihre Summen werden nun offenbar desto kleiner, je kleiner man die Theile BD, DE ꝛc. nimmt; beide geradlinige Figuren nähern sich also auch in eben dem Maaße der krummlinigen, die ihre Gränze ist, und darum auch einander selbst.

Anmerkung. Dasselbe findet noch Statt, wenn die krumme Linie AC in eine Gerade (Fig. 148) übergeht, und man also ein geradliniges Dreieck ACB erhält — ein Satz, der von großem Nutzen in der Naturlehre ist. Er dient zum Beweise für die wichtigsten Eigenschaften der beschleunigten Bewegung, und namentlich des Falles der Körper. Siehe s'Gravesande physica §. 373. — Musschenbroek §. 186. — Keil introductio in veram Astronomiam lect. XI, theor. 17.

310. **Lehrsatz.** Sind zwei Größen die Gränzen einer und derselben dritten, so ist ihr Verhältniß das der Gleichheit, d. h. sie sind gleich.

La Chapelle §. 433.

Beweis. A und B seien Gränzen von C. Wäre nun A nicht gleich B, sondern $= B + D$, so müßte, weil C zur einen Gränze B hat, und sich daher der Größe B so weit nähern kann, daß sie sich von ihr um weniger als jede noch so kleine Größe unterscheidet, der Unterschied zwischen C und $B + D$ doch zum wenigsten D betragen, mithin also, da $B + D = A$, müßte sich auch C von A mindestens um die Größe D unterscheiden, was unmöglich ist, da auch A Gränze für C sein soll; es kann daher nur $D = o$, oder $A = B$ sein.

Anmerkung. Man wird später ein Beispiel zur Erläuterung dieses unseres Satzes finden.

311. **Lehrsatz.** Wenn zwei Größen, A, B, beide in Zunahme oder beide in Abnahme begriffen, fortwährend dasselbe Verhältniß (a : b) zu einander behalten, so ist dieses Verhältniß auch das ihrer Gränzen (L und l).

Maclaurin pag. 16. — L'Huilier §. 3.

Beweis. Es sei $A : B = a : b$; wäre nun nicht

$$L : l = a : b$$

so müßte $L : l$ entweder $> a : b$, oder $< a : b$ sein. Wäre $L : l > a : b$, so müßte

$$L - X : l = a : b = A : B$$

sein können. Sind nun L und l die Wachsthumsgränzen von A und B, so ist $B < l$, also müßte auch $A < L - X$ sein; mithin könnte A sich seiner Gränze L nicht einmal so weit nähern, daß es sich nur um die gegebene Größe X von ihr unterscheide, was offenbar dem oben aufgestellten Begriffe von Gränze geradezu widerspricht. Es kann also nicht $L : l > a : b$ sein.

Wäre $L : l < a : b$, könnte also

$$L : l - X = a : b = A : B$$

sein, so müßte, weil $A < L$, auch $B < l - X$, was, wie so eben bemerkt wurde, dem Begriffe der Gränze widerspricht; es kann also auch nicht $L : l < a : b$, und muß daher nothwendig

$$L : l = a : b$$

sein.

Die Schlußfolge ändert sich wesentlich gar nicht, wenn L und l die Verminderungsgränzen von A und B sind.

Beispiele.

Erstes. Fig. 67. Für jedes Dreieck ACB, in welchem die Linie CH die Seite AB halbirt, hat man, wie auch immer seine Beschaffenheit sein möge,

$$\frac{AC_q + BC_q}{2} - CH_q = \tfrac{1}{4} AB_q = AH_q = BH_q \text{ (93, Zus.)}$$

Aber die Seite AB ist die Verminderungsgränze für die Summe der beiden andern, AC und CB (43), da offenbar, je näher C an AB liegt, desto näher kömmt $AC + CB$ der Größe von AB, ohne ihr jedoch jemals völlig gleich zu werden. Dasselbe also, was für die Summe der Seiten $AC + CB$ gilt, muß auch für ihre Gränze d. i. für AB gelten. Nehmen wir also an, daß der Punct C auf AB, ungefähr in D, fiele, so müßte

$$\frac{AD_q + BD_q}{2} - DH_q = AH_q,$$

sein, was auch in der That richtig ist, wie sich leicht auf folgende Weise zeigen läßt. Es ist

$$AD_q = AH_q - DH_q - 2\, AD_r DH \text{ (74, Zus. 2)}$$
$$BD_q = BH_q + DH_q + 2\, AH_r DH \text{ (74)}$$
$$\text{also } AD_q + BD_q = 2\, AH_q + 2\, DH_r DH$$
$$\text{d. i. } AH_q = \frac{AD_q + BD_q}{2} - DH_q$$

Es würde sich nichts Wesentliches ändern, wenn man annähme, daß D auf die Verlängerung von AB fiele.

Zweites Beispiel. Fig. 121. Der Kreis hat die Eigenschaft, daß $AE_r AR = AH_r AS$ ist, wie man auch die den Kreis schneidenden Geraden von A aus ziehen möge. Der Satz muß daher auch noch wahr sein für die Gränzen der Schneidenden, d. i. (305, erstes Bei-

spiel) für die Tangenten, es muß also

$AT_q = AU_q$, und darum $AT = AU$

sein, was wir schon auf anderem Wege 250, Zus. 4, und 259, Zus. 2 gefunden haben.

Drittes Beispiel. Fig. 149. Die Tangente an einen Punct B, der seine Lage nicht ändert, ist die Gränze für alle Schneidenden, die durch eben diesen Punct gehen.

Man ziehe durch den Mittelpunct die FCEA, die der Schneidenden DBA in A begegnet; ziehe auf den Durchmesser die Senkrechten BRM, DNJ, KCG, und die mit ihm parallele BPQ. Für alle durch B gezogenen Schneidenden hat man dann, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke BOD und ARB, DO : OB = BR : RA, und mithin muß sich auch die Verminderungsgränze von DO und OB verhalten = BR : RA; dieses Verhältniß deutet uns an, wohin der Punct A fallen müsse, damit ABD eine Tangente werde.

Beständig ist DO : OB = OQ : OJ (251, Z. 1), also ist auch das Verhältniß der Gränzen von OQ und OJ dem Verhältnisse der Gränzen von DO und OB gleich. Die Gränze von OQ aber ist BQ = 2 BP (236) = 2 RC; die von JO ist MB = 2 RB. Das Verhältniß RC : RB ist also das der Gränzen von DO und OB, also gleich dem Verhältniß RB : RA; ABD wird also Tangente sein, wenn RB die mittlere Proportionale zwischen RC und RA — eine Beziehung, die schon früher ohne alle Hülfe der Gränzen gefunden, und aus 232 in Verbindung mit 209, Zus. 1 bekannt ist.

Anmerkung. Die spätern Sätze werden uns noch manche hierher gehörige Beispiele darbieten; die angeführten mögen hinreichen zur Begründung der Richtigkeit und Deutlichkeit des Begriffes Gränze.

Zus. Wenn zwei Größen, A und B, die beide veränderlich, fortwährend und unverändert dasselbe Verhältniß zu zwei beständigen Größen behalten (A : B = a : b), welche Zu- oder Abnahme sie auch erfahren, so stehen ihre Gränzen (L, l) in demselben Verhältnisse (a : b).

L'Huilier §. 4. — Maclaurin p. XI. — Tacquet selecta ex Archim. etc. pr. 1 et 2.

312. Lehrsatz. Wenn zwei Verhältnisse veränderlicher Größen (A und B, L und M) sich unverändert gleich bleiben, welche Veränderung auch, durch Zu- oder Abnahme diese Größen selbst erfahren mögen (wenn also beständig A : B = L : M), so sind die Verhältnisse ihrer Gränzen (a und b, l und m) auch gleich (also a : b = l : m).

L'Huilier §. 5.

Beweis. Da das Verhältniß a : b die Gränze des Verhältnisses A : B ist, so ist es auch die Gränze für das diesem gleiche L : M; aber Gränze von L : M ist auch l : m, mithin sind die beiden Verhältnisse a : b und l : m die Gränzen eines und desselben dritten, also einander gleich (310).

313. Lehrsatz. Die Gränze eines aus zwei oder mehrern (A : B und G : D) zusammengesetzten Verhältnisses ist das aus den Gränzen (a : b und g : d) dieser einzelnen Verhältnisse zusammengesetzte.

La Chapelle §. 434. — L'Huilier §. 6.

Beweis. Weil A : B zur Gränze hat a : b, also diesem Verhältnisse näher kömmt als irgend eine gegebene Größe betragen kann, und dasselbe von G : D in Beziehung auf g : d gilt, so muß offenbar $\frac{A}{B} \cdot \frac{G}{D}$ dem $\frac{a}{b} \cdot \frac{g}{d}$ näher kommen, als um irgend eine gegebene Größe, d. h. es muß $\frac{a}{b} \cdot \frac{g}{d}$ die Gränze von $\frac{A}{B} \cdot \frac{G}{D}$ sein.

Zweiter Abschnitt.

Von dem Umfang und Inhalt des Kreises.

---

314. Lehrsatz. Der Umfang eines Kreises ist größer als der Umfang jedes in denselben beschriebenen Vielecks und kleiner als der Umfang jedes umschriebenen Vielecks; dasselbe gilt von dem Inhalt des Kreises.

Archimedes de sphaera et cylindro I, 1, 2.

Beweis. Fig. 143. Für den Umfang des eingeschriebenen Vielecks leuchtet die Richtigkeit des Satzes von selbst ein, indem jeder Bogen FJE größer ist, als die Gerade, welche die zu ihm gehörige Sehne bildet.

Für das umschriebene Vieleck folgert Archimedes den Satz daraus, daß die Summe der Geraden JG + GL größer als der Kreisbogen JEL ist, und zwar darum, weil jene Geraden gemeinschaftliche Endpuncte mit dem Kreisbogen haben und ihn ganz umschließen.

Rücksichtlich des Inhaltes reicht der bloße Anblick der Figur hin, um die Richtigkeit unserer Behauptung in die Augen fallen zu lassen.

315. Lehrsatz. Der Kreisumfang ist die Wachsthumsgränze für die Umfänge aller innern, und die Verminderungsgränze für die Umfänge aller äußern Vielecke; der Kreishalbmesser ist die Gränze für die Perpendikel der innern Vielecke.

Tacquet selecta ex Archim. pr. 3.

Beweis. Aus 293, 296 und 305.

Anmerkung. Man sieht hieraus, in welchem Sinne man es zu nehmen habe, wenn es heißt, der Kreis sei ein Vieleck von unendlich großer Seitenzahl. Allein diese Art sich auszudrücken, ist nicht genau.

Zus. Der Umfang eines innern und der eines äußern Vielecks, nähern sich daher einander und dem Umfange des Kreises, je länger (d. h. je öfter man die Anzahl der Seiten verdoppelt) desto mehr; und man kann zuletzt immer dahin gelangen, daß sie sich um weniger als um jede noch so kleine Größe unterscheiden, ihr letztes Verhältniß ist daher das der Gleichheit (309).

316. Lehrsatz. Die Umfänge zweier ungleichen Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser und daher auch wie ihre Halbmesser.

Tacquet selecta ex Archim. pr. 7. — L. G. IV, 11.

Beweis. Aus 278, 310, 313.

Anmerk. Dieser (angedeutete) Beweis ist aus der Lehre von den Gränzen hergeleitet. Man kann unsern Satz aber auch nach der Methode der Alten darthun und zwar indirect.

Gesetzt es seien zwei Kreise, deren Umfänge U und u, deren Durchmesser D und d, so soll also U : u = D : d sein. Wäre dem nicht also, könnte mithin U : C = D : d sein, wo C < u, also C = u — q wäre, so beschreibe man in den Kreis, dessen Umfang u, ein Vieleck, so daß sein Umfang p > C, aber < u, und in den andern Kreis ein diesem ähnliches Vieleck, dessen Umfang P sei. Dann ist (278)

D : d = P : p; aber es soll auch der Annahme zufolge
D : d = U : C sein, also

P : p = U : C

aber p > C nach Construction, also auch P > U, was offenbar ungereimt, da der Umfang jedes eingeschriebenen Vielecks kleiner als der des Kreises; es kann daher nicht C < u sein. Auf dieselbe Weise zeigt man, daß eben so wenig C > u sein kann, daß also C = u, und darum U : u = D : d sein muß.

Zus. Alle Kreise sind ähnliche Figuren.

Anmerkung 2. Wir haben in 192 angegeben, was wir unter Aehnlichkeit der Figuren verstehen; allein diese Erklärung ist, wenigstens nicht unmittelbar, auf den Kreis anwendbar. Nach unserer Meinung kann als eines der Merkmale für die Aehnlichkeit das constante Verhältniß des Halbmessers zum Umfange angesehen werden, da dasselbe eine unmittelbare Folge der Aehnlichkeit zweier Vielecke ist.

Anmerkung 3. Euclides hat die Aehnlichkeit der Kreise stillschweigend angenommen.

Zus. 2. Aehnliche Bogen zweier ungleichen Kreise können keine andern als diejenigen sein, welche dasselbe Verhältniß zu den Kreisumfängen und darum auch zu den Durchmessern haben.

L. G. IV, 11, Zus.

Zus. 3. Eben so sind ähnliche Kreisabschnitte diejenigen, deren zugehörige Bogen ähnlich sind d. h. sich wie die Peripherien oder die Durchmesser der ganzen Kreise verhalten, und deren Sehnen daher eben dieses Verhältniß haben.

317. Lehrsatz. Es ist immer eine gerade Linie möglich, welche dem Umfange eines gegebenen Kreises gleich ist.

Beweis. Der Kreisumfang ist größer als der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks, also größer als das Sechsfache des Radius (277, Z. 2), oder das Dreifache des Durchmessers.

Beschreibt man also ein Sechseck sowohl in als um den Kreis, und zieht zwei gerade Linien, von denen die eine gleich dem Umfange des innern, die andere dem des äußern Vielecks gleich ist, so ist jene kleiner, diese größer als der Kreisumfang; der Größe nach liegt also zwischen diesen beiden Geraden eine dritte, welche dem Umfange des Kreises gleich ist.

Anmerkung. Wir werden später (325) diese Linie näher bestimmen.

318. Lehrsatz. Ein gleichschenkeliges Dreieck (FJE Fig. 151), welches man in einen Kreisabschnitt (FJE) beschreibt, welcher kleiner als der Halbkreis ist, ist stets größer als die Hälfte dieses Abschnitts.

Beweis. Man ziehe durch die Spitze J des Dreiecks die Tangente WJM, und errichte auf EF in ihren Endpuncten die Senkrechten EM und FW. Alsdann ist △ FJE = $\frac{1}{2}$ FWME; aber FWME offenbar größer als der Kreisabschnitt FJE, der von dem Rechteck ganz umschlossen wird, also △ FJE > die Hälfte des Abschnitts FJE.

Anmerkung. Warum es ein gleichschenkeliges Dreieck ist, von dem hier die Rede ist, kann man aus 266, Anm. ersehen.

319. Lehrsatz. Der Inhalt des Kreises ist die Wachsthumsgränze für die Flächenräume aller eingeschriebenen und die Verminderungsgränze für die aller umschriebenen Vielecke.

Beweis. Die Richtigkeit unserer Behauptung leuchtet sattsam aus der Betrachtung der Fig. 143 hervor.

Zus. Aehnliche, in und um den Kreis beschriebene Vielecke kommen je länger desto mehr einander an Inhalt nahe, und ihr letztes Verhältniß ist das der Gleichheit.

Man vergleiche 315, Zus.

320. Lehrsatz. Jeder Kreis ist gleichflächig mit einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich dem Kreisumfange und dessen Höhe gleich dem Halbmesser desselben.

Archim. circuli dimensio pr. 1. — L. G. IV, 12.

Erster Beweis. Durch Hülfe der Lehre von den Gränzen. Das Dreieck von der genannten Beschaffenheit ist die Gränze für die Vielecke, die sowohl in als um den Kreis beschrieben werden (117, 314, 315); der Kreis ist aber auch die Gränze für diese Vielecke (319), also sind Dreieck und Kreis mit einander gleichflächig (310).

Anmerkung 1. Archimedes hat diesen Satz sehr gut bewiesen (de circuli dimensione pr. 1) und Maclaurin (pag. IX) denselben vorzüglich erläutert. Es wird nicht unpassend sein, den Archimedeischen Beweis hier beizufügen.

Zweiter Beweis (nach Archimedes). Es sei TV (Fig. 150) gleich dem Umfange und TS gleich dem Halbmesser des Kreises; alsdann sei, behauptet man, Dreieck TSV gleichflächig mit dem Kreise. Denn wäre dem nicht also, so müßte der Kreis entweder größer oder kleiner als das Dreieck sein. Im erstern Falle beschreibe man in den Kreis ein regelmäßiges Vieleck, welches sich dem Inhalte des Kreises noch mehr nähert als das Dreieck, also größer als letzteres ist. Der Umfang jedes eingeschriebenen Vielecks ist nun aber kleiner als der Kreisumfang, also auch der des unsrigen kleiner als TV wie z. B. Tt; eben so ist das Perpendikel jedes solchen Vielecks kleiner als der Halbmesser, also in unserm Falle $<$ TS; es sei Te. Nun ist offenbar $\triangle$Tte $<$ $\triangle$TSV; aber weil Tte gleichflächig mit dem eingeschriebenen Vieleck, welches $>$ TSV, so müßte auch $\triangle$ Tte $>$ $\triangle$ TSV sein, was offenbar ungereimt ist.

Ganz auf dieselbe Weise zeigt man durch Hülfe eines umschriebenen Vielecks, daß der Kreis nicht kleiner als $\triangle$TSV sein kann, daß also beide gleichflächig sein müssen.

Zus. 1. Will man den Inhalt eines Kreises in Zahlen darstellen, so erhält man mit Beachtung dessen, was oben 203, Zus. 6 erinnert worden ist, wenn man allgemein mit π den ganzen Kreisumfang für den Durchmesser d als Einheit, oder den halben Umfang für den Radius r als Einheit bezeichnet, als Ausdruck für den Flächeninhalt des Kreises

$$r^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{4}$$

Zus. 2. Jeder Kreis verhält sich zu dem in ihn beschriebenen Quadrate, wie der halbe Kreisumfang zum Durchmesser (288, Z. 1), und zu dem umschriebenen Quadrate, oder dem Quadrate des Durchmessers, wie der vierte Theil des Umfanges zum Durchmesser (288, Zus. 2).

Tacquet selecta ex Archim. pr. 5, cor. 2.

Zus. 3. Hat ein Kreis gleichen Umfang mit einem Vieleck, so ist sein Inhalt größer als der des Vielecks. 320. — 315. — 226.
L. G. IV, Anh. S. 10.

321. Lehrsatz. Ein Kreisausschnitt ist gleichflächig einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleiche Länge mit dem zu dem Ausschnitt gehörigen Bogen hat, und dessen Höhe gleich ist dem Kreishalbmesser.
L. G. IV, 12, Z. 1.

Beweis. Aus der Betrachtung, daß der Bogen die Gränze für die Summe der Grundlinien von den in den Ausschnitt beschriebenen gleichschenkeligen Dreiecken, und der Halbmesser die Gränze für die Höhen dieser Dreiecke ist.

Anmerkung 1. Bezeichnet man also die Länge eines Bogens durch b, so wird der Inhalt des zugehörigen Ausschnittes dargestellt durch $\frac{b \cdot r}{2}$.

Zus. Die Flächenräume ähnlicher Ausschnitte von verschiedenen Kreisen verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Kreishalbmesser.
L. G. IV, 11, Zus.

Anmerkung 2. Man kann jederzeit ein Quadrat construiren, welches einem gegebenen Dreiecke gleichflächig ist (Aufgaben II, 20). Man würde daher auch ein Quadrat construiren können, welches einem gegebenen Kreise gleichflächig wäre, wenn man eine gerade Linie ziehen könnte, welche mit dem Kreisumfange von gleicher Länge; und könnte man dieß thun, so wäre das berühmte und berüchtigte Problem von der Quadratur oder Inhaltsbestimmung des Kreises gelöst. Allein bis jetzt ist man nicht im Stande gewesen, Mittel zu finden, um jene genannte gerade Linie geometrisch d. h. durch Construction zu bestimmen. Inzwischen sehe ich keine Unmöglichkeit, dieß in der Zukunft noch zu erreichen; und zwar um so mehr, da man bereits, wie in 323 gezeigt werden soll, den Inhalt mehrerer, von Kreisbogen begränzter, Figuren zu bestimmen im Stande ist. Ich bin daher mit Hennert und andern der Meinung, daß die Quadratur des Kreises, wenn auch bis jetzt noch nicht gefunden, gleichwohl im geometrischen Sinne d. h. auf dem Wege der Construction nicht geradezu unmöglich ist. Ich sage im geometrischen Sinne; denn ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn man das Problem im arithmetischen Sinne auffaßt, d. h. wenn man von Zahlen spricht, welche den Inhalt oder Umfang des Kreises in Beziehung auf das Quadrat des Durchmessers oder den Durchmesser als Einheit genau ausdrücken. Ich zweifle, daß diese Zahlen commensurabel sind. Siehe die Anmerkung zu 324.

322. Lehrsatz. Die Flächenräume ungleicher Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Durchmesser.
Eucl. XII, 2. — L. G. IV, 11.

Beweis. Aus 320, Zus. 1.

Anmerkung. Dieser Beweis gründet sich auf die Lehre von den Gränzen. Euclides beweist unsern Satz indirect und zwar auf folgende Weise:

Man bezeichne den Kreis ABCD (Fig. 151) mit K, und den andern EFGH mit K'; wäre nun nicht, wie behauptet wird,

$$K : K' = BD_q : GE_q,$$

so sei

$$K : S = BD_q : GE_q$$

wo S eine Fläche bezeichne, welche $< K'$. Man beschreibe in diesen letztern Kreis das Quadrat EFGH; dasselbe ist halb so groß als das umschriebene Quadrat, also $> \frac{1}{2} K'$. Der Ueberschuß des Kreises über das Quadrat ist gleich der Summe der Kreisabschnitte FJE, ENH etc. Beschreibt man in dieselben gleichschenkelige Dreiecke FJE, ENH, HLG etc. d. h. verdoppelt die Seiten der in den Kreis beschriebenen Figur, so ist jedes dieser Dreiecke größer als die Hälfte des Abschnittes, in welchem es steht (318); verfährt man nun mit den Abschnitten FJ, JE etc. wiederum eben so und geht überhaupt auf diesem Wege immer weiter, so muß man zuletzt zu einem Vieleck gelangen, welches sich vom Kreise um weniger als um jede noch so kleine Größe unterscheidet (307), also auch um weni-

ger, als der Ueberschuß des Kreises K′ über die Fläche S. Es sei FJENH ꝛc. das Vieleck, wo dieses Statt findet. Man beschreibe ein ihm ähnliches Vieleck in den andern Kreis K, so ist, wenn wir dieses letztere mit V, jenes erstere dagegen mit V′ bezeichnen

$$V : V' = BD_q : GE_q = K : S$$

Nun ist aber nach Construction V′ > S, es müßte mithin auch V > K sein, was offenbar ungereimt ist; es ist darum auch nicht wahr, daß S < K′ sein kann, und somit erwiesen, daß die Quadrate der Durchmesser zweier Kreise sich niemals zu einander verhalten können, wie der erstere zu einer Fläche, welche kleiner ist als der zweite.

Aber eben so wenig kann unter der Bedingung, daß $BD_q : GE_q = K : S$, $S > K'$ sein; denn dann wäre auch $GE_q : BD_q = S : K$ und offenbar $S : K = K'$: einer Fläche, die $< K$, also auch $GE_q : BD_q = K'$: einer Fläche, die $< K$ — eine Proportion, die dem, was wir im ersten Theile unseres Beweises dargethan haben, geradehin widerspricht; es kann daher in der Proportion $BD_q : GE_q = K : S$ die Fläche S weder > noch < K′ sein, es ist mithin $BD_q : GE_q = K : K'$.

Zus. 1. Man kennt also das gegenseitige Verhältniß zweier Kreise, wenn ihre Durchmesser bekannt sind, und man kann Kreise beschreiben, welche ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben. Siehe die Aufgaben IV, 6 Anmerk.

Tacquet Zus. 4 zu Eucl. XII, 2.

Zus. 2. Beschreibt man drei Kreise, den einen über der Hypotenuse, die beiden andern über den zugehörigen Catheten eines rechtwinkeligen Dreiecks als Durchmessern, so sind die beiden letztern zusammen so groß als der erstere (221). Es ist daher immer möglich, einen Kreis zu beschreiben, der so groß ist, als eine beliebige Menge gegebener Kreise zusammengenommen, zufolge der Anmerkung zu Aufgg. IV, 8.

323. Lehrsatz. Beschreibt man über der Hypotenuse und über den Catheten eines rechtwinkeligen Dreiecks Halbkreise, und zwar nach derselben Seite hin (Fig. 152), so daß die beiden letztern den erstern schneiden, so sind die beiden kleinen Monde F und G zusammen so groß als das Dreieck.

Tacquet Zus. 10 zu Eucl. XII, 2.

Beweis. Aus 322, Zus. 2.

Anmerkung 1. Die beiden kleinen Monde sind unter einander gleichflächig, wenn △ ADB gleichschenkelig ist; außerdem verhalten sie sich wie die Dreiecke ADC und BDC.

Anmerkung 2. Man sieht hier ein Beispiel zweier von Kreisbogen begränzter Figuren, deren Inhalt genau bekannt ist. Diese Möndchen werden nach ihrem Erfinder, Hippocrates von Chios, benannt, der um 420 v. Chr. lebte. Es giebt eine Menge dergleichen Monde, deren Inhalt man genau finden kann.

Anmerkung 3. Es giebt auch noch andere Figuren der Art, wie z. B. die, welche Archimedes ἄρβηλος nennt, die hier Erwähnung verdienen. Es sei über AD (Fig. 153) der Halbkreis ABD beschrieben; der Durchmesser AD werde in E in zwei beliebige Stücke AE, DE getheilt und über jedem derselben gleichfalls ein Halbkreis beschrieben, so ist es die Figur AFEGDBA, welche den Namen ἄρβηλος führt; sie ist gleichflächig mit dem über der Senkrechten BE als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Denn bezeichnen wir die Kreise über AD, AE, ED, BE als Durchmessern der Reihe nach mit K_1, K_2, K_3, K_4, so ist, weil

$$BE_q = AE_r ED,$$

und mithin $BE_q + AE_r ED + AE_q + ED_q = 2\, AE_r ED + AE_q + ED_q$

$$2\, BE_q + AE_q + ED_q = AD_q,$$

nothwendig auch

$$2\, K_4 + K_2 + K_3 = K_1$$

oder $K_4 = \frac{1}{2} K_1 - \frac{1}{2} K_2 - \frac{1}{2} K_3$ d. i. = AFEGDBA.

Siehe Archim. Lemmata pr. 4., und über eine ähnliche Figur, σάλινον (σέλινον?) genannt pr. 14. Ueber den ἄρβηλος vergleiche man außerdem Papp. IV, 16, 17, 18.

Theilt man (Fig. 153ᵃ) den Umkreis in sechs gleiche Theile, AB, BD, DF, FE, EG, GA, zieht die Sehnen AB, BD, und beschreibt aus G und F die Bogen CoA und CpD, so kann man der Figur AmBnDpCoA auch den Namen ἄρβηλος geben; sie wird durch vier Kreisbogen gebildet, von denen jeder der sechste Theil des Umkreises ist, und ist, wie eine leichte Betrachtung lehrt, gleichflächig mit dem Rhombus ABDC.

Ueber mondförmige und andere ähnliche Figuren verdient vorzüglich nachgelesen zu werden Krafft geometria sublimior §. 165 sqq.

Dritter Abschnitt.

Von dem Verhältnisse des Umkreises zum Durchmesser.

324. Lehrsatz. Das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser kann in Zahlen, durch Betrachtung der in und um den Kreis beschriebenen Vielecke, nur näherungsweise bestimmt werden. Dieses Verhältniß, auf diesem Wege bestimmt, ist incommensurabel, und von gleicher Beschaffenheit ist in diesem Sinne das Verhältniß der Kreisfläche zum Quadrat des Durchmessers.

Beweis. Der Umfang des Kreises ist die Gränze für die Umfänge der in und um denselben beschriebenen Vielecke; wie groß daher auch die Anzahl der Seiten eines solchen Vielecks sein möge, sein Umfang ist jedenfalls kleiner als der des Kreises, wenn das Vieleck ein inneres, und dagegen größer, wenn es ein äußeres ist, so daß man also blos die Gränzen kennt, welche den Umkreis zwischen sich schließen, ohne zu wissen, wie weit er noch von der einen oder der andern entfernt ist. Man kann daher anstatt des Umkreises selbst nur den Umfang eines Vielecks nehmen, welcher allerdings dem Umkreise desto näher kömmt, je mehr das Vieleck Seiten hat. Es ist nun aber, mit Ausnahme des einzigen Sechsecks, das Verhältniß des Umfangs eines Vielecks zum Durchmesser durchweg incommensurabel, und man kann nur die Gränzen, zwischen welche es fällt, so nahe als verlangt wird, angeben; welches Vieleck man also auch nehmen möge, um seinen Umfang als den des Kreises zu gebrauchen, so ist derselbe in jedem Falle zum Durchmesser incommensurabel.

Der Inhalt des Kreises ist gleich dem eines Dreiecks, dessen Höhe gleich dem Radius, also commensurabel, dessen Grundlinie aber gleich dem Umkreise, also auf die vorher angegebene Weise incommensurabel gegen den Durchmesser ist; es muß also der Inhalt dieses Dreiecks und somit der des Kreises incommensurabel gegen das Quadrat des Durchmessers sein.

Anmerkung. Es drängt sich hierbei jedem die Frage auf: ob man denn niemals werde für den Umkreis eine Zahl finden können, welche commensurabel zum Durchmesser ist? Ich kann nicht bergen, daß ich sehr geneigt bin zu glauben, daß dieß nicht mög-

lich ist, und daher das Problem der Quadratur des Kreises im arithmetischen Sinne für unmöglich zu halten.

325. Lehrsatz. Das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser ist, den Bestimmungen des Archimedes zufolge, kleiner als das Verhältniß $3\frac{10}{70} : 1$, und größer als $3\frac{10}{71} : 1$; oder, was auf dasselbe hinaus kömmt, kleiner als $22 : 7$ und größer als $223 : 71$.

Genauer ist dieses Verhältniß, nach Ludolf van Ceulen, $3{,}1415926536 : 1$, und das zuerst von Adrian Metius bekannt gemachte Verhältniß $355 : 113$ ist beinahe eben so genau.

L. G. IV, 12, Zus.

Anmerkung 1. Verfahren des Archimedes. Dieser Geometer berechnete den Umfang eines Sechsundneunzigecks um und eines solchen Vielecks in den Kreis; der Kreisumfang ist kleiner als der des erstern und größer als der des letztern.

Erster Theil.

Construction des äußern Sechsundneunzigecks.

Es sei BJ (Fig. 163) die Seite des innern Zwölfecks; LBD senkrecht auf dem Halbmesser CB, also eine Tangente; HC halbire den Winkel JCB, GC den Winkel HCB, FC den Winkel GCB, und EC den Winkel FCB; dann W. ECB der Centriwinkel für ein 192eck, also, wenn W. BCD = ECB, ECD der Centriwinkel für ein 96eck um den Kreis. Da wir nun die Größe der Seiten solcher Vielecke bestimmen, also durch Zahlen ausdrücken müssen, so werden wir unter Beachtung dessen, was wir früher in 203, Zus. 2, und 219, Zus. 1 erinnert haben, anstatt der über gegebenen Linien beschriebenen Quadrate die zweiten Potenzen der die Größe dieser Linien darstellenden Zahlen gebrauchen, und anstatt Linien, über denen als Seiten gegebene Quadrate construirt werden können, die Quadratwurzeln aus den ihren Flächeninhalt darstellenden Zahlen. Archimedes ist auch auf diese Weise zu Werke gegangen.

Beweis. Nach 296, 2 ist:

$$\begin{aligned} 1.\quad BL : BH &= CL + CB : CB \\ 2.\quad BH : BG &= CH + CB : CB \\ 3.\quad BG : BF &= CG + CB : CB \\ 4.\quad BF : BE &= CF + CB : CB. \end{aligned}$$

Oder durch Versetzung:

$$\begin{aligned} 1.\quad CL + CB : BL &= CB : BH \\ 2.\quad CH + CB : BH &= CB : BG \\ 3.\quad CG + CB : BG &= CB : BF \\ 4.\quad CF + CB : BF &= CB : BE. \end{aligned}$$

Nun ist aber $JM = \frac{1}{2} JK$, und $JK = CJ$, also auch
$$JM = \tfrac{1}{2} CJ,$$
und weil $BL : CL = JM : CJ$, so ist auch
$$BL = \tfrac{1}{2} CL.$$
Ist also BL bekannt, so kennt man auch CL, und nach 87 auch CB, und umgekehrt. Man kann dann aus Nro. 1 BH finden, und dadurch (87) auch CH; darauf aus Nro. 2 BG, aus Nro. 3 BH, und aus Nro. 4 BE.

1. Archimedes nahm für BL den Werth 153; also für CL 306; daher $\overline{CB}^2 = \overline{CL}^2 - \overline{BL}^2 = 306^2 - 153^2 = 70227$, also $\overline{CB}^2 > 70225$, und $CB > \sqrt{70225}$ d. i. > 265, daher
$$CL + CB : BL > 571 : 153$$
und Nro. 1 zufolge, auch
$$\begin{aligned} CB : BH &> 571 : 153 \\ &> 8 \cdot 571 : 8 \cdot 153 \\ &> 4568 : 1224 \end{aligned}$$
Ist also $BH = 1224$, so ist $CB > 4568$, und darum

2. $\overline{CH}^2 > 1224^2 + 4568^2$ d. i. > 22364800
$$\begin{aligned} \text{also um so mehr } \overline{CH}^2 &> 22363441 \\ &> 4729^2 \\ \text{und } CH &> 4729 \end{aligned}$$

$$\text{Daher } \left.\begin{array}{r} CH + CB : BH \\ CB : BG \end{array}\right\} > 9297 : 1224$$

also, wenn BG = 1224, so ist CB > 9297.

3. Es ist demnach

$$\begin{array}{rl} \overline{GC}^2 & > 9297^2 + 1224^2 \\ & > 87932385 \\ \text{also um so mehr} & > 87928129 \\ & > 9377^2 \\ \text{und } GC & > 9377 \end{array}$$

Daher

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r} CG + CB : BG \\ CB : BF \end{array}\right\} & > 18674 : 1224 \\ & > \frac{18674}{2} : \frac{1224}{2} \\ & > 9337 : 612 \end{array}$$

also wenn BF = 612, so ist CB > 9337.

4. Es ist sonach

$$\begin{array}{rl} \overline{CF}^2 & > 612^2 + 9337^2 \\ & > 87554113 \\ \text{also um so mehr} & > 87553449 \\ & > 9357^2 \\ \text{und } CF & > 9357 \end{array}$$

mithin auch

$$\left.\begin{array}{r} CF + CB : BF \\ CB : BE \end{array}\right\} > 9347 : 306$$

$$2\,CB : 2\,BE > 9347 : 306$$

also wenn ED = 306, so ist der Durchmesser > 9347.

Der Umfang des um den Kreis beschriebenen 96ecks ist nun 96 . ED, also = 29376, also

$$\begin{array}{rl} \text{Umfang des 96ecks : Durchmesser} & < 29367 : 9347 \\ & < \frac{29367}{9347} : 1 \\ & < 3\frac{1335}{9347} : 1 \end{array}$$

Nun ist $\frac{1335}{9347} < \frac{1}{7}$, und der Umkreis kleiner als der Umfang des äußern Vielecks, also um so mehr

$$\begin{array}{rl} \text{Umkreis : Durchmesser} & < 3\tfrac{1}{7} : 1 \\ & < 22 : 7 \end{array}$$

Zweiter Theil.

Construction des innern 96ecks.

Es sei BL (Fig. 164) die Seite des innern Sechsecks; AH halbire den Bogen BL, AG den Bogen BH, AF den Bogen BG und AE den Bogen BF; alsdann ist die Sehne BE die Seite des 96ecks.

Beweis.

$$\begin{array}{l} AL : AB = KL : BK \ (206) \\ AL + AB : AB = BL : BK \ (153) \\ \text{oder } AL + AB : BL = AB : BK \\ \triangle BHK \sim \triangle ABH, \text{ daher} \\ AB : BK = AH : BH, \text{ und darum} \end{array}$$

1. $AL + AB : BL = AH : BH$, und auf ähnliche Weise
2. $AH + AB : BH = AG : BG$
3. $AG + AB : BG = AF : BF$
4. $AF + AB : BF = AE : BE$

Ist nun LB gegeben, so ist auch AB = 2 LB bekannt, und umgekehrt; man findet daraus (87, Zus. 1) AL, und auf diesem Wege zuletzt den Werth für EB.

Man nehme nun an

1. LB = 780, also AB = 1560,

$$\begin{array}{rl} \overline{LA}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{LB}^2 & = 1825200 \\ & < 1825201 \\ & < 1351^2 \\ \text{und } LA & < 1351 \end{array}$$

$$\text{Also } \left.\begin{array}{r} AL + AB : BL \\ AH : BH \end{array}\right\} < 2911 : 780$$
$$< 291100 : 78000$$

also, wenn $BH = 78000$, so ist $AH < 291100$,

$$\text{mithin } \overline{AB}^2 < 78000^2 + 291100^2$$
$$< 90823210000$$
$$< 90826890625 \text{ d. i. } 301375^2$$
$$\text{und } AB < 301375$$

Daher

$$\left.\begin{array}{r} AH + AB : BH \\ AG : BG \end{array}\right\} < 592475 : 78000$$
$$< \frac{11 \cdot 592475}{325} : \frac{11 \cdot 78000}{325}$$
$$< 20053 : 2640$$

2. Nimmt man also $BG = 2640$, so ist $AG < 20053$,

$$\text{also auch } \overline{AB}^2 < 2640^2 + 20053^2$$
$$< 409092409$$
$$< 409131529 \text{ d. i. } 20227^2$$
$$\text{und } AB < 20227$$

Daher

$$\left.\begin{array}{r} AG + AB + BG \\ AF : BF \end{array}\right\} < 40280 : 2640$$
$$< \frac{3 \cdot 40280}{20} : \frac{3 \cdot 2640}{20}$$
$$< 6042 : 396$$

3. Nimmt man also $BF = 396$, so ist $AF < 6042$, und darum

$$\overline{AB}^2 < 396^2 + 6042^2$$
$$< 36662580$$
$$< 36663025 \text{ d. i. } 6055^2$$
$$\text{und } AB < 6055$$

Daher

$$\left.\begin{array}{r} AF + AB : FB \\ AE : EB \end{array}\right\} < 12097 : 396$$
$$< 24194 : 792$$

4. Nimmt man also $BE = 792$, so ist $AE < 24194$, also auch

$$\overline{AB}^2 < 792^2 + 24194^2$$
$$< 585976900$$
$$< 585978849 \text{ d. i. } 24207^2$$
$$\text{und } AB < 24207$$

Es ist demnach

$$BE : AB > \frac{792}{3} : \frac{24207}{3}$$
$$> 264 : 8069$$

Der Umfang des 96ecks ist nun $96 \cdot BE = 25344$ also

$$\text{Umfang des 96ecks : Durchmesser} > 25344 : 8069$$
$$> \frac{25344}{8069} : 1$$
$$> 3\tfrac{1137}{8069} : 1$$

Es ist aber $\frac{1137}{8069} > \frac{10}{71}$, und der Kreisumfang noch größer als der Umfang des Vielecks, also um so mehr

$$\text{Umkreis : Durchmesser} > 3\tfrac{10}{71} : 1$$
$$> 223 : 711$$

Anmerkung 2. Das Verhältniß 22 : 7 ist, obschon zu groß, doch in vielen Fällen wirklicher Anwendung genügend.

Anmerkung 3. Archimedes ist etwas anders zu Werke gegangen, als die neuern Mathematiker, die ihm gefolgt sind. Er berechnete nicht wirklich die Seite des 12ecks, 24ecks, 48ecks und 96ecks für einen gegebenen Durchmesser, sondern er forschte blos

nach dem Verhältnisse, welches die Seite eines jeden dieser Vielecke zum Durchmesser haben muß; und da dasselbe incommensurabel ist, so nahm er für die äußern Vielecke, die größer als der Kreis, ein Verhältniß das größer, und für die innern, die kleiner als der Kreis, ein Verhältniß, welches kleiner als das wahre Verhältniß der Vielecksseite zum Durchmesser. Seine ganze Berechnung stützt sich daher nicht auf Zahlen, die blos näherungsweise das sind, was sie sein sollen, sondern auf Zahlen, die wirklich und vollständig das sind, wofür sie ausgegeben werden. Siehe hierüber Montucla histoire de la quadrature du cercle pag. 31 — 36. und Lagny Memoires de l'Acad. 1723 p. 55.

Anmerkung 4. Ludolf van Ceulen (gewöhnlich von Cöln genannt Uebers.) schlug einen andern Weg ein. Er berechnete mit Hülfe der Sätze 293 und 294 die Seiten von einer großen Anzahl innerer und äußerer Vielecke. Er zog zu diesem Ende die Wurzeln aus incommensurabeln Zahlen mit vielem Fleiß und großer Genauigkeit, indem er sie bis auf eine große Anzahl von Decimalen fortführte. In seinem Buche „over den cirkel", worin man den ganzen Verlauf seiner Rechnung nachsehen kann, findet er, daß für den Durchmesser als Einheit und für ein Vieleck von 32212254720 Ecken der Umkreis größer ist als

$$3{,}14159265358979323846$$

und kleiner als

$$3{,}14159265358979323847$$

Später ging er mit noch größerer Genauigkeit zu Werke und fand in seinen fundamentis arithmetices et geometriae, daß für den Durchmesser als Einheit, der Umkreis größer ist, als

$$3{,}14159265358979323846246338327950$$

und kleiner als

$$3{,}14159265358979323846246338327951$$

Anmerkung 5. Das Verhältniß des Archimedes $\frac{22}{7}$ giebt, in einen Decimalbruch verwandelt, 3,142857 ist also zu groß, und zwar um beinahe 0,001264 d. i. $\frac{1}{800}$. L. G. IV, 14.

Anmerkung 6. Das Verhältniß 355 : 113, welches unter dem Namen: Verhältniß des Metius, bekannt, ist sehr genau; denn als Decimalbruch giebt es 3,14159292 ist also noch nicht um 0,0000004 zu groß. Außerdem merken sich die Zahlen, durch welche dieß Verhältniß ausgedrückt wird, ungemein leicht; denn schreibt man von den drei ersten ungeraden Zahlen jede zweimal neben einander 113355, so bilden die drei ersten Ziffern die Zahl für den Durchmesser und die drei letzten die Zahl für den Umkreis.

Man sehe hierüber Montucla in der angeführten Stelle; Tacquet selecta ex Archimede pr. 6 p. 275 et 276 und den noch viel genauern Ausdruck in 332, Anm. 4.

Anmerkung 7. Das genannte Verhältniß 113 : 355 wurde zuerst gefunden durch Adriaan Anthonisse, Bürgermeister der Stadt Alkmaar, Vater des Adriaan Adriaanse, mit dem Beinamen Metius, Professors zu Franeker; der in seiner geometria practica diese Erfindung seinem Vater zuerkennt und hinzufügt, derselbe habe in dem Büchelchen, welches er gegen Simon van der Eicke*) und dessen Kreisquadratur geschrieben, bestimmt nachgewiesen, daß das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser kleiner als $3\frac{17}{120}$ und größer als $3\frac{15}{106}$, zwischen denen das Mittel $3\frac{16}{113}$ oder $\frac{355}{113}$ sei. An einer andern Stelle sagt Metius, daß sein Vater diese seine Erfindung begründet habe durch Beweise ganz nach Art und im Geiste des Archimedes. Ich habe das Werkchen des Adriaan Anthonisse nie zu Gesichte bekommen, und kann daher über die in ihm enthaltenen Beweise nicht urtheilen. Es ist inzwischen nicht schwer, das genannte Verhältniß (nun, da man es kennt) aus dem des Archimedes herzuleiten.

Da nämlich das Verhältniß 22 : 7 zu groß ist, so ist es eben so mit dem Verhältnisse 22 . 16 : 7 . 16 oder 352 : 112 und addirt man zu diesen Zahlen die in demselben Verhältniß stehenden $3\frac{1}{7}$ und 1, so ist das so entstehende Verhältniß $355\frac{1}{7}$: 113

*) Metius, der in lateinischer Sprache schreibt, nennt ihn „A Quercu." Der Name war, wie ich glaube, du Chesne; wenigstens findet sich bei Lipenius in der bibliotheca philosophica: Simon du Chesne de la quadrature du cercle. Delft 1584 in 4. — Das Büchelchen des Adriaan Anthonisse habe ich in keinem der Cataloge, die ich zu Rathe gezogen, aufgeführt gefunden, was mich zweifeln läßt, ob es jemals im Druck erschienen.

gleichfalls noch zu groß, und man wird daher der Wahrheit näher kommen, wenn man anstatt $355\frac{1}{7}$ setzt 355.

Das Verhältniß 223 : 71 ist zu klein, also auch 16 . 223 : 16 . 71, oder 3568 : 1136; und zieht man von diesen letztern Zahlen die in eben diesem Verhältnisse stehenden $18\frac{60}{71}$ und 6 ab, so ist das so entstehende Verhältniß $3549\frac{11}{71}$: 1130 gleichfalls noch zu klein; man wird also der Wahrheit näher kommen, wenn man anstatt $3549\frac{11}{71}$ setzt 3550, wodurch man wiederum zu unserem Verhältnisse 3550 : 1130 oder 355 : 113 gelangt.

Uebrigens ist es leicht, wenn man das durch Ludolf van Ceulen berechnete Verhältniß, aber nur bis 6ten Decimale zum Grunde legt, sowohl das des Archimedes als das des Metius daraus herzuleiten, und zugleich nachzuweisen, daß das zweite genauer als das erste, beide aber nicht so genau als das Ludolf'sche (selbst wenn dieß auf 6 Decimalen beschränkt wird) sind.

Dieses letztere ist 3,141593 : 1 oder $3\frac{141593}{1000000}$: 1, wofür man durch Ausführung der Division setzen kann: $3\frac{1}{7{,}0624}$: 1 also $< 3\frac{1}{7} : 1$, also ist 22 : 7 zu groß.

Es ist nun $0{,}0624 = \frac{624}{10000} = \frac{1}{16{,}02}$, also ist das Ludolf'sche Verhältniß darnach auch $3\frac{1}{7 + \frac{1}{16{,}02}} : 1$, oder sehr nahe $3\frac{1}{7 + \frac{1}{16}} : 1$ d. i. $3\frac{16}{113} : 1$ oder 355 : 113.

Man kann über dergleichen Herleitungen von Brüchen, namentlich auch in Beziehung auf unsern Gegenstand nachsehen das 11te Capitel der Algebra von Wallis in Opp. Mathem. T. 2 pag. 49.

Anmerkung 8. Wir werden später (370, Zus. 3) zeigen, wie sehr die Berechnung des Kreisumfanges durch den Gebrauch der trigonometrischen Tafeln abgekürzt wird. Aber man übersehe nicht, daß das Lästige lediglich darin besteht, daß man die Seiten so vieler innern und äußern Vielecke berechnen muß. Die Sinusse und Tangenten sind nun nichts anders als die halben Seiten jener Vielecke; bei der Berechnung der trigonometrischen Tafeln wurde also das Lästige für die Berechnung des Umkreises zugleich mit abgemacht. Die durch die Tafeln gewährte Abkürzung ist daher mehr scheinbar als wirklich und wesentlich.

Anmerkung 9. Snellius, und nach ihm besonders Huygens haben sich bei diesen Rechnungen vielfacher Abkürzungen bedient. Namentlich entdeckten sie neue Eigenschaften der in und um den Kreis beschriebenen Vielecke, wodurch sie in den Stand gesetzt wurden, durch Anwendung von Vielecken mit geringerer Seitenzahl denselben Grad der Genauigkeit zu erlangen, den Ludolf erst bei Vielecken von weit größerer Seitenzahl erreichte. Die in den folgenden Nummern mitgetheilten Sätze waren es, welche sie dabei unterstützten.

326. Lehrsatz. Jeder Kreisabschnitt (FED Fig. 165), der kleiner als der Halbkreis, ist größer als $\frac{4}{3}$ des gleichschenkeligen Dreiecks, welches man über der zugehörigen Sehne als Grundlinie in denselben beschreibt.

Huygens pr. 3.

Vorbereitung. Man beschreibe über den Schenkeln FD, DE aufs neue gleichschenkelige Dreiecke FJE, DLE, welche offenbar gleichflächig sind, darauf wiederum gleichschenkelige Dreiecke über den Grundlinien FJ, JE, EL, LD, die gleichfalls an Inhalt einander gleich sind, und fahre auf diese Weise fort, daß man immer wieder in jeden der zuletzt entstandenen Kreisabschnitte ein gleichschenkeliges Dreieck beschreibt.

Beweis. Es ist

$$\triangle\, FED < 4\,(\triangle\, FJE + \triangle\, DLE)\ (298),$$

$$\text{oder } \triangle\, FJE + \triangle\, DLE > \tfrac{1}{4}\,\triangle\, FED$$

Und auf gleiche Weise sind die über FJ, JE, EL und LD beschriebenen gleichschenkeligen Dreiecke zusammen größer als $\frac{1}{4}(\triangle\, FJE + \triangle\, DLE)$, also $> \frac{1}{16}\,\triangle\, FED$. Es ist daher die Summe aller dieser gleichschen-

keligen Dreiecke größer als

$\triangle$ FED $+ \frac{1}{4} \triangle$ FED $+ \frac{1}{16} \triangle$ FED $+ \frac{1}{64} \triangle$ FED $+ \ldots$

also größer als: $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots) \triangle$ FED

Die Gränze für die Summe aller dieser Dreiecke ist daher größer als die Gränze von

$(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots) \triangle$ FED d. i. $> \frac{4}{3} \triangle$ FED (305)

Für die Summe der gleichschenkeligen ist aber offenbar die Gränze der Kreisabschnitt FJELD, also

FJELD $> \frac{4}{3} \triangle$ FED.

327. Lehrsatz. Jeder Kreisabschnitt (JEL Fig. 165), der noch nicht einen Halbkreis ausmacht, ist kleiner als $\frac{2}{3}$ des gleichschenkeligen Dreiecks, welches von der zu dem Abschnitte gehörigen Sehne und den durch ihre Endpuncte gehenden Tangenten gebildet wird.

Huygens pr. 4.

Vorbereitung. Ziehe durch E die Tangente YEY; beschreibe über JE und EL die gleichschenkeligen Dreiecke JnE und EoL, ziehe durch ihre Spitzen die Tangenten qnr, sot; beschreibe nun wieder über Jn, nE, Eo, oL gleichschenkelige Dreiecke, ziehe durch ihre Spitzen Tangenten und fahre auf diese Weise fort.

Beweis.

$\triangle$ XGY $+ \triangle$ qXr $+ \triangle$ sYt $+ \ldots > \frac{1}{2}(\triangle$ JEL $+ \triangle$ JnE $+ \triangle$ EoL $+ \ldots)$ (299). Die Gränze für die erste Dreieckssumme ist also auch größer als die Gränze für die Hälfte der zweiten d. h. der von den beiden Tangenten, JG, LG und von dem Kreisbogen JnEoL begränzte Raum ist größer als die Hälfte des Kreisabschnittes JnEoLJ, also diese beiden Flächenräume zusammen d. h. $\triangle$ JGL $> \frac{3}{2}$ Kreisabschnitt JnEoLJ; oder

Abschnitt JnEoLJ $< \frac{2}{3} \triangle$ JGL

Anmerkung. Der Grund, warum der in Rede stehende Abschnitt kleiner als der Halbkreis sein muß, fällt von selbst in die Augen.

328. Lehrsatz. Jeder Kreis ist größer als ein in denselben beschriebenes Vieleck von gerader Seitenzahl zusammengenommen mit dem dritten Theil des Ueberschusses eben dieses Vielecks über das in denselben Kreis beschriebene Vieleck von halb so großer Seitenzahl.

Huygens pr. 8.

Vorbereitung. Es sei FJELDdBTAtF (Fig. 143) das regelmäßige Vieleck in den Kreis, dessen Seitenzahl 2 n sei; sein Inhalt sei V; FEDBAF sei das andere Vieleck, das halb so viel Seiten hat, sein Inhalt sei v.

Der Ueberschuß des erstern Vielecks über das zweite ist offenbar gleich der Summe der Dreiecke FJE, ELD rc., die alle unter einander gleich, und deren Anzahl so groß ist als die Menge der Seiten des zweiten Vielecks d. i. n; die Summe aller kann also $=$ n. $\triangle$ FJE gesetzt werden, man hat demnach

V $-$ v $=$ n . $\triangle$ FJE, und V $=$ v $+$ n . $\triangle$ FJE

Beweis. Der Inhalt des Kreises ist

$=$ v $+$ n . Abschnitt FJE

aber Abschnitt FJE $> \frac{4}{3} \triangle$ FJE (326)

$$\text{Daher Kreisfläche} > v + \frac{4n}{3} \cdot \triangle FJE$$
$$> v + n \cdot \triangle FJE + \frac{n}{3} \triangle FJE$$
$$> V + \tfrac{1}{3}(V - v)$$

Anmerkung. Man sieht, wie viel genauer unser Satz die Zahlen begränzt, wodurch man den Inhalt des Kreises ausdrücken kann. Nach dem Verfahren des Archimedes weiß man blos, daß jeder Kreis größer als das in ihn beschriebene 96eck ist, aber nach unserm Satze weiß man außer dem auch noch, daß er größer ist als dieses 96eck zusammengenommen mit dem dritten Theile seines Ueberschusses über das 48eck.

329. **Lehrsatz. Jeder Kreis ist kleiner als $\frac{2}{3}$ eines um ihn beschriebenen regelmäßigen Vielecks von gerader Seitenzahl zusammengenommen mit dem dritten Theile des dem erstern ähnlichen innern Vielecks.**

Huygens pr. 6.

Beweis. Abschnitt JnEoL (Fig. 165) $< \frac{2}{3} \triangle JGL$ (327)
also auch Abschn. JnEoL $+ \triangle JCL < \frac{2}{3} \triangle JGL + \triangle JCL$
oder Ausschnitt JCLEJ $< \frac{2}{3}$ JCLG $+ \frac{1}{3} \triangle JCL$
also auch

$$n \,.\, \text{Ausschn. JCLEJ} < \frac{2n}{3}\text{JCLG} + \frac{n}{3} \triangle JCL$$

d. i. Kreisfläche $< \frac{2}{3}$ des äußern Vielecks $+ \frac{1}{3}$ des innern.

Anmerkung 1. Durch das Verfahren des Archimedes weiß man blos, daß der Kreis kleiner als das um ihn beschriebene 96eck; jetzt weiß man nun auch, daß er kleiner als $\frac{2}{3}$ dieses äußern Vielecks und $\frac{1}{3}$ des ihm ähnlichen innern zusammengenommen, wodurch also die wahre Größe des Kreises zwischen engere Gränzen eingeschlossen wird.

Anmerkung 2. Da man durch den frühern Lehrsatz 293 und dessen 5ten und 6ten Zusatz in den Stand gesetzt ist, leicht den Inhalt eines in den Kreis beschriebenen Vielecks zu finden, und eben so durch S. 283 den Inhalt eines äußern Vielecks, so sieht man, wie leicht es ist, durch Hülfe unseres vorstehenden Satzes die Kreisfläche annähernd zu bestimmen. Durch Anwendung eines Zwölfecks erlangt man schon eine namhafte Genauigkeit.

Zus. **Der Inhalt eines Kreisausschnittes ist kleiner als $\frac{2}{3}$ des von den beiden Halbmessern desselben und den durch ihre Endpuncte gehenden Tangenten gebildeten Trapeziums, und $\frac{1}{3}$ des von eben diesen Radien gebildeten Mittelpunctsdreiecks zusammen genommen.**

Huygens pr. 6.

330. **Lehrsatz. Der Umkreis ist größer als der Umfang eines regelmäßigen eingeschriebenen Vielecks von gerader Seitenzahl zusammengenommen mit dem dritten Theile des Unterschiedes zwischen eben diesem Umfange und dem Umfange des eingeschriebenen Vielecks von halb so großer Seitenzahl. Fig. 165 und 166.**

Huygens pr. 7.

Vorbereitung. Es sei FD die Seite eines eingeschriebenen Vielecks; FE, ED die Seiten eines eben solchen Vielecks, aber von doppelter Seitenzahl; und FJ, JE, EL, LD die Seiten eines neuen Vielecks, das doppelt so viel Seiten als das unmittelbar vorhergehende hat.

Es sei nun gh (Fig. 166)*) gleich dem Umfange des Vielecks, dessen eine Seite FD, gi der Umfang des Vielecks, dessen Seite FE,

*) Aus Mangel an Raum ist Fig. 166 nach einem kleinern Maßstabe gezeichnet als Fig. 165, was wohl der Deutlichkeit unbeschadet, geschehen konnte.

und ik $= \frac{1}{3}$ hi $= \frac{1}{3}$. (gi — gh) Die Senkrechte Nz sei gleich dem Halbmesser des Kreises; man ziehe Ng, Nh, Ni, Nk; und bezeichne mit π den Umkreis.

Beweis. $\left.\begin{array}{l}\triangle \text{ gNi} = \text{dem Vieleck über FJ} \\ \triangle \text{ gNh} = \text{dem Vieleck über FE}\end{array}\right\}$ (293, Z. 6)

Also $\triangle$ iNk $= \frac{1}{3}$ ($\triangle$ gNi — $\triangle$ gNh)
$= \frac{1}{3}$ (Vieleck über FJ — Vieleck über FE)

Mithin Inhalt des Kreises $> \triangle$ gNi $+ \triangle$ Nik (328),

oder $\frac{Nz \,.\, \pi}{2} > \frac{Nz \,.\, gi}{2} + \frac{Nz \,.\, ki}{2}$

daher auch $\pi >$ gi $+$ ki
$>$ gi $+ \frac{1}{3}$ (gi — gh)

Zus. 1. Bezeichnet U den Umfang eines Vielecks von gerader Seitenzahl, u den Umfang des nächstvorhergehenden d. h. das halb so viel Seiten hat, so ist

$$\pi > U + \frac{U - u}{3}$$
$$> \frac{4\,U}{3} - \frac{u}{3}$$

d. h. der Umkreis ist größer als der Ueberschuß von $\frac{4}{3}$ des Umfanges eines eingeschriebenen Vielecks von gerader Seitenzahl über $\frac{1}{3}$ des Umfanges von dem gleichfalls eingeschriebenen Vielecke, welches halb so viel Seiten hat.

Huygens pr. 7, Cor.

Anmerkung 1. Die Seite des innern Sechsecks ist gleich dem Halbmesser; also der dritte Theil seines Umfanges gleich dem Durchmesser; demnach ist $\frac{4}{3}$ vom Umfange des Zwölfecks d. h. das Sechszehnfache einer Seite vermindert um den Durchmesser kleiner als der Umkreis, aber der Unterschied ist sehr gering. Die Seite des Zwölfecks kann man nun sehr leicht durch Hülfe von 293, Zus. 8 berechnen; man sieht also, wie man hier größere Genauigkeit erreicht als auf dem Wege des Archimedes, wo man immer nur weiß, daß der Umkreis größer, als der Umfang des eingeschriebenen Vielecks.

Zus. 2. Aus dem Beweise unseres Satzes und aus 328 ergiebt sich, daß das, was für den ganzen Umkreis gilt, auch für jeden einzelnen Bogen Statt haben muß; daher ist ein Bogen jederzeit größer als $\frac{4}{3}$ seiner Sehne vermindert um $\frac{1}{3}$ von der Hälfte der Sehne eines doppelt so großen Bogens; oder größer als die Sehne vermehrt um den dritten Theil des Unterschiedes zwischen eben dieser Sehne und der halben Sehne eines doppelt so großen Bogens.

Anmerkung 2. Huygens gebraucht anstatt halbe Sehne des doppelten Bogens, den Ausdruck Sinus des Bogens, was, wie man aus (360) sehen wird, auf dasselbe hinauskömmt.

Zus. 3. Es ergiebt sich hieraus ein leichtes Verfahren, eine gerade Linie geometrisch zu finden, welche annähernd einem gegebenen Kreisbogen an Länge gleich kömmt.

Es sei (Fig. 166[a]) der Bogen ACB; halbire denselben in C; ziehe AC, CB; alsdann CE senkrecht auf AB; nimm FG $=$ AB, FJ $=$ AC $+$ CB, und JK $= \frac{1}{3}$ GJ, so ist FK die gesuchte Linie.

Denn,

Bogen CB $>$ CB $+ \frac{1}{3}$ (CB — EB)

daher Bogen ACB $> AC + CB + \frac{1}{3}(AC + CB - AB)$
$> FJ + \frac{1}{3}(FJ - FG)$
$> FJ + \frac{1}{3} GJ$
$> FJ + JK$
$> FK$

Huygens pr. 12.

Anmerkung 3. Je kleiner der gegebene Bogen ist, desto mehr nähert sich ihm die Linie FK. In solchen Fällen, wo der Bogen einen größern Theil des ganzen Umkreises ausmacht, kann man ihn zuvor successive in 2, 4, 8 2c. gleiche Theile theilen, für einen dieser Theile die ihm annähernd gleiche gerade Linie suchen, und von dieser Länge das Sovielfache nehmen, in so viel Theile man den Bogen getheilt hat.

331. **Lehrsatz.** Zieht man an den einen Scheitel (G Fig. 167) eines Kreisdurchmessers (BG) eine Tangente (GE) und nach ihr von dem andern Scheitel (B) aus die Schneidende BCK, so ist der zwischen dieser letztern und dem Durchmesser enthaltene Bogen (CG) kleiner als $\frac{2}{3}$ von dem Stück (GK) der Tangente, welches zwischen eben dieser Schneidenden und dem Berührungspuncte enthalten ist, vermehrt um den dritten Theil der Senkrechten (CH), welche man vom Endpuncte (C) des Bogens auf den Durchmesser fällt.

Huygens pr. 8.

Vorbereitung. Ziehe an C die Tangente CJ, dann AJ, und CG.

Beweis. Viereck ACJG $= 2 \triangle$ ACJ = einem Dreieck, dessen Grundlinie 2 CJ und Höhe AC oder AG ist.

Da aber CJ = JG (250, Z. 4 oder 259, Z. 2), und W. GCK = 1 R, so ist auch CJ = JK = JG, also KG = 2 CJ, also Viereck ACJG = einem Dreiecke, dessen Grundlinie KG und Höhe AG.

Der Kreisausschnitt CAG ist = einem Dreiecke, dessen Grundlinie CG, und Höhe AG ist (321), daher (200) Ausschnitt CAG : Trapezium ACJG : $\triangle$ ACG = Bogen CG : GK : CH,

aber Ausschnitt CAG $< \frac{2}{3}$ Trap. ACJG $+ \frac{1}{3} \triangle$ ACG,

daher auch Bogen CG $< \frac{2}{3}$ GK $+ \frac{1}{3}$ CH.

332. **Lehrsatz.** Der Umfang eines Kreises ist kleiner als $\frac{2}{3}$ vom Umfange eines in denselben beschriebenen Vielecks und $\frac{1}{3}$ vom Umfange des diesem ähnlichen äußern Vielecks zusammengenommen.

Huygens pr. 9.

Vorbereitung. Es sei CH (Fig. 167) die halbe Seite des innern Vielecks, also, wenn man ACE zieht, EG die halbe Seite des ähnlichen äußern Vielecks. Ziehe BC und verlängere sie bis K; nimm LH = HG, also BL = BG — LG = 2 (AG — HG) = 2 AH.

Beweis. $EG : CH = AG : AH$
$EG + CH : CH = AG + AH : AH$
$CH : KG = BH : BG$
$EG + CH : KG = (AG + AH) . BH : AH . BG$
$EG + CH : 2 KG = (AG + AH) . BH : 2AH . BG$
$= BH_q : BL_r BG$

Nun ist aber $BH_q = BH_r LH + BH_r BL$
und $BL_r BG = BL_r HG + BH_r BL$
Aber $BH_r LH > BL_r HG$,
Daher $BH_q > BL_r BG$
Mithin auch $EG + CH > 2 KG$,

und $\frac{EG + 2\,CH}{3} > \frac{2\,KG + CH}{3}$

Folglich, weil Bogen CG $< \frac{2}{3}$ KG $+ \frac{1}{3}$ CH, (331) um so mehr Bogen CG $< \frac{2}{3}$ CH $+ \frac{1}{3}$ EG, und darum auch der ganze Umkreis $< \frac{2}{3}$ vom Umfange des Vielecks über der doppelten Länge von CH als Seite $+ \frac{1}{3}$ vom Umfange des äußern Vielecks, welches die doppelte Länge von EG zur Seite.

Anmerkung 1. Nach dem Archimedeischen Verfahren weiß man blos, daß der Umkreis kleiner ist, als der Umfang jedes äußern Vielecks; durch unsern eben erwiesenen Satz nun erfährt man, daß der Umkreis auch noch kleiner sei, als eine Länge, welche kleiner als der Umfang eines äußern Vielecks ist; man ist also der wahren Größe des Umkreises näher gekommen.

Zus. Da Bogen CG $< \frac{2}{3}$ CH $+ \frac{1}{3}$ EG, so erlangt man dadurch den Satz: Jeder, nicht den vierten Theil des Umkreises erreichende, Bogen ist kleiner als zwei Drittel von der halben Sehne des doppelten Bogens zusammengenommen mit dem dritten Theil der Tangente.

Anmerkung 2. Snellius und Huygens gebrauchen, wie wir schon einmal bemerkt haben, anstatt halbe Sehne des doppelten Bogens den Ausdruck S i n u s (359).

Anmerkung 3. Dieß sind die Sätze, welche Snellius zuerst bekannt machte, aber ohne vollständige Beweise; diese erhielten sie erst später durch Huygens. Durch sie wird man in den Stand gesetzt, auf einfacherem und kürzerem Wege denselben Grad von Genauigkeit zu erreichen, welchen Ludolf nur durch eine große und wahrhaft mühselige Arbeit erreichte. Huygens ging später noch weiter, indem er zwei Sätze fand, welche die Sache merklich abkürzen, die aber nicht in das Gebiet der Elementargeometrie gehören und daher hier nicht mitgetheilt werden können.

Anmerkung 4. Nach den Zeiten von Ludolf und Snellius, und einige Jahre nachdem Huygens seine Schrift: „de circuli magnitudine" herausgegeben hatte, entdeckte man Mittel, das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser mit noch mehr Decimalen, also noch genauer darzustellen, nämlich durch Reihen, deren Glieder fortschreiten nach Potenzen der goniometrischen Linien, der Sinusse und Tangenten, von welchen wir im nächsten Buche ausführlicher handeln werden. In den Anhängen sollen einige der Reihen mitgetheilt werden, in denen Sinus, Cosinus, Tangente durch den zugehörigen Bogen dargestellt werden, und umgekehrt die Größe des Bogens, also auch des ganzen Umkreises durch die Größe der zugehörigen Sinus, oder Cosinus, oder Tangente.

Es mag hier nur noch bemerkt werden, daß Lagny (Mem. de l'Acad. 1719. p. 144) der erste war, welcher durch Ausdrücke dieser Art, für die Länge des Umkreises folgenden, 127 Decimalen enthaltenden, Werth fand, dessen sich später andere Schriftsteller, z. B. Euler (Introductio in Analysin Infinitorum §. 126) zu weiterer Benutzung bedient haben:

3,141592	653589	793238	462643	383279
502884	197169	399375	105820	974944
592307	816406	286208	998628	034825
342117	067982	148086	51327 *) 2	306647
093844	6			

Setzte man in der letzten Stelle 7 für 6, so würde die Länge des Umkreises etwas zu groß sein, jetzt ist sie etwas zu klein.

Von der übergroßen Genauigkeit dieses Ausdrucks kann man sich eine Vorstellung machen, wenn man erwägt, daß schon in dem Falle, wo man sich blos der 21 ersten Decimalen bediente und die niedrigste derselben (2) um eins vermehrte, der dadurch hervorgebrachte Unterschied selbst bei einem Kreise, dessen Umfang gleich dem der ganzen Erdkugel wäre, noch nicht 0,000 000 000 28 eines Sandkörnchens betragen würde, diese Körnchen zu der Größe angenommen, daß 200 derselben neben einander gelegt, die Länge eines Zolls einnähmen.

Anmerkung 5. Da man nun die Gränzen, zwischen welche das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser fällt, mit einer Genauigkeit kennt, die man bis zu einem so

*) Diese 113te Decimale ist zwar so wohl bei Lagny als auch bei vielen spätern Schriftstellern, wie sie hier angegeben ist, 7, allein man hat später gefunden, daß sie unrichtig ist, und daß statt ihrer gesetzt werden muß 8; siehe Vega thesaurus logarithmorum completus. Lips. 1794. fol. pag. 633. Anm. des Uebers.

hohen Grade steigern kann, so darf man auch alle einzelnen Verhältnisse als (annähernd) richtig betrachten, wenn nur von ihnen nachgewiesen wird, daß sie zwischen eben jene Gränzen fallen; und auf diesem Grunde (ganz verschieden von dem, worauf das 330, Zus. 3 mitgetheilte Verfahren sich stützte, eine Gerade zu finden, welche einem gegebenen Kreisbogen gleich) beruhen viele Constructionen zur Auffindung von Linien die mit gegebenen Kreislinien gleiche Länge, oder von Quadraten welche mit gegebenen Kreisen gleichen Flächeninhalt haben. Aus der großen Anzahl solcher Constructionen, die es überhaupt giebt, wollen wir nur folgende ausheben, die einen merklichen Grad von Genauigkeit geben.

Erstes Verfahren. Man theilt eine Gerade nach dem äußern und mittlern Verhältniß. Das kleinere Stück verhält sich alsdann zur ganzen Linie, wie der Durchmesser eines Kreises zu $\frac{5}{6}$ des Umkreises.

Vietae opp. pag. 392.

Beweis. Bezeichnet man die ganze Linie mit L, das kleinere Stück mit K, so ist:

$$K = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} . L \quad (213, \text{Anm. } 2)$$

Nun ist $\sqrt{5} = 2{,}2366 \ldots$, also

$$K = \frac{3 - 2{,}2366}{2} L = 0{,}3817 . L,$$

Demnach $K : L =$ Durchmesser : $\frac{5}{6}$ Umkreis $= 0{,}3817 : 1$.

Mithin ist $\frac{5}{6}$ Umkreis $= \frac{1}{0{,}3817}$

und daraus Umkreis $= 3{,}1435$

ein Werth, der sich dem Ludolf'schen ziemlich nähert.

Zweites Verfahren. Verlängere die Hälfte des Halbmessers um eine Linie, deren Quadrat so groß ist, als die Summe der Quadrate des Halbmessers und der halben Seite des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Achtecks, so ist die so entstandene Linie gleich dem vierten Theile des Umkreises *).

Construction. Ziehe zwei Durchmesser EG, FH (Fig. 151), die sich rechtwinkelig schneiden; ziehe die Sehne HE; halbire Bogen HNE in N, ziehe NE, welche die Achtecksseite ist. Nimm CT $= \frac{1}{2}$ NE, ziehe ET und verlängere sie so, daß TU $= \frac{1}{2}$ CE, so ist ETU gleich dem vierten Theile des Umkreises.

Beweis. Die halbe Seite des Achtecks ist, für den Halbmesser als Einheit, wie man durch leichte Rechnung findet: 0,3827; das Quadrat davon ist 0,14646, dazu addirt das Quadrat des Radius giebt: 1,14646; die Quadratwurzel hieraus ist 1,0708; und vermehrt um die Hälfte des Radius 1,5708 der vierte Theil des Umkreises; also für den Durchmesser als Einheit, 0,7854, mithin der ganze Umkreis 3,1416, was von dem Resultate Ludolf's nicht sehr verschieden ist.

Drittes Verfahren. Es sei BCD (Fig. 169) die Hälfte, und BC ein Viertel des Umkreises; theile den rechten Winkel BAC in drei gleiche Theile (was stets mit geometrischer Strenge ausführbar), deren einer BAE; ziehe DL und BJ senkrecht auf BD, verlängere AE bis J; ziehe JM $\perp$ auf DL, nimm DL $= 3$ AB und ziehe JL, so ist diese Linie nahe dem halben Umkreise gleich.

Beweis. Ziehe EF $\perp$ auf BD; setze BA $= 1$, alsdann ist EF als halbe Sehne eines Winkels, der $\frac{2}{3}$ R beträgt $= \frac{1}{2}$, daher FA $= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und, weil AF : FE $=$ AB : BJ,

$$BJ = \frac{1}{\sqrt{3}} = DM$$

$$\text{also } ML = 3 - \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$\text{und } JL = \sqrt{4 + (3 - \sqrt{\tfrac{1}{3}})^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 - 6\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{40}{3} - 6\sqrt{\tfrac{1}{3}}}$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$$

$$= 3{,}14153$$

ein Werth, der mit dem von Ludolf gefundenen gut übereinstimmt.

Kochansi Acta Lipsiensia 1685 p. 399.

*) Ich habe dieses Verfahren in den nachgelassenen Papieren von Huygens gefunden, wo dasselbe so lautet: Si ad rectam, quae potest duo quadrata simul, quadratum radii et quadratum sinus Arcus 22°30′, addatur rectum semissis radii, composita recta aequalis erit peripheriae quadrantis. Huygens hat mit eigner Hand noch die Worte bei-

Viertes Verfahren. Es sei AB (Fig. 154) der Halbmesser eines Kreises; theile ihn in acht gleiche Theile; ziehe CB $\perp$ auf AB, und mache sie $= \frac{7}{8}$ AB; ziehe CA, nimm AD $= \frac{1}{2}$ AB; fälle aus D die Senkrechte DE auf AB, ziehe dann CE und mit ihr $\|$ DF. Es ist dann 3 AB + AF = dem halben Umkreise.

Beweis.

$$\begin{aligned} AC : AD &= AB : AE \\ AC : AD &= AE : AF \end{aligned}$$

$$\overline{AE}^2 = AB \,.\, AF$$

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 : \overline{AE}^2 \\ &= \overline{AB}^2 : AB \,.\, AF \\ &= AB : AF \end{aligned}$$

$$\text{also } AF = \frac{AB \,.\, \overline{AD}^2}{\overline{AC}^2}$$

Es ist aber: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \frac{7^2 + 8^2}{8^2} \,.\, \overline{AB}^2$

$$\text{und } \overline{AD}^2 = \frac{4^2}{8^2} \,.\, \overline{AB}^2,$$

$$\text{also } AF = \frac{4^2}{7^2 + 8^2} \,.\, AB = \frac{16}{113} \,.\, AB;$$

mithin

$$\begin{aligned} 3\,AB + AF &= \frac{355}{113} \,.\, AB \\ &= \frac{355}{113}. \text{ Für } AB = 1. \end{aligned}$$

also übereinstimmend mit dem Verhältnisse von Metius.

Dieses schöne Verfahren, das keinem der frühern nachsteht, wurde mir vor Jahren von dem wackern Mathematiker De Gelder mitgetheilt.

Anmerkung 6. Bei keiner der vorher angegebenen Verfahrungsarten wird etwas gefordert, was nicht durch Hülfe von Lineal und Zirkel ausgeführt werden könnte, wenn man auch durch diese Constructionen nicht vollendete, sondern blos annähernde Genauigkeit erlangt. Aber es giebt eine bestimmte krumme Linie, durch deren Hülfe man eine Gerade finden kann, deren Länge gleich einem beliebigen Kreisbogen, also auch einem Quadranten und somit auch dem ganzen Umkreise gleich ist. Der Erfinder dieser Linie ist Dinostratus, der sie Quadratrix nannte. Sie gehört zu den sogenannten mechanischen Linien *). Man kann über dieselben nachsehen Pappus IV, 25, 26, 27, 28. Ueber die Quadratrix sowohl an und für sich als in Beziehung auf die Quadratur des Kreises hat sehr weitläufig gehandelt Clavius in einem Anhange zum sechsten Buche des Euclides; und im Anhange zum siebenten Buche seiner praktischen Geometrie.

333. Lehrsatz. Der Flächenraum eines Kreises verhält sich zum Quadrate seines Durchmessers wie 11 : 14; wenn man das von Archimedes für den Umkreis gegebene Verhältniß anwendet.

Beweis. Aus 319, Zus. 2.

Anmerkung 1. Gebraucht man das von Ludolf berechnete Verhältniß, so verhält sich der Kreis zum Quadrate des Durchmessers = 0,7853981634 : 1 d. i. 10,9955742876 : 14 ein Verhältniß, welches, wie man sieht, nur wenig von dem 11 : 14 abweicht.

Anmerkung 2. Setzt man den Halbmesser = 1, also den Durchmesser = 2, so ist der Inhalt des Kreises 3,1415926536, also beinahe 3,14160.

---

gefügt: receu de M. l'Ambassadeur Chanut. Chanut war französischer Gesandter in Stockholm zur Zeit als Descartes daselbst starb.

*) Pappus sagt, daß Dinostratus (ungef. 370 v. Chr.) und Nicomedes (der wahrscheinlich um 150 v. Chr. lebte U.) die Quadratrix zur Quadratur des Kreises gebraucht hätten. Bei den Alten war auch eine Quadratrix des Hippias (ungefähr 70 v. Dinostratus) bekannt. Montucla vermuthet mit Recht, daß jene und diese eine und dieselbe Linie waren, die zuerst zur Theilung eines Kreisbogens in eine beliebige Anzahl gleicher Theile erfunden, und von welcher Dinostratus zuerst bemerkte, daß sie auch zur Quadratur des Kreises brauchbar sei. Mont. Hist. des Math. I, p. 181.

Anmerkung 3. Unter Berücksichtigung dessen, was wir in der fünften Anmerkung zum vorigen Lehrsatz erinnert haben, gelangt man endlich noch zu folgendem

334. **Lehrsatz.** **Theilt man eine Gerade nach dem äußern und mittlern Verhältnisse, so verhält sich die Summe der ganzen Linie und des kleinern Stückes zum Doppelten der Linie wie die Wurzel aus dem anderthalbfachen Quadrate des Radius zu dem Quadrate, welches gleichflächig ist mit dem zu diesem Radius gehörigen Kreise.**

Vieta p. 393.

Beweis. Man nimmt die gegebene Linie selbst zur Einheit, berechnet das kleinere Stück, und findet so, daß die genannte Proportion sehr nahe derjenigen kömmt, welche aus dem Ludolf'schen Verhältnisse folgt.

Anmerkung. Dieser Satz giebt folgende Construction eines mit einem gegebenen Kreise gleichflächigen Quadrates an die Hand:

Es seien BC, DE (Fig. 168) zwei rechtwinkelig sich schneidende Durchmesser; theile AC nach dem äußern und mittlern Verhältnisse in H; ziehe EC; so ist EC $= \sqrt{2}$; nimm AF $= \frac{1}{2}$ EC, also $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$; ziehe BF, welche $= \sqrt{1 + \frac{1}{2}}$, darauf FH und mit ihr $\|$ CJ, so ist BJ die Seite des gesuchten Quadrates und BJKL dieses Quadrat selbst.

Anhang zum fünften, sechsten und siebenten Buche.

---

425. Wird eine Gerade, welche mit einem ihrer Endpuncte im Umfange eines Kreises liegt, von einem Durchmesser desselben unter rechten Winkeln halbirt, so liegt auch ihr anderer Endpunct im Umkreise d. h. sie ist eine Sehne dieses Kreises.

426. Jede Gerade, welche den Halbirungspunct einer Sehne mit dem Halbirungspuncte eines der beiden zu ihr gehörigen Bogen verbindet, geht bei hinreichender Verlängerung durch den Mittelpunct des Kreises und durch den Halbirungspunct des andern zugehörigen Bogens.

427. Jede Gerade, welche die Halbirungspuncte zweier zu derselben Sehne gehörender Bogen verbindet, ist ein Durchmesser und halbirt die gemeinschaftliche Sehne unter rechten Winkeln.

428. Beschreibt man in einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck, halbirt die zu zwei Seiten gehörigen Bogen und verbindet diese Halbirungspuncte, so wird diese Gerade durch die beiden genannten Dreiecksseiten in drei gleiche Theile getheilt.

429. Fällt man aus den Endpuncten eines Kreisdurchmessers auf eine beliebige (verlängerte) Sehne zwei Senkrechte, so sind die zwischen den Fußpuncten der letztern und den Endpuncten der Sehne enthaltenen Segmente stets von gleicher Länge ($DF = EG$ Fig. 93).

Frage 1. Welchen Unterschied macht es für unsern Satz, ob die Sehne den Durchmesser schneidet oder nicht?

Frage 2. Gilt unser Satz auch dann noch, wenn die Sehne durch einen der Scheitel des Durchmessers geht?

Frage 3. Von welchem Satze des fünften Buches kann der vorstehende als eine Erweiterung angesehen werden?

430. Wenn von zwei Kreisbogen der eine das Zweifache des andern ist, so ist das Rechteck aus der Sehne des größern und dem Kreishalbmesser gleich dem Rechteck aus den Sehnen des kleinern Bogens und seines Supplementes d. h. des Bogens, der ihn zum halben Umkreise ergänzt ($AD_r BC = AB_r AE$ Fig. 94).

430[a]. Ist ein Kreis gegeben und man beschreibt zwei mit ihm concentrische von solcher Größe, daß die Summe der Quadrate ihrer Radien doppelt so groß als das Quadrat vom Halbmesser des gegebenen Kreises, so sind die Tangenten, die man an den innern Kreis zieht und bis zum Durchschnitt mit dem Umkreise des mittlern verlängert, von gleicher Größe mit den an den mittlern Kreis gezogenen und bis zur Peripherie des äußern verlängerten Tangenten.

431. Berühren sich zwei Kreise von innen, und errichtet man auf ihrer Axe d. h. der ihre Mittelpuncte verbindenden Geraden zwei oder mehrere Senkrechte so, daß jede beide Umkreise schneidet, so verhalten sich die Entfernungen dieser Durchschnittspuncte vom Berührungspunct bei der einen Senkrechten eben so wie bei der andern.

432. Das Quadrat der Seite des in einen Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist das Dreifache vom Quadrate des Kreishalbmessers.

433. Verbindet man einen beliebigen Punct im Umfange des um ein gleichseitiges Dreieck beschriebenen Kreises mit den Ecken des Dreiecks, so ist eine dieser drei Geraden so groß als die beiden andern zusammen.

Fig. 95. $DE = DA$.

434. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

435. Zieht man von einem der Durchschnittspuncte zweier sich schneidender Kreise aus in jedem derselben einen Durchmesser, so liegen die nicht gemeinschaftlichen Endpuncte derselben in gerader Linie mit dem andern Durchschnittspuncte.

Frage: In wiefern kann man vorstehenden Lehrsatz als eine Verallgemeinerung von dem Satze 262 im fünften Buche ansehn?

436. Der geometrische Ort für die Halbirungspuncte aller einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct habenden Sehnen ist die Peripherie des Kreises, welchen man über der zwischen dem genannten Durchschnittspuncte und dem Mittelpuncte des Urkreises enthaltenen Linie als Durchmesser beschreibt.

246 — 248.

437. Schneidet man auf der Sehne (AB Fig. 96) eines beliebigen Bogens von ihren Endpuncten aus zwei beliebige aber gleiche Stücke (AD, BE) ab, und errichtet in diesen Durchschnittspuncten Senkrechte, die man bis zum Durchschnitt mit dem Umkreise verlängert, so sind diese (DM, EN) von gleicher Länge.

250, 2.

438. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

439. Schneiden sich zwei beliebige Sehnen eines Kreises rechtwinkelig, so ist von den vier Bogen, in die sie den Umkreis theilen, die Summe zweier gegenüberliegender gleich der Summe der beiden andern.

440. Der Winkel, welchen zwei von einem Puncte außerhalb nach einem Kreise gezogene Schneidende mit einander bilden, ist gleich einem Peripheriewinkel, dessen zugehöriger Bogen gleich dem Unterschiede der beiden zwischen den genannten Geraden enthaltenen Bogen ist.

Fig. 97.

Frage 1. Bleibt unser Satz richtig, wenn eine der in Rede stehenden Geraden, oder beide aus Schneidenden sich in Berührende verwandeln?

Frage 2. Wie wird sich der Satz ändern, wenn die Geraden nicht außerhalb, sondern innerhalb des Kreises sich schneiden?

Frage 3. In welchen einzigen allgemeineren Satz lassen sich die beiden letzten Sätze (439 und 440) zusammenfassen?

441. Hat man mehrere gleiche Kreisbogen und auch einen von ihnen an Größe verschiedenen, und verbindet die Endpuncte eines jeden der erstern mit den Endpuncten des letztern so, daß alle diese Paare zusammengehöriger Linien zugleich innerhalb oder außerhalb des Kreises sich schneiden, so sind die Winkel, unter denen dieser Durchschnitt erfolgt, von gleicher Größe.

442. Der Durchschnittspunct jeder Winkelhalbirenden eines Dreiecks mit der im Halbirungspuncte der Gegenseite des halbirten Winkels errichteten Senkrechten liegt im Umfange des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

443. Nimmt man zwei Puncte, den einen (B Fig. 98) auf einem Kreishalbmesser (CA) selbst, den andern (D) auf dessen Verlängerung so, daß der Radius selbst die mittlere Proportionale zwischen den beiden durch die genannten Puncte bestimmten Linien (CB, CD), errichtet in dem erstern Puncte (B) eine Senkrechte, die man bis zum Durchschnitt mit dem Umkreis verlängert, und verbindet endlich diesen Durchschnittspunct (F) mit dem zweiten jener Puncte, so ist diese Gerade eine Tangente.

198.

444. Zweimalige Umkehrung des vorigen Satzes.

445. Beschreibt man zwei gleiche Kreise so, daß jeder durch den Mittelpunct des andern geht, und zieht in einem derselben eine beliebige Menge von Sehnen parallel mit der Axe (A. 431) beider Kreise, so wird jede derselben durch die Peripherie des andern Kreises in zwei Segmente getheilt, von denen das eine gleich dem Kreishalbmesser ist.

245, 4. — 245.

446. Wenn man in ein rechtwinkeliges Dreieck einen Halbkreis so beschreibt, daß er die Hypotenuse und eine Cathete berührt, sein Durchmesser aber in die Richtung der andern Cathete (AC Fig. 99) fällt, wenn man ferner die erste Cathete über die Hypotenuse hinaus um ihre eigne Länge verlängert, so liegt der Endpunct dieser Verlängerung, der Berührungspunct auf der Hypotenuse und der eine Endpunct des Durchmessers in gerader Linie.

A. 61, Zus. — 246.

447. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

448. Zieht man von einem beliebigen Puncte außerhalb eines Kreises zwei Tangenten an denselben und fällt auf die eine ein Perpendikel aus dem Berührungspuncte der andern, so ist das Stück desselben, zwischen dem Berührungspuncte und der Geraden, welche den genannten Punct außerhalb mit dem Mittelpuncte verbindet, gleich dem Kreishalbmesser.

Frage: In welchem besondern Falle muß der Durchschnittspunct unserer Senkrechten mit der Geraden, welche von dem Puncte außerhalb nach dem Mittelpuncte gezogen wird, auf der Peripherie des Kreises liegen?

449. Sind zwei Kreise concentrisch, und ist der Halbmesser des einen doppelt so groß als der des andern, so ist der Winkel, welchen Tangenten bilden, welche man von einem beliebigen Puncte des äußern Kreises an den innern zieht, gleich dem Winke im gleichseitigen Dreieck.

450. Umkehrung des vorigen Satzes.

450ª. Der geometrische Ort für die Durchschnittspuncte aller derjenigen Tangentenpaare, welche sich an einen gegebenen Kreis unter der Bedingung ziehen lassen, daß sie alle einen Winkel von vorgeschriebener Größe bilden, ist der Umfang eines mit dem gegebenen concentrischen Kreises.

450ᵇ. Wenn man zwei Puncte außerhalb eines Kreises so nimmt, daß die von ihnen aus an den Kreis gezogenen Tangentenpaare Winkel bilden, die sich supplementiren, so ist der Kreishalbmesser die mittlere Proportionale zwischen diesen Tangenten d. h. den Stücken derselben, welche zwischen dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte und dem Berührungspuncte enthalten sind.

Frage: Wie vereinfacht sich der Satz für den Fall, wo die Tangenten sich unter rechten Winkeln schneiden?

450ᶜ. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

451. Wenn man von einem der Endpuncte (A Fig. 100) der gemeinschaftlichen Sehne zwei gleicher sich schneidender Kreise einen beliebigen dritten beschreibt, welcher die beiden erstern schneidet, so liegen von den vier Durchschnittspuncten zwei Paare solcher, die zu verschiedenen Kreisen gehören (D und E, so wie F und G) mit dem andern Endpuncte der gemeinschaftlichen Sehne in gerader Linie.

244, 3.

Frage: Bleibt unser Satz noch richtig, wenn der dritte Kreis die beiden erstern von innen berührt?

452. Die Peripherie des über der gemeinschaftlichen Sehne (AB Fig. 101) zwei gleicher sich schneidender Kreise als Durchmesser beschriebenen Kreises ist der geometrische Ort für die Halbirungspuncte aller Geraden (wie DAE), welche durch einen der Endpuncte der gemeinschaftlichen Sehne gezogen und durch die beiderseitigen Umkreise begränzt werden.

453. Wenn man von dem Halbirungspuncte (C Fig. 102) der Axe (AB) zweier sich von außen berührender Kreise mit einem beliebigen Radius einen dritten Kreis beschreibt, und in demselben eine beliebige Sehne (GM) zieht, welche durch den Berührungspunct (K) geht, so sind die Stücke derselben (GH, ML), welche zwischen den Endpuncten und den Peripherien der beiden erstern Kreise enthalten sind, von gleicher Länge.

CD = CE.

454. Zieht man durch einen der Scheitel (A, B Fig. 103) eines Kreisdurchmessers beliebige Sehnen und verlängert sie bis zum Durchschnitt mit einer Geraden (JO), welche den verlängerten Durchmesser unter rechten Winkeln schneidet, so sind die Rechtecke, die man aus den einzelnen Sehnen und denjenigen ihrer Segmente bildet, welche zwischen dem Scheitel und der genannten Senkrechten enthalten sind, gleichflächig. ($AH_r AJ = AL_r AM$ und $BE_r BF = BG_r BD$).

246.

455. Wenn man in einem von zwei sich schneidenden Kreisen von den Durchschnittspuncten aus zwei Paare Sehnen (AG, BF, und AJ, BH Fig. 104) zieht, die sich auf der Peripherie des andern Kreises schneiden (in D und E), so sind die andern Endpuncte (F, G und H, J) beider Paare gleichweit von einander entfernt.

456. Theilt man die Sehne eines beliebigen Kreisbogens in drei gleiche Theile und errichtet in diesen Theilpuncten Senkrechte, die man bis zum Durchschnitt mit dem Bogen verlängert, so ist das mittlere der drei so entstandenen Bogenstücke kleiner als jedes der beiden äußern.

A. 437. — 245, Zus. 6.

457. Zieht man dagegen durch die Puncte der Sehne, in denen sie in drei gleiche Theile getheilt wird, zwei Radien, so wird durch sie der Bogen in drei Stücke getheilt, von denen das mittlere größer ist, als jedes der beiden äußern. Fig. 105.

47, Anm. — 245, Zus. 2.

458. Wird ein Kreis von einem andern, der durch seinen Mittelpunct geht, von innen berührt, und man zieht in dem größern den beliebigen Durchmesser DFCE (Fig 106), nimmt CG = CF und errichtet GH, so ist diese von gleicher Länge mit AF.

459. Wenn man über jeder Seite eines Dreiecks als Durchmesser einen Kreis beschreibt, an einen derselben in den Scheiteln seines Durchmessers Tangenten zieht, und dieselben bis zum zweiten Durchschnitt mit den Peripherien der beiden andern Kreise verlängert, so liegen diese Durchschnittspuncte stets mit der dritten Dreiecksspitze in gerader Linie.

460. Errichtet man auf einem der Halbmesser, die nach den Endpuncten eines beliebigen Bogens gehen, im Mittelpuncte des Kreises eine Senkrechte, und zwar nach der Seite hin, auf welcher für den genannten Radius der Bogen liegt, macht sie gleich der Sehne des Bogens, so ist deren Endpunct von dem Halbirungspuncte des Bogens um die Länge des Kreishalbmessers entfernt.

Fig. 107.

461. Beschreibt man um den größern zweier Kreise, die sich von innen berühren, und von denen der eine durch den Mittelpunct des andern geht, ein Quadrat, so ist (Fig. 106) FE = LM.

Frage: Wie würde unser Satz, unabhängig von einer Figur ausgedrückt, in seiner Thesis lauten?

462. Schneidet man von der Sehne AB (Fig. 108) eines beliebigen Bogens ein Stück BD ab, errichtet die Senkrechte DE, macht EF = EB, und DG = DB, so ist auch stets AF = AG.

Frage: Darf BD größer als die Hälfte von AB werden?

463. Wenn man von einem beliebigen Puncte (D Fig. 109) des zur Berührungssehne (AB) zweier beliebigen Tangenten gehörigen Bogens (ADB) mit den Tangenten selbst zwei Parallelen (DE, DF) nach der Berührungssehne zieht, so ist jede derselben die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern Segmenten (AE, FB) der Berührungssehne, die zwischen ihnen und ihren parallelen Tangenten enthalten sind.

247.

Frage: In wiefern kann man diesen Satz als eine Verallgemeinerung von dem Satze 252 im fünften Buche betrachten?

464. Schneidet man auf einem Durchmesser von einem seiner Scheitel aus drei solche Stücke ab, daß das eine die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern ist, errichtet in diesen Durchschnittspuncten Senkrechte und verbindet die Durchschnitte zwischen ihnen und der Peripherie mit eben jenem Scheitel des Durchmessers, so ist auch von diesen drei Geraden die eine die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern.

465. Nimmt man auf einem Kreisdurchmesser (AB Fig. 110) zwei Puncte, D, E so, daß AE die mittlere Proportionale zwischen AD und AB, beschreibt über AD und AE als Durchmessern Halbkreise, errichtet die Senkrechte DFG, und verbindet endlich F und G mit A, so ist AF die mittlere Proportionale zwischen AD und AG.

466. Zieht man in einem Kreise (AEBM Fig. 111) eine beliebige Sehne AB, und beschreibt von dem Halbirungspuncte (C) eines der beiden zugehörigen Bogen ACB einen zweiten Kreis (ANDB), der AB auch zur Sehne hat, so ist von jeder Geraden, welche von einem der Endpuncte der gemeinschaftlichen Sehne aus gezogen, beide Umkreise zum zweitenmal schneidet, das Stück (DE) zwischen diesen Durchschnittspuncten gleich der Entfernung des Durchschnittspunctes (E) eben dieser Geraden mit der Peripherie des ersten Kreises von dem andern Endpuncte (B) der gemeinschaftlichen Sehne.

38. — 244.

Zus. 1. Die an den ersten Kreis in A oder B gezogene Tangente, verlängert bis zum Durchschnitt mit der Peripherie des zweiten Kreises ist gleich der gemeinschaftlichen Sehne.

Zus. 2. Die an den zweiten Kreis in einem der Durchschnittspuncte mit dem ersten gezogene Tangente, geht durch den Halbirungspunct eines der Bogen, in welche der erste Kreis durch die gemeinschaftliche Sehne getheilt wird.

Zus. 3. Unter allen Dreiecken, die über derselben Grundlinie beschrieben sind, und in denen die Gegenwinkel der Grundlinie von gleicher Größe sind, hat das gleichschenkelige den größten Umfang.

250, Z. 1.

467. Theilt man den Durchmesser (AB Fig. 112) eines Halbkreises in zwei beliebige Stücke AK, KB, beschreibt über jedem derselben als Durchmesser einen neuen Halbkreis, errichtet in dem Theilpuncte K die Senkrechte KD und verbindet D mit A

und B, so ist das Verhältniß der Linien AE und BF das dreifach Hohe des Verhältnisses von AD und BD.

468. Nimmt man auf der Tangente BE (Fig. 113), welche einen Halbkreis AFB in dem einen Scheitel B seines Durchmessers berührt, einen beliebigen Punct C, beschreibt von ihm als Mittelpunct mit seiner Entfernung von dem genannten Scheitel als Radius einen Kreis, zieht von dem andern Scheitel A eine Gerade ACD durch seinen Mittelpunct, und nimmt AE gleich AD, so ist auch stets AG von gleicher Länge mit AF.

259.

Frage: Ist die Länge des Halbmessers CB völlig und unbedingt beliebig, oder ist man dabei an bestimmte Gränzen gebunden?

469. Berühren sich zwei Kreise von innen und man zieht in dem größern eine Sehne DE (Fig. 114), welche den kleinern berührt, und verbindet sowohl deren Endpuncte als den Berührungspunct mit dem Berührungspuncte beider Kreise, so wird der von den beiden erstern Linien gebildete Winkel (DAE) durch die letztere (AF) halbirt.

247. — 244, 3. 4.

Frage: Wie ändert sich unser Satz, wenn die Kreise sich nicht von innen, sondern von außen berühren?

470. Halbirt man eines der Segmente CD (Fig. 115), in welche die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks durch ihr Höhenperpendikel getheilt wird in E, und beschreibt von B aus mit BE als Radius einen Kreisbogen EFM, so ist AF = DE = CE.

87. — 74, 3. 3. — 87, 3. 1.

471. In jedem rechtwinkeligen Dreieck verhält sich das Quadrat der Linie (CG Fig. 116), welche einen seiner spitzen Winkel halbirt, zum Quadrat der an diesem Winkel anliegenden Cathete (CB), wie die Hypotenuse zur halben Summe von Hypotenuse und eben dieser Cathete.

244.

472. Beschreibt man über der gemeinschaftlichen Sehne CD (Fig. 119ª) zwei sich schneidender ungleicher Kreise als Durchmesser einen dritten Kreis, zieht an diesen in einem der Scheitel D dieses Durchmessers eine Tangente ADB und von dem andern Scheitel aus eine beliebige Schneidende CEFG, so ist EF : FG = AD : DB.

△ DFG ∾ △ DCB. — △ DFE ∾ △ ACD.

473. Haben drei Kreise eine gemeinschaftliche Sehne AB (Fig. 117) und zieht man von einem Endpuncte derselben ein Paar beliebige Gerade AFEC und AHGD, welche alle drei Kreise schneiden, so sind die Segmente HG, GD der einen Linie denen der andern FE, EC proportionirt.

251. — 153.

Frage: In welchem Zusammenhange steht dieser Satz mit dem vorhergehenden?

474. Verbindet man die Puncte (D, E, F, G, H Fig. 118), in denen ein Kreisbogen in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt wird, mit einem seiner Endpuncte, so verhält sich die kleinste (AD) dieser Linien zur nächstfolgenden (AE), wie irgend eine der übrigen (AH) zur Summe ihrer Vorgängerin und Nachfolgerin (AG + AB).

△ BHJ ≅ △ AGH. — △ AHJ ∾ △ ADE.

475. Ist ein Kreisbogen AB (Fig. 118) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt und man verbindet den zweiten der Theilpuncte (E) mit dem letzten (H), verlängert diese Gerade bis sie die verlängerte Sehne schneidet, so ist diese Verlängerung (HJ) gleich der Sehne (AH), welche den letzten Theilpunct (H) mit dem Anfangspuncte des Bogens verbindet.

A. 440.

476. Allgemein, verbindet man den 2nten Theilpunct vom ersten an mit dem nten vom letzten an gerechnet, und verlängert die Verbindende bis sie die verlängerte Sehne schneidet, so ist die Verlängerung jener gleich der Sehne, welche den nten Theilpunct vom letzten an mit dem Anfangspuncte des Bogens verbindet.

477. Ist ein Kreisbogen in 3n gleiche Theile getheilt und zieht man an den 2nten Theilpunct vom ersten an eine Tangente, die man bis zum Durchschnitt mit der verlängerten Sehne verlängert, so ist dieselbe von gleicher Länge mit der Sehne, welche eben diesen 2nten Theilpunct mit dem Anfangspuncte des Bogens verbindet.

478. Hat man in einer Ebene zwei beliebige aber gleiche Kreise, und zieht eine sie schneidende Gerade parallel mit ihrer Axe, so ist jedes Stück derselben, welches zwischen zwei sich entsprechenden (d. h. solchen, die weder die kleinste noch die größte Ent-

fernung von einander haben) Durchschnittspuncten mit den Kreisperipherieen enthalten ist, gleich der Entfernung der beiden Mittelpuncte.

479. Wenn in einem Kreisvierecke eine Diagonale verlängert durch den Durchschnittspunct der Tangenten geht, welche man an die Endpuncte der andern Diagonale zieht, so verhalten sich die Quadrate zwei von derselben Ecke auslaufender Umfangsseiten, wie die anliegenden Segmente der ihre nicht gemeinschaftlichen Endpuncte verbindenden Diagonale.

480. Beschreibt man um jedes der vier Dreiecke, in welche ein Viereck durch seine beiden Diagonalen getheilt wird, einen Kreis, so bilden die Mittelpuncte derselben die Ecken eines Parallelogramms.

Zus. 1. Die Winkel dieses Parallelogramms sind denen gleich, unter welchen sich die beiden Diagonalen schneiden.

Zus. 2. Die Durchschnittspuncte der Seiten unseres Parallelogramms mit den Diagonalen des Urvierecks bilden die Ecken eines dem Urvierecke ähnlichen Vierecks, das viermal so klein als jenes ist.

481. Ist das in Rede stehende Viereck des vorigen Satzes ein Kreisviereck und man verbindet den Mittelpunct seines Kreises mit den Mittelpuncten der um die Diagonaldreiecke beschriebenen, so wird dadurch das vorhin näher bezeichnete Parallelogramm in vier Dreiecke zerlegt, welche einzeln den vier Dreiecken ähnlich sind, die je zwei Umfangsseiten und eine Diagonale des Urvierecks zu Seiten haben.

482. Vier Dreiecke, die denen, von welchen der vorige Satz handelt, einzeln congruent sind, erhält man dadurch, daß man den Durchschnittspunct der Diagonalen des Urvierecks mit den Ecken des mehrerwähnten Parallelogramms verbindet.

483. Die Kreise, welche sich um die acht Dreiecke, von denen die beiden vorhergehenden Sätze handeln, beschreiben lassen, sind alle unter einander gleich.

A. 481. — A. 375.

484. Jeder der vier Kreise, welche man um die in 481 näher bezeichneten Dreiecke beschreibt, geht durch eine der Ecken des Urvierecks.

244. — 244, Z. 3. —

485. Die Mittelpuncte dieser vier Kreise bilden die Ecken eines Kreisvierecks.

Anmerkung. Dasselbe gilt von den Mittelpuncten der um die andere Quaternion von Dreiecken (482) beschriebenen Kreise.

486. Der Mittelpunct des Kreises, den man um das im vorigen Satze näher bezeichnete Kreisviereck beschreibt, fällt mit dem Mittelpuncte des Kreises um das Urviereck zusammen.

487. Die Seiten des in 485 näher bezeichneten Kreisvierecks sind parallel den Seiten des Urvierecks, seine Diagonalen aber parallel mit den Seiten des Parallelogramms, dessen Ecken die Mittelpuncte der um die vier Diagonaldreiecke des Urvierecks beschriebenen Kreise sind.

488. Hat man ein beliebiges Kreisviereck (ABCD Fig. 132) und fällt in jedem der vier Dreiecke (ABC, ABD, ACD, BCD), die je zwei Seiten des Urvierecks und eine seiner Diagonalen zu Seiten haben, die Höhenperpendikel, so bilden die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte (E, F, G, H) dieser vier Ternionen von Linien die Ecken eines Vierecks, welches dem Urvierecke congruent ist; also auch ein Kreisviereck ist, dessen Kreis dem um das Urviereck gleich ist.

ABGH, AEDH, EFCD, BFCG sind Kreisvierecke, und darum ABFE, CDHG, BCEH, ADFG Parallelogramme.

489. Wenn man aus den drei Ecken eines Dreiecks als Mittelpuncten drei Kreise so beschreibt, daß jeder die beiden andern von außen berührt, und darauf auch aus jeder Ecke einen Kreis, der die beiden der ersten Ternion, welche von den beiden andern Ecken aus beschrieben sind, von innen berührt, so sind die zu dieser letztern Ternion gehörigen Kreise von gleicher Größe.

Frage: Durch welche einfache Construction lassen sich die Halbmesser der zur ersten Ternion gehörigen Kreise für jedes gegebene Dreieck finden?

490. Sind in einem Kreisvierecke zwei Gegenwinkel rechte, so ist die Summe der Quadrate der vier Diagonalstücke gleich dem Quadrate des Durchmessers vermehrt um das Quadrat des Unterschiedes von den Segmenten derjenigen Diagonale, welche die Spitzen der rechten Winkel verbindet.

491. Zieht man in einem Kreise zwei beliebige Sehnen so, daß sie sich unter rechten Winkeln schneiden, und beschreibt über den vier Segmenten dieser Linien als Durchmessern Kreise, so sind diese zusammen so groß als der Urkreis.

492. Zieht man von einem beliebigen Puncte (A Fig. 133) außerhalb eines Kreises eine Gerade (AK) so, daß sie einen verlängerten Durchmesser (DGK) rechtwinkelig schneidet, so ist das Quadrat dieser Linie kleiner als das Rechteck aus den Segmenten (AE, AB) einer beliebigen von eben diesem Puncte nach dem Kreise gezogenen Schneidenden (AEB) und zwar um das Rechteck aus den Segmenten (GK, DK) des Durchmessers, die zwischen seinen Scheiteln und dem Fußpuncte der Senkrechten liegen.

Frage 1. Wie ändert sich der Satz, wenn die Senkrechte nicht die Verlängerung des Durchmessers, sondern diesen selbst trifft?

Frage 2. Von welchem Satze des fünften Buches kann der vorstehende als eine Erweiterung angesehen werden?

493. Zieht man sowohl an die beiden Scheitel des Durchmessers eines beliebigen Halbkreises als auch an einen beliebigen dritten Punct Tangenten, und verbindet ihre Durchschnittspuncte (D, E Fig. 119) mit dem Mittelpuncte, so stehen diese beiden Geraden senkrecht auf einander.

494. Verbindet man dagegen (unter den im vorigen Satze gemachten Voraussetzungen) die Durchschnittspuncte (D, E) unserer Tangenten mit den Scheiteln des Durchmessers, so liegt der Durchschnittspunct (L) dieser beiden Linien immer auf der Geraden (FK), welche man durch den Berührungspunct (F) der dritten Tangente parallel mit den beiden erstern zieht.

Zus. Die Gerade FK wird in dem genannten Puncte L halbirt.

T. 446.

495. Bleibt Alles wie bei den beiden vorigen Sätzen, so ist das Rechteck aus den beiden Stücken (EF, FD Fig. 119), in welche die dritte Tangente (DE) im Berührungspuncte getheilt wird, eine unveränderliche Größe, wo auch zwischen A und B der Punct F genommen werden möge.

496. Die Peripherien aller Kreise, deren Durchmesser solche Stücke von den an einen andern Kreis gezogenen Tangenten sind, welche zwischen zwei parallelen Tangenten eben dieses Kreises liegen, haben immer einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Zus. Dieser Durchschnittspunct ist der Mittelpunct des erstern Kreises.

497. Wenn in einem Kreisviereck eine der Diagonalen verlängert durch den Durchschnittspunct der beiden Tangenten geht, welche man an die Endpuncte der andern Diagonale zieht, oder mit diesen Tangenten parallel läuft, so sind die Rechtecke aus je zwei Gegenseiten gleich.

259.

Frage 1. Ist es gleichgültig, welche der beiden Diagonalen es ist, der die im Satze angegebene Eigenschaft zukommt?

Frage 2. In welchem Falle wird die eine Diagonale den an die Endpuncte der andern gezogenen Tangenten parallel laufen?

Zus. Daher ist in einem solchen Kreisvierecke das Rechteck aus einem Paare Gegenseiten halb so groß, als das Rechteck aus den Diagonalen.

498. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

499. Zieht man vom Mittelpuncte eines Kreises nach einem beliebigen Puncte einer Sehne eine Gerade, so ist das Quadrat derselben und das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Sehne zusammen so groß als das Quadrat des Radius.

Frage: Ob der Satz auch noch wahr bleibt, wenn man den Punct auf der Verlängerung einer Sehne nimmt?

Zus. Verbindet man daher beliebige Puncte beliebiger Sehnen mit dem Centro, so ist das Quadrat jeder dieser Verbindenden vermehrt um das Rechteck aus den zugehörigen Sehnenstücken von unveränderlicher Größe, wie auch die Sehnen und die auf ihnen genommenen Puncte sich von einander unterscheiden mögen.

500. Verlängert man die Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks über ihre Fußpuncte hinaus um die Länge ihrer untern Abschnitte, so liegen die Endpuncte dieser Verlängerungen im Umfange des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

Frage: Gilt unser Satz auch für recht= und stumpfwinkelige Dreiecke?

501. Zieht man von dem einen Endpuncte (A Fig. 120) einer beliebigen Sehne (AB) einen Durchmesser und fällt auf diesen aus dem andern Endpuncte (B) der Sehne eine Senkrechte, so ist die Sehne die mittlere Proportionale zwischen jeder beliebigen andern Sehne (AE), die von jenem ersten Endpuncte ausläuft, und dem Stück (AG) derselben, das zwischen eben diesem Endpuncte und jener Senkrechten liegt.

502. Halbirt man die sechs Winkel, welche die drei Paare zugeordneter Seiten

eines Kreisvierecks bilden, so erhält man in den Halbirenden zwei Ternionen von Parallellinien.

A. 440.

503. Ist der Umfang eines Kreises in eine beliebige gerade Anzahl gleicher Theile getheilt, und man verbindet ein Paar gegenüberliegender Theilpuncte mittelst eines Durchmessers, von den übrigen Theilpuncten aber je zwei solche, welche gleich weit von demselben Scheitel dieses Durchmessers entfernt sind, durch Sehnen, so verhält sich der Durchmesser zur Summe aller dieser Sehnen, wie die beiden Sehnen (AD, AF Fig. 121) zu einander, welche man von einem Scheitel des Durchmessers nach dem nächsten und nach fernsten Theilpuncte zieht.

196.

504. Zieht man von einem der Durchschnittspuncte (A Fig. 122) zweier sich schneidender Kreise in jedem derselben eine Sehne (AB, AD) so, daß ein Stück derselben (AE, AF) Sehne des andern Kreises ist, so verhalten sich die beiden übrigen Stücke (EB, FD) wie die beiden Sehnen (GE, GD) des einen oder des andern Kreises (GB, GF), die von dem andern Durchschnittspuncte (G) nach den Endpuncten der vorher genannten Sehnen gezogen werden.

505. In jedem spitzwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat jeder Seite vermehrt um das Quadrat vom obern Abschnitte des zu ihr gehörigen Höhenperpendikels gleich dem Quadrate des Durchmessers des um das Dreieck beschriebenen Kreises. — Fig. 123.

Frage: Gilt unser Satz auch für recht- und stumpfwinkelige Dreiecke?

506. Die durch die Halbirungspuncte der obern Abschnitte der Winkelhalbirenden eines Dreiecks gezogenen Senkrechten bilden bei hinreichender Verlängerung ein Dreieck, dessen äußerer (d. h. um dasselbe beschriebener) Kreis von gleicher Größe mit dem Kreise um das Urdreieck ist.

507. Die Gerade, welche den Halbirungspunct einer Seite eines Dreiecks mit dem Halbirungspuncte des obern Abschnittes von dem zu dieser Seite gehörigen Höhenperpendikel verbindet, ist gleich dem Halbmesser des äußern Kreises.

Frage: Von welcher bekannten Eigenschaft des rechtwinkeligen Dreiecks kann dieser Satz als eine Verallgemeinerung betrachtet werden?

508. Die drei Kreise, die so beschaffen, daß die Kreislinie eines jeden durch zwei Ecken und den Höhendurchschnitt desselben Dreiecks geht, sind unter einander und dem um das Dreieck beschriebenen Kreise gleich.

509. Zieht man von einem Puncte (A Fig. 124) außerhalb eines Kreises an denselben zwei Berührende und zwei Schneidende, von denen die eine durch den Mittelpunct geht, und verbindet den Durchschnittspunct (H) zwischen dieser und der Berührungssehne (BD) mit den Puncten (F, G), in denen die andere Schneidende (AF) dem Umkreise begegnet, so wird der von diesen beiden Geraden gebildete Winkel (FHG) durch die Berührungssehne halbirt.

260.

510. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze, so ist auch das Rechteck aus den beiden Geraden, welche den Halbirungspunct der Mittelsehne mit den Durchschnittspuncten der andern Schneidenden verbinden, gleich dem Quadrate der halben Mittelsehne.

511. Zieht man in einem Kreise einen seiner Durchmesser und von einem beliebigen Puncte desselben, der nicht der Mittelpunct ist, nach dem Umkreise Linienpaare, so daß jedes zusammengehörige Paar in demselben Halbkreise liegt und mit dem Durchmesser gleiche Winkel bildet, so haben die Geraden, welche die Endpuncte dieser Linienpaare verbinden, bei hinreichender Verlängerung stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Fig. 124.

512. Bleibt Alles wie bei den drei vorhergehenden Sätzen und man zieht noch die Halbmesser (CF, CG) nach den Durchschnittspuncten (F, G) der zweiten Schneidenden, so bilden diese mit den von eben diesen Puncten nach dem Halbirungspuncte der Berührungssehne gezogenen Geraden Winkel (CFH, CGH), die nicht nur unter einander, sondern auch dem Winkel (FAE) gleich sind, welchen die beiden Schneidenden mit einander machen.

513. Zieht man durch den Halbirungspunct (H Fig. 124) eines Halbmessers (CL) eine Sehne (BD) unter rechten Winkeln, an deren Endpuncte Tangenten, die man bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, und von diesem Durchschnittspuncte (A) eine beliebige den Kreis schneidende Gerade (AF), so ist das innerhalb des Kreises liegende

Stück derselben (FG) doppelt so groß als der Unterschied der beiden Geraden (FH, GH), welche die Endpuncte dieses Stücks mit dem Halbirungspuncte des Halbmessers verbinden.

Anmerkung. Der Satz läßt sich verallgemeinern.

514. Zieht man durch den Halbirungspunct (D Fig. 125) einer Sehne (AB) eine zweite (EF), die nicht senkrecht auf ihr steht, und an die Endpuncte dieser zweiten Tangenten, so sind die durch diese letztern begränzten Verlängerungen (AG, BH) der ersten Sehne von gleicher Länge.

515. Verbindet man die Fußpuncte der Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks und beschreibt um das so entstandene Dreieck einen Kreis, so geht dessen Umkreis durch die Halbirungspuncte der Seiten des Urdreiecks. Fig. 126.

256. — 196.

516. Die Peripherie des im vorigen Satze genannten Kreises geht auch durch die Halbirungspuncte der obern Abschnitte von den Höhenperpendikeln des Urdreiecks.

△ LFG gleichschenkelig. (Fig. 126).

517. Der Halbmesser des genannten Kreises ist halb so groß als der Radius vom äußern Kreise des Urdreiecks.

A. 507.

518. Fällt man in einem spitzwinkeligen Dreiecke die Höhenperpendikel, verbindet deren Fußpuncte, und beschreibt um jedes der vier Dreiecke, in welche dadurch das Urdreieck zerlegt wird, einen Kreis, so liegen die Mittelpuncte der drei zu den äußern Dreiecken gehörigen Kreise in der Peripherie des Kreises, der um das mittlere beschrieben ist.

519. Der Mittelpunct (O Fig. 126) des Kreises, dessen Peripherie durch die Fußpuncte der Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks geht, liegt mit dem Mittelpuncte des zu letzterem gehörigen äußern Kreises (M) und dessen Höhendurchschnitt (G) in einer geraden Linie und zwar in gleicher Entfernung von ihnen.

61.

520. Ist in einem Dreiecke (ABC Fig. 127) das Quadrat einer Seite (AC) gleich dem Quadrate einer zweiten (BC) vermehrt um das Rechteck aus eben dieser zweiten und der dritten, so ist der von der ersten und dritten Seite eingeschlossene Winkel (BAC) dreimal so klein als der der dritten Seite gegenüberliegende Außenwinkel (BCD).

BF ⊥ EG. — △ CHB gleichschenkelig.

521. Zieht man von einem der Scheitel (A) eines Kreisdurchmessers (AB Fig. 128) ein Paar beliebiger Sehnen (AD, AE), verbindet ihre Endpuncte, verlängert diese Gerade bis zum Durchschnitt mit der an den andern Scheitel (B) des genannten Durchmessers gezogenen Tangente (in F) und zieht von diesem Puncte (F) eine Gerade durch den Mittelpunct, so sind die Stücke (CJ, CK) derselben, welche zwischen dem Mittelpuncte und den beiden zuerst genannten Sehnen liegen, von gleicher Länge.

EO ∥ FG — CL ⊥ DE. — BLME Kreisviereck.

522. Die Fußpuncte der drei Senkrechten, die man aus einem beliebigen Puncte der Peripherie des um ein Dreieck beschriebenen Kreises auf dessen Seiten fällt, liegen in einer geraden Linie.

Anmerkung. Der Satz läßt sich mehrfach erweitern.

S. Gergonne Annal. de M. XIV, p. 280 sqq., und Crelle Journal 1, p. 51 sqq.

523. Fällt man aus einer der Spitzen (D Fig. 129) eines Kreisvierecks, in welchem sich die Diagonalen unter rechten Winkeln schneiden, auf die von der Gegenecke (B) auslaufenden Seiten Senkrechte, so liegen nicht nur deren Fußpuncte mit dem Durchschnittspunct der Diagonalen in einer geraden Linie, sondern es sind auch die zwischen den Diagonalen enthaltenen Stücke dieser Senkrechten einzeln gleich denjenigen Vierecksseiten, mit denen sie zwar von demselben Endpuncte der Diagonale auslaufen, aber auf verschiedenen Seiten derselben liegen (DH = DC, DJ = DA).

524. Wenn von zwei Sehnen (AD, AH Fig. 130), die beide von demselben Puncte (A) auslaufen, die eine (AH) den Supplementarbogen (DHB) der andern (AD) halbirt, so ist sie die mittlere Proportionale zwischen dem um die andere Sehne (AD) verlängerten Durchmesser und zwischen dem Radius.

Zus. Es ist $BH_q = BC_r(BA - AD)$.

525. Schneidet man auf den beiderseitigen Verlängerungen eines Kreisdurchmessers zwei Stücke (EB, FD Fig. 131) von beliebiger aber gleicher Länge ab, zieht von einem der Durchschnittspuncte eine Tangente (BA), fällt aus dem Berührungspuncte eine Senkrechte (AG) auf den Durchmesser, und nimmmt CH = CG, so ist für jeden beliebigen Punct (J) im Umkreise das Verhältniß seiner Entfernungen von dem einen

Paare (B, D) der vier Puncte (B, D, G, H) gleich dem Verhältnisse der Entfernungen vom andern Paare (G, H).

526. Schneiden sich in einem Kreisvierecke zwei zugeordnete Seiten unter rechten Winkeln, so liegt dieser Durchschnittspunct mit dem Mittelpuncte des Kreises und dem Mittelpuncte der mittlern Entfernungen (A. 325) in einer geraden Linie und zwar der letztere in gleicher Entfernung von den beiden andern.

Frage: Läßt sich der Satz umkehren?

527. Schneiden sich in einem Kreisvierecke ein Paar zugeordneter Seiten unter rechten Winkeln, so ist die Entfernung dieses ihres Durchschnittspunctes vom Mittelpuncte des umschriebenen Kreises gleich der Entfernung der Halbirungspuncte dieses Seitenpaares von einander.

528. Haben zwei Kreise eine solche gegenseitige Lage, daß die Peripherie eines von ihnen durch den Mittelpunct des andern geht, und man zieht eine Gerade (ADEB Fig. 134) so, daß sie beide Kreise schneidet und parallel mit deren Axe ist, so hat die Summe der beiden Segmente (AD, BE), welche nicht beiden Kreisen zugleich angehören, eine constante Größe — sie ist dem Durchmesser des Kreises gleich, dessen Peripherie durch den Mittelpunct des andern Kreises geht.

Frage: Von welchem frühern Satze dieses Anhanges kann der vorstehende als eine Erweiterung angesehen werden?

529. Schneiden sich zwei Kreise und werden beide von einer dritten Geraden (DEFGH Fig. 135) geschnitten, so sind die vier Segmente (DE, EF, FG, GH), in welche diese Linie in ihren Durchschnittspuncten mit den Peripherieen beider Kreise und deren gemeinschaftlicher Sehne getheilt wird, immer so beschaffen, daß das Rechteck aus dem ersten und dritten gleich ist dem Rechteck aus dem zweiten und vierten ($DE_rFG = EF_rGH$).

530. Zieht man in einem Kreise (ADBK Fig. 136) eine beliebige Sehne (AB), und beschreibt von dem Halbirungspuncte (K) eines der zu ihr gehörigen Bogen (AEB) einen zweiten Kreis, der die gezogene Sehne mit dem erstern gemeinschaftlich hat, so ist derjenige Bogen (AJOB) dieses zweiten Kreises, welcher nicht auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Sehne mit dem Mittelpuncte liegt, der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller innern Kreise für die Dreiecke, welche in dem Abschnitt (ADSBA) des ersten Kreises stehen, der nicht den Mittelpunct des zweiten enthält.

A. 466.

531. Zieht man in dem um ein Dreieck beschriebenen Kreise eine Sehne durch den Mittelpunct (O) des innern Kreises, so ist das Rechteck aus den beiden Segmenten, in welche dieser Punct die Sehne theilt, doppelt so groß als das Rechteck aus den Halbmessern der genannten Kreise. Fig. 136[a].

Bew. $DG_rDK = DA_rDO$, oder $DG_rKH + DG_rDH = DO_rOA + DO_q$; aber $DO_q = DB_q$ (A. 530) $= DG_rDH$ (87, Zus. 1) also $DG_rKH = DO_rOA$.

Zus. 1. Daher ist, wenn d die Entfernung der Mittelpuncte beider Kreise, R den Radius des äußern, r den des innern Kreises bezeichnet, $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Bew. $OM_q + AO_rOD = AM_q$ (A. 499), also $d^2 = R^2 - AO . OD = R^2 - 2Rr$.

Zus. 2. Daher ist bei jedem Dreiecke, in welchem die Mittelpuncte des äußern und innern Kreises nicht zusammenfallen, der Halbmesser des äußern größer als der Durchmesser des innern.

532. Erklärung. Es ist bekannt und folgt unmittelbar aus Sätzen, die im Anhange zum ersten Buche abgehandelt worden sind, daß für jedes Dreieck sich vier Kreise construiren lassen, von denen jeder alle drei Seiten des Dreiecks berührt. Einer derselben liegt immer ganz innerhalb des Dreiecks, er soll daher innerer Berührungskreis oder auch schlechthin innerer Kreis genannt werden; die drei übrigen liegen ganz außerhalb des Dreiecks, und führen daher mit Recht den Namen äußerer Berührungskreise; jeder derselben berührt nur eine Dreiecksseite selbst, die übrigen in ihren Verlängerungen, wir wollen ihn daher künftig den jener ersten Seite zugehörigen äußern Berührungskreis nennen.

533. Zieht man in einem Kreise (AKBD Fig. 136) eine beliebige Sehne (AB), beschreibt von dem Halbirungspuncte (K) eines der zu ihr gehörigen Bogen (AKB) als Mittelpunct einen zweiten Kreis, der mit dem erstern die gezogene Sehne gemeinschaftlich hat, so ist derjenige Bogen (ACFB) dieses zweiten Kreises, welcher mit dem Mit-

telpuncte auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Sehne liegt, der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller derjenigen äußern Berührungskreise, die zu Dreiecken gehören, welche in dem Abschnitte (ADSBA) des ersten Kreises stehen, der den Mittelpunct des zweiten nicht enthält, und zwar die der gemeinschaftlichen Seite (AB) zugehörigen äußern Berührungskreise (A. 532) sind.

W. CAO = 90° ɪc.

534. Zieht man von dem Mittelpuncte eines der äußern Berührungskreise eines Dreiecks eine Schneidende an den um das Dreieck beschriebenen Kreis, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie und ihrem äußern Segemente doppelt so groß als das Rechteck aus den Halbmessern der genannten Kreise.

Bew. Ganz ähnlich dem für A. 531.

Zus. Daher ist, wenn d' die Entfernung beider Mittelpuncte, und R den Radius des umschriebenen, r' aber den des äußern Berührungskreises bezeichnet: $d'^2 = R^2 + 2R \cdot r'$.

Bew. Ganz ähnlich dem für A. 531, Zus. 1.

535. Beschreibt man in denselben Kreisabschnitt eine beliebige Menge von Dreiecken, und für jedes derselben sowohl seinen innern als den der gemeinschaftlichen Seite zugehörigen äußern Berührungskreis, so ist die Entfernung der beiden Mittelpuncte für alle diese zusammengehörigen Kreispaare eine constante Größe.

Fig. 136.

536. Der Berührungspunct des innern Kreises eines Dreiecks mit einer der Seiten, und der Berührungspunct des eben dieser Seite zugehörigen äußern Berührungskreises mit ihr sind gleich weit von den Endpuncten dieser Seite entfernt. —

Fig. 136. UZ = ZO.

537. Die vier Mittelpuncte der Berührungskreise jedes Dreiecks haben eine solche gegenseitige Lage, daß das Quadrat der Entfernung irgend zweier von einander vermehrt um das Quadrat der Entfernung der beiden andern eine constante Größe ist — nämlich gleich dem Quadrate vom doppelten Durchmesser des dem Dreieck zugehörigen äußern Kreises.

A. 505. — A. 517.

538. Hat man ein beliebiges Dreieck und beschreibt drei Kreise so, daß jeder durch zwei seiner Ecken und den Mittelpunct seines innern Kreises geht, so

1) liegen die Mittelpuncte derselben im Umfange des zum Dreiecke gehörigen äußern Kreises;
2) die Quadrate der drei Halbmesser zusammen sind gleichflächig dem Rechtecke, aus dem Radius des äußern Kreises und dem Ueberschuß der Summe der Halbmesser der drei äußern Berührungskreise über das Dreifache vom Halbmesser des innern.

Der erste Theil unseres Satzes folgt unmittelbar aus A. 506. — Der zweite läßt sich herleiten aus 93, angewandt auf Dr. CMO (Fig. 136) und auf die beiden entsprechenden Dreiecke für die beiden andern Kreise, verbunden mit A. 531 und A. 534.

539. Verbindet man den Mittelpunct des innern Kreises eines Dreiecks mit dem Berührungspuncte einer der Seiten und verlängert diese Gerade über den letztern Punct hinaus, bis sie zum zweitenmal die Peripherie des Kreises schneidet, welcher durch die Endpuncte der genannten Seite und den genannten Mittelpunct geht, so ist diese Verlängerung gleich dem Halbmesser des eben dieser Seite zugehörigen äußern Berührungskreises.

A. 536.

540. Zieht man in den drei äußern Berührungskreisen eines Dreiecks die Halbmesser nach den Berührungspuncten der ihnen zugehörigen Seiten, so schneiden sich dieselben bei hinreichender Verlängerung in einem und demselben Puncte, in demjenigen nämlich, der gleich weit von den drei genannten Mittelpuncten entfernt ist.

FO = GE (Fig. 137) — A. 72.

541. Jedes Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks wird in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte mit den beiden andern in zwei solche Segmente getheilt, daß das Rechteck aus ihnen doppelt so groß ist, als das Rechteck aus dem Halbmesser des äußern Kreises und dem Halbmesser des Kreises, der in das durch die Fußpuncte der genannten Höhenperpendikel bestimmte Dreieck beschrieben wird.

Fig. 138. △ DOK ∾ △ BCG. — GC = DO.

542. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Summe der Catheten um den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises größer als die Hypotenuse.

543. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist,
1) der Halbmesser des einer Cathete zugehörigen äußern Berührungskreises kleiner als die Cathete selbst und zwar um den Halbmesser des innern Kreises;
2) dagegen ist der Radius des der Hypotenuse zugehörigen äußern Berührungskreises um eben diesen innern Halbmesser größer als die Hypotenuse selbst, und daher
3) der Radius des der Hypotenuse zugehörigen äußern Berührungskreises so groß als die Halbmesser der drei übrigen Berührungskreise zusammen.

544. Ist ein in einen Kreis beschriebenes Sechseck so beschaffen, daß eine der Diagonalen, welche zwei Gegenecken verbinden, mit den ihr gegenüberliegenden Gegenseiten einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct hat, so liegen folgende Durchschnittspuncte in gerader Linie:
1) von den beiden übrigen Diagonalen, welche Gegenecken verbinden;
2) von je zwei solchen Diagonalen, die von den Endpuncten der in Rede stehenden auslaufen und auf derselben Seite derselben liegen;
3) von je zwei Seiten, die von den Endpuncten der in Rede stehenden Diagonale auslaufen und auf derselben Seite von ihr liegen, endlich
4) von den beiden Diagonalen, die zwar keine Gegenecken verbinden, aber auch keinen Endpunct mit der in Rede stehenden Diagonale gemeinschaftlich haben.

260. — A. 336 und 337.

545. Hat man ein beliebiges Dreieck (ABC Fig. 139) und beschreibt drei Kreise so, daß jeder eine Dreiecksseite zur Sehne und eine zweite zur Tangente hat, nämlich der erste Kreis die erste Seite zur Sehne und die zweite zur Tangente, der zweite die zweite Seite zur Sehne und die dritte zur Tangente, der dritte endlich die dritte Seite zur Sehne und die erste zur Tangente, so haben diese drei Kreise stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

247.

Anmerkung. Da man den ersten Kreis auch so construiren könnte, daß er die erste Dreiecksseite zur Seite, und nicht die zweite, sondern die letzte zur Tangente hätte, und demgemäß die beiden andern Kreise, so sieht man, daß für jedes Dreieck zwei Ternionen von Kreisen unter den genannten Bedingungen sich construiren lassen.

546. Zieht man in dem Dreieck die Transversalen (AD, BE, CF Fig. 139), welche durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct (G) unserer drei Kreise gehen, so
1) werden durch sie die Dreieckswinkel so getheilt, daß drei dieser Stücke von gleicher Größe sind (W. BAD = CBE = ACF).
2) Die Transversalen selbst schneiden sich unter Winkeln, welche einzeln den Dreieckswinkeln gleich sind.

Frage: Wie lassen sich die drei gleichen Winkel in Worten, unabhängig von einer Figur, bezeichnen?

547. Zieht man von einem beliebigen Puncte (K) im Umfange eines unserer drei Kreise zwei Sehnen nach den beiden dieser Peripherie angehörigen Dreiecksspitzen (A, B) und verlängert dieselben bis sie die Peripherieen der beiden andern Kreise zum zweitenmal schneiden, so liegen diese letztern Durchschnittspuncte (L, M) stets in gerader Linie mit der dritten Dreiecksspitze (C), und das so entstandene Dreieck (KLM) ist dem Urdreieck ähnlich.

548. Die Winkel (KAB, LBC, MCA), welche die Seiten des neuen Dreiecks (KLM) mit denen des Urdreiecks bilden, sind von gleicher Größe, und mithin auch die Winkel unter einander gleich, welche die Seiten des neuen Dreiecks mit den Transversalen bilden (W. KAD = LBE = MCF).

549. Umgekehrt, zieht man durch die Ecken des Urdreiecks gerade Linien so, daß sie auf gleichmäßige Weise gleiche Winkel mit den Seiten des Dreiecks bilden (W. KAB = LBC = MCA), so bilden sie bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert ein dem Urdreieck ähnliches Dreieck, dessen Spitzen einzeln auf den Peripherieen unserer drei Kreise liegen.

550. Beschreibt man für irgend eines der Dreiecke, die man auf die im Vorigen angegebene Weise erhält, wie z. B. KLM (Fig. 139) drei Kreise, welche zu ihm in derselben Beziehung stehen, wie die Kreise des Urdreiecks zu diesem, d. h. also, daß der erste die erste Seite zur Sehne und die zweite zur Tangente rc. hat, so haben auch diese drei Kreise denselben gemeinschaftlichen Durchschnittspunct (G), wie die drei Kreise des Urdreiecks.

W. AMG = ACG rc.

Zus. Daher haben alle die unendlich vielen unter einander und dem Urdreiecke ähnlichen Dreiecke, dessen Seiten durch die Ecken des Urdreiecks gehen, und deren Spitzen auf den Umfängen unserer drei Kreise liegen, den Durchschnittspunct (G) dieser letztern zum gemeinschaftlichen Aehnlichkeitspunct.

551. Das größte unter allen diesen, im vorigen Satze näher bezeichneten, Dreiecken ist dasjenige, dessen Seiten einzeln senkrecht auf den Transversalen stehen, die durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct unserer drei Kreise gehen.

Beweis. Denn in diesem Falle werden die Sehnen GK, GL, GM Durchmesser.

552. Dieses größte Dreieck ist so groß als das Urdreieck und dasjenige (HJN), dessen Seiten einzeln senkrecht auf den Seiten des Urdreiecks stehen, zusammen.

Beweis. Denn $CJ_q = JG_q + CG_q$ 2c.

553. Zieht man durch die Ecken des Urdreiecks Gerade AO, BP, CQ (Fig. 139) so, daß W. BAO = CBP = ACQ = 2 . BAD, so ist das von diesen Linien gebildete Dreieck OPQ dem Urdreieck congruent.

BG = PG.

554. Zieht man durch die Spitzen eines beliebigen Dreiecks gerade Linien so, daß sie die Gegenseiten oder deren Verlängerungen unter beliebigen aber gleichen schiefen Winkeln schneiden, oder, was auf dasselbe hinauskömmt, daß sie mit den Höhenperpendikeln des Dreiecks, mit welchen sie von derselben Dreiecksspitze auslaufen, gleichmäßig gleiche Winkel bilden, (KAD = HBE = JCF Fig. 140) und verlängert dieselben bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so

1) ist das so entstandene Dreieck dem Urdreieck ähnlich;
2) dessen Ecken liegen einzeln auf den Umfängen der drei gleichen (A. 508) Kreise, von denen jeder durch zwei Spitzen und den Höhendurchschnitt des Urdreiecks geht.

555. Von jedem der ähnlichen Dreiecke, welche man auf die im vorigen Satze angegebene Weise erhalten kann, haben die drei Ecken gleiche Entfernung vom Höhendurchschnitt des Urdreiecks.

245, 3. 6.

Zus. Alle die unendlich vielen unter sich und dem Urdreieck ähnlichen Dreiecke, die man auf die mehr erwähnte Weise erhalten kann, haben also in dem Höhendurchschnitt des Urdreiecks einen gemeinschaftlichen Aehnlichkeitspunct.

556. Das größte unter allen diesen Dreiecken ist dasjenige, dessen Seiten einzeln senkrecht auf den Höhen des Urdreiecks stehen, und folglich mit dessen Seiten parallel laufen.

Beweis. Der Halbmesser seines äußern Kreises ist größer als der jedes andern Dreiecks.

Zus. Der Flächenraum dieses größten Dreiecks ist das Vierfache vom Inhalte des Urdreiecks.

557. Zieht man durch die Ecken eines Dreiecks gerade Linien so, daß jede von ihnen die Gegenseite unter Winkeln von 60° gleichmäßig schneidet, so bilden dieselben, bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, ein Dreieck (LMN Fig. 140), welches dem Urdreiecke congruent ist.

Beweis. Wenn O der Mittelpunct des äußern Kreises für das Urdreieck und OR, GS senkrecht auf BC und ML gezogen werden, so ist

AG = 2 . GS (A. 60) = 2 . OR (A. 348 Zus. 2)
OBR = EBA (A. 72) = FCA = GMS, also
△ BOR ≅ △ MGS, also GM = OB, also die äußern Kreise der beiden ähnlichen Dreiecke ABC und LMN gleich, daher sie congruent.

558. Zieht man durch die Spitzen eines beliebigen Dreiecks gerade Linien so, daß sie die Gegenseiten oder deren Verlängerungen gleichmäßig unter Winkeln schneiden, von denen jeder die Hälfte eines Rechten, so bilden dieselben, bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, ein Dreieck, welches doppelt so groß als das Urdreieck ist.

559. Zieht man in einem beliebigen Dreiecke diejenigen Transversalen, welche die Gegenseiten (der Ecken, durch welche sie gehen) gleichmäßig unter Winkeln schneiden, von denen jeder gleich ist dem dritten Theile eines Rechten, so bilden dieselben bei hinreichender Verlängerung ein Dreieck, welches dreimal so groß als das Urdreieck ist.

Anmerkung. Die Beweise für diesen und den vorhergehenden Satz sind dem in 557 mitgetheilten ganz ähnlich. —

560. Zieht man in einem beliebigen Dreiecke zwei Ternionen von Scheitellinien so, daß jede gleiche Winkel mit den Höhenperpendikeln gleichmäßig bildet, und der Winkel der einen Ternion das Complement vom Winkel der andern ist, so ist die Summe der von diesen Transversalen gebildeten beiden Dreiecke eine constante Größe, nämlich viermal so groß als das Urdreieck.

Anleitung zum Beweise. Nennt man die Radien der äußern Kreise unserer beiden Dreiecke R′, R″, den Radius vom äußern Kreise des Urdreiecks R, so läßt sich mit der größten Leichtigkeit darthun, daß: $R'^2 + R''^2 = 4\,R^2$.

Anmerkung. Es ergiebt sich also hieraus der bemerkenswerthe Umstand, daß man bei unsern in Rede stehenden Dreiecken an Flächenraum nichts verliert, man mag einen rechten Winkel an die Höhenperpendikel des Urdreiecks anlegen, oder denselben in zwei beliebige Stücke theilen, und diese einzeln anlegen. Denn die beiden letztern Dreiecke zusammen sind so groß als das erste.

561. Haben drei Kreise eine solche Lage gegen einander, daß jeder die beiden andern von außen berührt, und man verbindet die Mittelpuncte zweier, verlängert diese Gerade bis zum Durchschnitt mit derjenigen, welche die Berührungspuncte eben dieser beiden Kreise mit dem dritten verbindet, so

1) verhalten sich die Entfernungen der Mittelpuncte der genannten Kreise, von jenem Durchschnittspuncte wie ihre Halbmesser.
2) Das Stück der Axe unserer beiden Kreise zwischen ihrem Berührungspunct und dem erwähnten Durchschnittspunct ist die mittlere Proportionale zwischen den Stücken der andern Geraden, welche vom Durchschnittspuncte mit der ersten aus durch den einen und andern der Berührungspuncte, durch welche sie hindurchgeht, gebildet werden.

562. Erklärung. Zieht man in der Ebene eines Kreises eine beliebige Gerade, und auf sie eine Senkrechte aus dem Mittelpuncte, so heißt derjenige Punct dieser letztern oder ihrer über den Fußpunct hinausgehenden Verlängerung, welcher um die Länge der dritten Proportionale zu ihr und dem Kreishalbmesser vom Mittelpuncte entfernt ist, der zur erstern Geraden gehörige Pol, die Gerade selbst heißt in Beziehung auf diesen Punct dessen Polare.

Anmerkung. Einige französische Mathematiker, von denen überhaupt diese Ausdrücke in die Geometrie eingeführt worden sind, nennen den Punct der Polare, in welchem sie von der aus dem Mittelpuncte auf sie gefällten Senkrechten geschnitten wird, und den zu ihr gehörigen Pol zusammen conjugirte Pole, und sagen: zwei Puncte heißen conjugirte Pole eines Kreises, wenn sie mit ihm in derselben Ebene, mit dessen Mittelpunct in gerader Linie, auf einerlei Seite, und in solchen Entfernungen von letzterem liegen, daß der Kreishalbmesser die mittlere Proportionale zwischen diesen ist. Eine Gerade durch einen der Pole senkrecht auf die Verbindungslinie beider Pole gezogen, heißt die Polare des andern Pols.

Zus. 1. Zu jeder Geraden als Polare läßt sich leicht der zugehörige Pol finden, und umgekehrt.

Zus. 2. Jede Gerade in der Ebene eines Kreises hat als Polare nur einen einzigen Pol, und zu jedem Puncte in der Ebene eines Kreises als Pol gehört nur eine einzige Gerade als Polare.

Zus. 3. Liegt der eine zweier conjugirten Pole innerhalb des Kreises, so liegt der andere nothwendig außerhalb, und umgekehrt; oder liegt die Polare außerhalb des Kreises, so liegt ihr Pol innerhalb desselben, und umgekehrt.

Zus. 4. Liegt dagegen einer der Pole im Umkreise, so muß auch der andere daselbst liegen, oder, jeder Punct im Umkreise ist sein eigner conjugirter Pol. Die einem Puncte im Umfange als Pol zugehörige Polare ist die durch diesen Punct gehende Tangente.

Frage: Kann ein Kreisdurchmesser auch als Polare betrachtet werden?

563. Hat man zwei Paare zugeordneter Pole (P, N und Q, O Fig. 141) und verbindet die gleichnamigen d. h. die innern und die äußern unter einander, so sind diese beiden Geraden (PQ, NO) stets antiparallel zu einander, und umgekehrt.

564. Jede Gerade (PQ Fig. 141), welche die zu zwei beliebigen andern (AB, DE) gehörigen Pole (P, Q) verbindet, ist die Polare, zu welcher der Durchschnittspunct (F) dieser letztern als Pol gehört, und umgekehrt der Durchschnittspunct zwei beliebiger Polaren ist der Pol, zu welcher die Gerade als Polare gehört, welche die zugehörigen Pole jener verbindet.

A. 563.

Frage: Wie wird es mit unserm Satze in dem Falle, wo die beiden in Rede stehenden Geraden (AB, DE) parallel laufen?

Zus. 1. Liegen daher mehrere Pole in einer geraden Linie, so müssen die zugehöri-

gen Polaren entweder einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, oder unter einander parallel sein.

A. 562, Z. 2.

Zus. 2. Umgekehrt, haben mehrere Gerade einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct oder sind parallel, so liegen ihre zugehörigen Pole in einer geraden Linie.

565. Ist der Durchschnittspunct (F Fig. 141) zweier Geraden der Pol einer dritten (LM), so geht diese durch die zu den beiden ersten gehörigen Pole.

566. Erklärung. Ein Winkel heißt um einen Kreis beschrieben, wenn seine beiden Schenkel denselben berühren.

Anmerkung. Ist bei einem solchen Winkel von der Länge seiner Schenkel die Rede, so versteht man die Stücke derselben, zwischen den Berührungspuncten und dem Scheitel.

567. Der Scheitel jedes um einen Kreis beschriebenen Winkels und der Halbirungspunct der zu ihm gehörigen Berührungssehne sind conjugirte Pole; und die Berührungssehne selbst ist die Polare zu dem Scheitel des umschriebenen Winkels als Pol.

568. Liegen die Scheitel einer beliebigen Menge von Winkeln, die um denselben Kreis beschrieben sind, in einer geraden Linie, so haben ihre Berührungssehnen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct oder sind parallel.

A. 564, Z. 1.

569. Umgekehrt, haben die Berührungssehnen, die zu mehrern um einen Kreis beschriebenen Winkeln gehören, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, oder sind sie parallel, so liegen die Scheitel dieser letztern in einer geraden Linie.

570. Zieht man von einem Puncte außerhalb eines Kreises nach demselben ein Paar Schneidende, so ist die diesem Puncte gehörige Polare diejenige Gerade, welche die beiden innerhalb des Kreises befindlichen Puncte jener beiden Schneidenden verbindet, durch welche deren harmonische Theilung zu Stande gebracht wird.

260.

Anmerkung. Solche innerhalb des Kreises gelegene Puncte von geraden Linien, die von bestimmten Puncten außerhalb als Schneidende an ihn gezogen sind, wollen wir der Kürze halber innere Harmonikalpuncte, die Puncte, von denen sie auslaufen, äußere Harmonikalpuncte nennen.

571. Nimmt man außerhalb eines Kreises eine beliebige Anzahl von Puncten, die auf einer geraden Linie liegen und zieht von jedem derselben ein Paar beliebiger Secanten, so haben die Geraden, welche die innern Harmonikalpuncte jedes Paares verbinden, entweder einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct oder sind parallel.

572. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

573. Hat man zwei beliebige Kreise (C und K Fig. 142), zieht in ihnen mehrere Paare paralleler Halbmesser so, daß alle Paare zugleich entweder auf derselben Seite der Axe liegen (CO, KN, und CE, KF &c.) oder auf verschiedenen Seiten derselben (CG, KH, und CL, KM &c.), so haben die Geraden ON, EF &c., so wie GH, LM &c. einen gemeinschaftlichen auf der Axe der Kreise liegenden Durchschnittspunct.

A. 309 und 310.

574. Umgekehrt, zieht man durch einen der so erhaltenen Durchschnittspuncte (A, J) eine beliebige beide Kreise schneidende Gerade, so werden durch die Durchschnittspuncte zwei Paare paralleler Halbmesser bestimmt.

575. Liegt jeder der beiden Kreise außerhalb des andern und man zieht von einem unserer in Rede stehenden Puncte (A, J Fig. 142) an einen derselben eine Tangente, (AR, JU), so berührt diese auch stets den andern Kreis.

Bew. Denn sie ist auch vom Mittelpuncte des zweiten Kreises, um die Länge des Halbmessers entfernt.

Anmerkung 1. Unsere beiden Puncte sind also bei dieser Lage der Kreise keine andern als diejenigen, von denen aus man die gemeinschaftlichen Tangenten an dieselben zieht, und es ergiebt sich aus den vorigen Sätzen zugleich ein leichtes Verfahren für die Lösung der Aufgabe: an zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.

Anmerkung 2. Man könnte in diesem Falle die mehr erwähnten Puncte (A, J) auch als die Scheitel der Winkel bezeichnen, die um die beiden Kreise (C, K) zugleich beschrieben sind.

576. Erklärung. Aehnlichkeitspuncte zweier Kreise nennt man die beiden Puncte ihrer Axe, in denen sich die geraden Linien schneiden, welche die Endpuncte paralleler Halbmesser verbinden (A. 573) und zwar heißt äußerer Aehnlichkeitspunct derjenige (A), wo die zugehörigen parallelen Halbmesser auf derselben Seite der Axe liegen, innerer Aehnlichkeitspunct dagegen der andere (J), für welchen das Gegentheil Statt findet.

Zus. 1. Für zwei Kreise giebt es nie mehr als zwei Aehnlichkeitspuncte.

Zus. 2. Liegen die beiden Kreise ganz außer einander, so fallen ihre Aehnlichkeitspuncte mit denen zusammen, in welchen die an sie gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten die Axe schneiden.

Zus. 3. Berühren sich zwei Kreise von außen, so ist dieser Berührungspunct ihr innerer Aehnlichkeitspunct; berühren sie sich dagegen von innen, so ist der Berührungspunct ihr äußerer Aehnlichkeitspunct.

Erklärung. Aehnlichkeitslinie zweier Kreise wollen wir künftig jede Gerade nennen, welche durch einen ihrer Aehnlichkeitspuncte geht, und zwar wollen wir sie, wie die letztern, in äußere und innere unterscheiden, je nachdem sie durch den einen oder andern der Aehnlichkeitspuncte gehen.

Zus. 4. Schneidet eine solche Aehnlichkeitslinie einen der Kreise, so schneidet sie auch nothwendig den andern, berührt sie den einen, so berührt sie auch den andern, und liegt sie endlich ganz außerhalb des einen, so ist dieß auch eben so mit dem andern.

Zus. 5. Zieht man eine beliebige Aehnlichkeitslinie zweier Kreise, und nach ihr zwei beliebige Parallelen von den Mittelpuncten aus, so verhalten sich diese stets wie die Halbmesser der Kreise.

Anmerkung. Es ist kaum nöthig zu erinnern, daß für äußere Aehnlichkeitslinien die Parallelen auf einerlei Seite der Axe, für innere auf verschiedenen Seiten liegen müssen.

Zus. 6. Umgekehrt, durch einen der Aehnlichkeitspuncte zweier Kreise geht jede Gerade (ist also eine Aehnlichkeitslinie derselben), welche die Endpuncte zweier von ihren Mittelpuncten auslaufenden Parallelen verbindet, die sich wie ihre Halbmesser verhalten, und zwar durch den äußern Aehnlichkeitspunct, wenn diese Parallelen auf derselben Seite der Axe liegen, im entgegengesetzten Fall durch den innern.

577. Beschreibt man in einer Ebene drei beliebige Kreise, und sucht für je zwei sowohl die äußern als innern Aehnlichkeitspuncte, so giebt es unter diesen sechs Puncten immer vier Ternionen, von denen jede in einer geraden Linie liegt, nämlich die drei äußern Aehnlichkeitspuncte unter einander; und jeder derselben mit den beiden innern Aehnlichkeitspuncten, welche die beiden zu diesem äußern Aehnlichkeitspuncte gehörigen Kreise beziehungsweise mit dem dritten Kreise bilden. Bezeichnet man also unsere drei Kreise mit M_1, M_2, M_3 (Fig. 143) den äußern Aehnlichkeitspunct von M_1 und M_2 mit A_3, den innern mit J_3; die Aehnlichkeitspuncte von M_1 und M_3 beziehungsweise mit A_2 und J_2, und endlich die von M_2 und M_3 mit A_1 und J_1, so liegen von diesen sechs Puncten in gerader Linie:

1) A_1, A_2, A_3
2) A_1, J_2, J_3
3) A_2, J_1, J_3
4) A_3, J_1, J_2

Bew. Nennt man die Halbmesser unserer drei Kreise M_1, M_2, M_3, beziehungsweise R_1, R_2, R_3, zieht aus den Mittelpuncten nach der Geraden, welche zwei der Aehnlichkeitspuncte z. B. A_1 und A_2 verbindet, die drei beliebigen Parallelen P_1, P_2, P_3, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 : P_3 = R_1 : R_3 \\ P_3 : P_2 = R_3 : R_2 \end{array}\right\} \text{(A. 576, Z. 6)}$$
$$\overline{P_1 : P_2 = R_1 : R_2}$$

also ist die Gerade A_1A_2 zugleich auch Aehnlichkeitslinie für die Kreise M_1 und M_2, und zwar äußere, weil die aus den Mittelpuncten nach ihr gezogenen Parallelen P_1 und P_2 jedenfalls auf derselben Seite der Axe M_1M_2 liegen, es liegen also A_1 und A_2 mit A_3 in gerader Linie. Eben so einfach ist der Beweis für jeden der drei übrigen Theile unseres Lehrsatzes.

Anmerkung. Es kann für den ersten Augenblick nicht anders als befremdend erscheinen, daß die drei innern Aehnlichkeitspuncte dreier Kreise nicht eben so in gerader Linie liegen, wie die drei äußern, und es ist dem Anfänger sehr zu empfehlen, daß er die Gründe aufsuche, warum dieß nie möglich ist.

Zus. Liegt daher von drei Kreisen jeder außerhalb der beiden andern, und man zieht an je zwei ihre gemeinschaftlichen Tangentenpaare, so liegen von den sechs Durchschnittspuncten dieser einzelnen Paare viermal drei in gerader Linie.

578. Berührt ein Kreis zwei andere gleichartig d. h. beide zugleich von außen oder von innen, so liegt der äußere Aehnlichkeitspunct dieser letztern mit den Berührungspuncten in gerader Linie.

A. 576, Z. 3 — A. 577.

579. Berührt dagegen ein Kreis zwei andere ungleichartig, so liegt der innere Aehnlichkeitspunct dieser letztern mit den beiden Berührungspuncten in gerader Linie.

Zus. Sind daher zwei beliebige Kreise gegeben und man construirt zwei andere, von denen der eine den ersten der gegebenen von außen und den andern von innen, der zweite dagegen diesen letztern von außen und den ersten von innen, so schneiden die Geraden, welche die Berührungspuncte in dem einen und andern Falle verbinden, die Axe der gegebenen Kreise in demselben Puncte, — in ihrem innern Aehnlichkeitspuncte.

580. Zieht man von zwei beliebigen Puncten (R, S Fig. 144) außerhalb eines Kreises Tangentenpaare (SD, SE, RF, RG) an denselben, und verbindet von den vier Berührungspuncten je zwei solche, welche nicht demselben Tangentenpaare zugehören, so bilden die Durchschnittspuncte (A, J) der Gegenseiten des so entstandenen Vierecks (DFEG) die beiden Aehnlichkeitspuncte für diejenigen Kreise, welche man von den genannten Puncten (R, S) außerhalb als Mittelpuncten mit den zugehörigen Tangentenlängen als Radien beschreibt.

Anmerkung. Der nöthigen Kürze halber wollen wir in dem Nächstfolgenden unter Kreis S denjenigen veistehen, der von diesem Puncte aus mit der zugehörigen Tangentenlänge (SD oder SE) als Radius beschrieben ist; und in ähnlichem Sinne natürlich gebrauchen wir die Ausdrücke Kreis R ꝛc.

Bew. Die Kreise R und S werden vom Kreise B ungleichartig in E und G, und vom Kreise H eben so in D und E berührt, also J der innere Aehnlichkeitspunct jener Kreise (A. 579, Zus.). Dagegen berührt sowohl der Kreis K in F und E, als der Kreis Z — wo Z den in der Figur nicht sichtbaren Durchschnittspunct der Tangenten GR und DS bezeichnet — in D und G unsere Kreise R und S von innen, also gleichartig, also A äußerer Aehnlichkeitspunct dieser Kreise (A. 578).

Zus. 1. Die vier Puncte A, R, J, S liegen also in einer geraden Linie.

Zus. 2. Betrachtet man Viereck DEFG als ursprünglich gegeben, so kann man den vorigen Zusatz auch so aussprechen: Zieht man an je zwei Gegenecken eines Kreisvierecks Tangenten, so liegen die beiden Durchschnittspuncte derselben mit den beiden Durchschnittspuncten der Gegenseiten in gerader Linie.

Zus. 3. Da die Kreise S und H sich in D von innen berühren, die Kreise S und B dagegen in E von außen, so geht DE durch den innern Aehnlichkeitspunct der Kreise B und H; eben so leicht sieht man, daß die Kreise R und B sich in G innerlich, die Kreise R und H aber in F äußerlich berühren, die Gerade FG geht also gleichfalls durch den innern Aehnlichkeitspunct der Kreise B und H; d. h. der Durchschnittspunct (M) der Diagonalen ist der innere Aehnlichkeitspunct dieser Kreise.

Zus. 4. Die Kreise B und H werden vom Kreise K äußerlich in D und E, vom Kreise Z (Z Durchschnittspunct der Diagonalen RG und DS) aber innerlich in G und D berührt, also ist A der äußere Aehnlichkeitspunct der Kreise B und H.

Zus. 5. Es liegen also auch die Puncte A, B, M, H in gerader Linie.

Zus. 6. Auf ähnliche einfache Weise läßt sich darthun, daß M, K, J, Z in gerader Linie liegen.

Zus. 7. Ist also ein Viereck in einen Kreis beschrieben und ein anderes um denselben so, daß die Ecken jenes mit den Berührungspuncten dieses zusammen fallen, so haben ihre beiderseitigen Diagonalen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Fassen wir den Inhalt unseres Hauptsatzes und seiner sieben Zusätze in ein Resultat zusammen, so erhalten wir folgenden Lehrsatz:

581. Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges unregelmäßiges Viereck, zieht an jede seiner Ecken eine Tangente, verlängert dieselben bis je zwei sich schneiden, so lassen sich aus diesen sechs Durchschnittspuncten und denen der drei zugeordneten Seitenpaare drei Quaternionen bilden, die so beschaffen sind, daß die zu jeder gehörigen Puncte in gerader Linie liegen. Jede Quaternion wird aus zwei Tangentendurchschnitten und aus zwei Durchschnittspuncten zugeordneter Seiten gebildet; die beiden letztern sind die Aehnlichkeitspuncte zu den Kreisen, welche man von den erstern aus mit den zugehörigen Tangentenlängen beschreibt.

582. Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges unregelmäßiges Sechseck, verlängert je zwei Gegenseiten bis sie sich schneiden, so liegen diese drei Durchschnittspuncte in einer geraden Linie.

Beweis. Es sei das Sechseck ABCDEF (Fig. 145); die Durchschnittspuncte der Gegenseiten G, H, J; die Durchschnittspuncte der an zwei Gegenecken gezogenen Tangenten K, L, M.

Nach A. 580 ist J der innere Aehnlichkeitspunct der Kreise K und M; eben so ist H innerer Aehnlichkeitspunct der Kreise L und M, und G der äußere Aehnlichkeitspunct der Kreise K und L, also G, H, J in gerader Linie (A. 577).

Anmerkung 1. Da unser Lehrsatz (A. 580) für vier ganz beliebige Puncte im Um-

fange eines Kreises gilt, so gilt auch der darauf gestützte Beweis für die in Rede stehende Eigenschaft des Kreissechsecks allgemein und für jede Art desselben.

Anmerkung 2. Man pflegt unsern Lehrsatz nicht selten nach seinem ersten Entdecker: Pascal's Lehrsatz zu nennen.

Anmerkung 3. In einzelnen Fällen kann es geschehen, daß die Puncte G, H, J die drei äußern Aehnlichkeitspuncte der Kreise K, L und M sind.

Zus. 1. Nach A. 580, Zus. 2 ist auch J mit K und M in gerader Linie, eben so H mit M und L, und G mit K und L.

Zus. 2. Von den sechs Puncten also, welche man in den drei Durchschnittspuncten je zweier Gegenseiten eines in einen Kreis beschriebenen Sechsecks, und den drei Durchschnittspuncten der an je zwei Gegenecken gezogenen Tangenten hat, liegen viermal drei in gerader Linie.

Zus. 3. Verbindet man ein Paar Gegenseiten wie AB und DE unseres eingeschriebenen Sechsecks, so liegen nach A. 581 in dem so entstandenen Vierecke die Puncte G und S als Durchschnittspuncte zwei zugeordneter Seitenpaare mit den Durchschnittspuncten K und L der an ihre Gegenecken gezogenen Tangenten in gerader Linie, und aus ähnlichem Grunde liegen in gerader Linie die Puncte N, U, Q, S und S, U, P, G. Dasselbe gilt natürlich von jedem andern Viereck wie ABEF 2c.

Zus. 4. Nimmt man daher auf der Peripherie eines Kreises sechs beliebige Puncte so, daß nicht nur je zwei der funfzehn durch sie bestimmten Sehnen, sondern auch je zwei der sechs an sie gezogenen Tangenten bei hinreichender Verlängerung sich schneiden, so erhält man fünf und vierzig Quaternionen von Puncten, die in gerader Linie liegen.

583. Beschreibt man um einen Kreis ein beliebiges Sechseck und zieht die Diagonalen, welche je zwei Gegenecken verbinden, so haben diese stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Beweis. NOPQRS sei das umschriebene Sechseck (Fig. 145); verbindet man die Berührungspuncte A, B, C, D, E, F unter einander, so sind diese als Berührungssehnen beziehungsweise die Polaren, zu denen die Ecken des äußern Vielecks als Pole gehören; daher der Durchschnittspunct je zweier der Pol für die durch die zugehörigen Ecken des äußern Vielecks gehende Gerade als Polare (A. 564), also J der Pol für SP, H für RO, G für NQ, also, weil G, H, J in gerader Linie, so haben ihre Polaren einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct (A. 564, Z. 1).

584. Beschreibt man sowohl in als um einen Kreis ein Sechseck und zwar so, daß die Ecken jenes mit den Berührungspuncten dieses zusammenfallen, so ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunct (A. 583) der drei Diagonalen, welche je zwei Gegenecken des äußern Sechsecks verbinden, der Pol für die Gerade (A. 582), auf welcher die Durchschnittspuncte je zweier Gegenseiten des innern liegen.

585. Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges Fünfeck, zieht an eine der Ecken eine Tangente und verlängert sie bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite, so liegt dieser Durchschnittspunct mit denen von je zwei solchen der vier übrigen Seiten, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben, in gerader Linie.

586. Wird dagegen ein beliebiges Fünfeck um einen Kreis beschrieben und man verbindet von vier seiner Ecken je zwei solche, die nicht an derselben Seite liegen, so liegt der Durchschnittspunct dieser Verbindenden stets auf der Geraden, welche die fünfte Ecke mit dem Berührungspuncte der Gegenseite verbindet.

587. Beschreibt man sowohl in als um einen Kreis ein Dreieck und zwar so, daß die Berührungspuncte des letztern mit den Ecken des erstern zusammenfallen, so liegen die drei Durchschnittspuncte der Seiten des innern Dreiecks mit den durch ihre Gegenecken gehenden Seiten des äußern in gerader Linie.

588. Beschreibt man in einen Kreis ein beliebiges Fünfeck (ABDEE Fig. 146), verlängert ein Paar nicht anliegender Seiten (AB, DE) bis zum Durchschnitt (G), verbindet die beiden Endpuncte (B, D) der zwischen den verlängerten liegenden Seite mit einem beliebigen Puncte (C) im Umkreise und verlängert jede derselben bis zum Durchschnitt mit der Seite des Fünfecks, welche der Ecke gegenüberliegt von der die Verbindende selbst ausgeht, so liegen diese beiden Durchschnittspuncte (H, J) mit dem Durchschnitt (G) der zuerst verlängerten Seiten in gerader Linie.

Beweis. Für das Kreissechseck ABCDEF d. h. dessen successive Seiten die Geraden AB, BC, CD, DE, EF und FA, sind unsere in Rede stehenden Puncte (G, H, J) die Durchschnitte je zweier Gegenseiten.

Anmerkung. Dieser Satz gehört Maclaurin; er theilte ihn zuerst mit in seinem Werke: Treatise of Fluxions §. 623. Man sieht aus unserm Beweise, daß er nur ein besonderer Fall des Pascal'schen Satzes ist.

589. Erklärung. Im fünften Buche (251 und 256) ist erwiesen, daß, wenn

man durch einen beliebigen Punct in der Ebene eines Kreises gerade Linien zieht, die diesen letztern schneiden, alle die Rechtecke, die aus denjenigen Segmenten jeder dieser Geraden gebildet werden, welche zwischen diesem Puncte und den Durchschnittspuncten mit dem Umkreise liegen, einen constanten Flächeninhalt haben. Dieser Flächenraum soll künftig der Kürze halber den Namen **Potenz** führen, und zwar wollen wir, in sofern von einem bestimmten Puncte und Kreise die Rede ist, sagen: Potenz des Punctes für den Kreis, oder Potenz des Kreises für den Punct. Wir wollen diese Potenzen noch durch die Beinamen **äußere** und **innere** unterscheiden, je nachdem der zugehörige Punct außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

Zus. 1. Das Maaß für die Größe jeder äußern Potenz ist das Quadrat der von dem zugehörigen Puncte nach dem Kreise gezogenen Tangente.

Zus. 2. Der Halbirungspunct der gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise ist daher ein Punct, der gleiche Potenzen für beide Kreise hat.

Zus. 3. Das Maaß für die innere Potenz eines Punctes ist das Quadrat der zugehörigen halben Mittelsehne d. h. derjenigen, welche auf dem Durchmesser, der durch den zur Potenz gehörigen Punct geht, in diesem Puncte senkrecht steht.

Zus. 4. Die Potenz jedes Punctes im Umfange ist gleich Null.

590. Der geometrische Ort aller derjenigen Puncte, welche für einen gegebenen Kreis gleiche Potenzen haben, ist die Peripherie eines mit dem gegebenen concentrischen Kreises.

Frage: In wie fern ist unser Satz auch für diejenigen Puncte wahr, deren Potenz gleich Null ist?

Zus. Haben daher mehrere Puncte gleiche äußere Potenzen für einen Kreis, so sind die dem Kreise umschriebenen Winkel, deren Scheitel jene Puncte sind, von gleicher Größe.

591. Hat ein Punct für zwei Kreise gleiche und gleichartige Potenzen, so ist die Differenz der Quadrate seiner Entfernungen von den Mittelpuncten dieser Kreise, gleich der Differenz der Quadrate ihrer Halbmesser; ist also eine constante, von der besondern Lage des Punctes unabhängige Größe.

Zus. Es giebt daher für zwei Kreise unendlich viele Puncte gleicher Potenzen.

592. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

Zus. 1. Berühren daher zwei Kreise einander, so ist der Berührungspunct ein Punct gleicher Potenzen für beide Kreise.

Zus. 2. Schneiden zwei Kreise einander, so ist jeder Durchschnittspunct ein Punct gleicher Potenzen für sie.

592. **Erklärung.** **Potenzlinie** zweier Kreise heißt der geometrische Ort aller Puncte (591, Zus.) gleicher Potenzen für sie.

Anmerkung. Französische Schriftsteller, besonders die Verfasser der hierher gehörigen Abhandlungen in den Annales de Mathem. etc. p. Gergoune nennen diese Linie: axe radical de deux cercles.

593. Die Potenzlinie zweier Kreise ist eine Gerade, welche

1) auf deren Axe senkrecht steht, und
2) dieselbe in einem Punct schneidet, dessen Entfernungen von den nähern Durchschnittspuncten der Axe mit den Umkreisen sich umgekehrt verhalten wie die von den entfernteren.

Beweis. Für Nro. 1 aus A. 184; für Nro. 2 aus dem Begriffe der Potenzlinie.

Zus. 1. Die Potenzlinie zweier Kreise ist daher völlig bestimmt und bekannt, wenn man nur einen einzigen ihr zugehörigen Punct kennt.

Zus. 2. Für zwei sich berührende Kreise ist die Potenzlinie ihre gemeinschaftliche Tangente.

Zus. 3. Für zwei sich schneidende Kreise ist die Potenzlinie die gemeinschaftliche Sehne in ihrer unbegränzten Verlängerung.

Zus. 4. Die Halbirungspuncte der vier gemeinschaftlichen Tangenten, die sich an zwei Kreise ziehen lassen, liegen in gerader Linie.

Zus. 5. Liegt die Potenzlinie zweier Kreise ganz außerhalb des einen, so muß sie auch außerhalb des andern liegen.

Zus. 6. Liegen zwei Kreise entweder ganz außer einander oder der eine ganz innerhalb des andern, so kann ihre Potenzlinie keinem von beiden begegnen.

594. Die drei Potenzlinien dreier Kreise haben stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Bew. Denn der Durchschnittspunct zweier von ihnen ist nothwendig ein Punct gleicher Potenzen für das dritte Paar der gegebenen Kreise.

Zus. 1. Daher haben die gemeinschaftlichen Tangenten dreier Kreise, von denen jeder die beiden andern berührt, immer einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Zus. 2. Dasselbe gilt von den gemeinschaftlichen Sehnen dreier sich schneidender Kreise.

595. Erklärung. Spricht man von dem Winkel, unter welchem sich zwei Kreise schneiden, so versteht man darunter denjenigen, welchen die beiden Tangenten bilden, die man an die beiden Kreise in einem ihrer Durchschnittspuncte zieht.

Anmerkung. Dieser Winkel ist, wie leicht zu sehen, für einen der Durchschnittspuncte von derselben Größe wie für den andern.

Frage: Von welcher Größe ist der Winkel, den zwei sich berührende Kreise bilden?

596. Ein Kreis schneidet zwei andere rechtwinkelig, wenn sein Mittelpunct auf ihrer Potenzlinie liegt, und sein Halbmesser gleich dem Potenzmaaße dieses Punctes d. h. der von diesem Puncte an einen der Kreise gezogenen Tangente gleich ist.

Anmerkung. Einen Kreis, der zwei andere rechtwinkelig schneidet, nennen französische Schriftsteller den „cercle radical“ der erstern, weil sein Mittelpunct auf deren „axe radicale“ liegt.

597. Zwei Kreise, die zwei andere ganz außer einander liegende Kreise rechtwinkelig schneiden, müssen sich selbst immer schneiden.

598. Zwei Kreise dagegen, welche zwei andere sich schneidende rechtwinkelig schneiden, liegen ganz außer einander.

Frage: Wie ist es, wenn die beiden rechtwinkelig geschnittenen Kreise sich berühren, oder der eine ganz innerhalb des andern liegt?

599. Die Peripherieen aller der Kreise, welche zwei andere, von denen jeder ganz außerhalb des andern liegt, rechtwinkelig schneiden, gehen durch dieselben beiden Puncte der Axe dieser letztern, haben also diese Axe zur gemeinschaftlichen Potenzlinie.

600. Hat man zwei beliebige Kreise und beschreibt eine beliebige Menge anderer, von denen jeder die beiden erstern berührt oder schneidet, so ist der geometrische Ort für die Durchschnittspuncte aller zusammengehörigen Paare der gemeinschaftlichen Tangenten oder Sehnen eine gerade Linie — die Potenzlinie der beiden ersten Kreise.

601. Wenn zwei Systeme von Kreisen so beschaffen sind, daß jedes eine gemeinschaftliche Axe hat, und die Axe des einen Systems die Potenzlinie des andern ist, so haben die gemeinschaftlichen Sehnen von einem Kreise des einen Systems mit einer beliebigen Anzahl von Kreisen des zweiten einen gemeinschaftlichen auf der Axe jenes ersten Systems liegenden Durchschnittspunct.

A. 594, Zus. 2.

602. Wenn ein beliebiger Kreis (C Fig. 147) zwei andere (B, K) rechtwinkelig schneidet, so haben die vier Durchschnittspuncte (D, E, F, G) stets eine solche gegenseitige Lage, daß sich vier Kreise beschreiben lassen, von denen jeder die gegebenen Kreise (B, K) in zweien dieser Puncte berührt.

Bew. Man ziehe in jedem der Kreise B, K die beiden Halbmesser nach den Puncten, in denen er von dem dritten C rechtwinkelig geschnitten wird, und verlängere sie so weit, bis je zwei sich schneiden, so sind diese vier Durchschnittspuncte M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpuncte der vier in Rede stehenden Berührungskreise.

Zus. 1. Die Kreise M_1 und M_2 berühren die gegebenen gleichartig, der erstere von innen, der andere von außen; für die beiden übrigen M_3, M_4 dagegen ist die Berührung ungleichartig.

Zus. 2. Sowohl die Linie DE, als FG gehen daher durch den äußern Aehnlichkeitspunct (A) unserer Kreise B und K; dagegen gehen DG und EF durch den innern Aehnlichkeitspunct (J) derselben (A. 578 und 579). Wir erhalten daher den Satz:

603. Werden zwei gegebene Kreise von einer beliebigen Anzahl anderer rechtwinkelig geschnitten, und man verbindet von den vier jedem der schneidenden Kreise angehörenden Puncten je zwei solche, welche nicht auf derselben Peripherie eines der geschnittenen Kreise liegen, so hat der eine Theil dieser sämmtlichen Verbindenden einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct im äußern Aehnlichkeitspunct der beiden zuletzt genannten Kreise, der andere Theil im innern Aehnlichkeitspuncte.

Zus. 1. Die Geraden, welche von unsern vier Puncten je zwei solche verbinden, die auf der Peripherie eines und desselben der geschnittenen Kreise liegen, wie DF und EG, schneiden sich, wie leicht zu sehen, immer auf der Potenzlinie der Kreise B und K. Beschreibt man also mehrere solcher schneidender Kreise, so liegen die Durchschnittspuncte dieser Linienpaare in gerader Linie.

Zus. 2. Die Durchschnittspuncte O, Q eben dieser Linien mit der Axe BK unserer Kreise sind für alle rechtwinkelig schneidende Kreise dieselben.

A. 601.

604. Sind zwei Kreise B und K gegeben und man beschreibt einen beliebigen dritten C, der sie rechtwinkelig schneidet, so liegen, wie wir bereits wissen (A. 603), zwei Paare dieser vier Durchschnittspuncte mit dem äußern und zwei Paare mit dem innern Aehnlichkeitspuncte der Kreise B und K in gerader Linie. Zieht man nun diese Geraden, so haben sowohl für den einen als andern Aehnlichkeitspunct die Rechtecke aus den Segmenten derselben, welche die Entfernungen des Aehnlichkeitspunctes von den zugehörigen Durchschnittspuncten messen (also Fig. 147 einerseits die Rechtecke AD . AE, AF . AG und andererseits die Rechtecke JD . JG, JE . JF) einen constanten, von der besondern Beschaffenheit des schneidenden Kreises ganz unabhängigen Flächeninhalt.

Bew. Nach A. 599 gehen alle Kreise, welche B und K rechtwinkelig schneiden, durch dieselben beiden Puncte (Y, X) ihrer Axe, alle Rechtecke der einen Classe sind also dem Rechtecke AX . AY, alle der andern Classe dem Rechtecke JX . JY gleich.

Anmerkung 1. Man kann unsern Satz auch so aussprechen: Zieht man durch einen der beiden Aehnlichkeitspuncte zweier Kreise eine beliebige Gerade, welche beide Kreise schneidet, so hat das Rechteck aus den Segmenten derselben, welche zwischen diesem Aehnlichkeitspuncte und zwei solchen Durchschnittspuncten mit den Kreisperipherieen liegen, zu denen keine parallelen Halbmesser gehören, einen constanten Flächeninhalt.

Anmerkung 2. Diese constanten Rechtecke sollen künftig den Namen führen: gemeinschaftliche Potenz zweier Kreise für ihren Aehnlichkeitspunct.

605. Wenn zwei beliebige Kreise (B, K Fig. 147), von denen jeder ganz außerhalb des andern liegt, von einer beliebigen Menge von Kreisen rechtwinkelig geschnitten werden, so läßt sich immer von dem äußern Aehnlichkeitspuncte (A) der beiden erstern ein Kreis beschreiben, der die ganze Anzahl der sie rechtwinkelig schneidenden wiederum rechtwinkelig schneidet.

Bew. Denn das Quadrat der Tangente, welche man von dem äußern Aehnlichkeitspuncte der Kreise B und K an irgend einen der sie rechtwinkelig schneidenden zieht, ist gleich der gemeinschaftlichen Potenz eben dieser Kreise für ihren äußern Aehnlichkeitspunct, also eine constante Größe (604), also alle die Tangenten, die man von diesem Aehnlichkeitspuncte an die verschiedensten der rechtwinkelig schneidenden Kreise zieht, von gleicher Länge ꝛc.

606. Von dem innern Aehnlichkeitspuncte zweier Kreise aus läßt sich immer ein dritter beschreiben, welcher unendlich viele andere Kreise — solche, von denen die beiden erstern rechtwinkelig geschnitten werden — so schneidet, daß seine Durchschnittspuncte mit einem jeden derselben Endpuncte eines seiner Durchmesser sind.

Bew. Zöge man in einem der rechtwinkelig schneidenden Kreise, wie C (Fig. 147) von dem innern Aehnlichkeitspuncte J der Kreise B und K die halbe Mittelsehne, so würde deren Quadrat gleich sein der gemeinschaftlichen Potenz der Kreise B und K für ihren innern Aehnlichkeitspunct, würde also für alle rechtwinkelig schneidende Kreise eine constante Größe sein; ein Kreis also, der von J aus mit der Länge einer solchen halben Mittelsehne beschrieben wird, muß auch die gleich großen halben Mittelsehnen aller übrigen rechtwinkelig schneidenden Kreise zu Halbmessern haben.

607. Erklärung. Ein Kreis heißt Potenzkreis zweier andern (B, K Fig. 147), wenn er von einem ihrer Aehnlichkeitspuncte aus mit der Geraden als Radius beschrieben wird, deren Quadrat das Maaß für die diesem Aehnlichkeitspunct zugehörige gemeinschaftliche Potenz dieser Kreise ist.

Zus. 1. Der Halbmesser des äußern Potenzkreises, d. h. des vom äußern Aehnlichkeitspunct (A) aus beschriebenen, ist also gleich der Tangente, die man von diesem Puncte an einen der Kreise zieht, welche die gegebenen Kreise B und K rechtwinkelig schneiden.

Zus. 2. Der Radius des innern Potenzkreises ist die halbe Mittelsehne, die man von dem innern Aehnlichkeitspuncte aus in einem der Kreise zieht, welche die gegebenen rechtwinkelig schneiden.

608. Liegt ein Kreis ganz innerhalb eines andern, so schneidet der innere Potenzkreis beider alle diejenigen Kreise rechtwinkelig, von denen die beiden Urkreise selbst rechtwinkelig geschnitten werden; von dem äußern Potenzkreise dagegen werden eben diese Kreise so geschnitten, daß je zwei zusammengehörige Durchschnittspuncte Endpuncte eines Durchmessers dieses Potenzkreises sind.

609. Wenn zwei Kreise sich schneiden, so schneidet so wohl der eine als der andere ihrer Potenzkreise alle diejenigen Kreise rechtwinkelig, von denen die beiden Urkreise selbst rechtwinkelig geschnitten werden.

Frage: Wie ist es mit unserm Satze dann, wenn beide Urkreise sich berühren?

610. Erklärung. Liegen zwei Puncte auf derselben Seite des äußern Aehnlichkeitspunctes zweier Kreise und in solchen Entfernungen von ihm, daß das Rechteck aus

denselben gleich der zu diesem Aehnlichkeitspuncte gehörigen gemeinschaftlichen Potenz der Kreise ist, so sollen diese Puncte potenzhaltende in Beziehung auf den äußern Aehnlichkeitspunct genannt werden. Auf gleiche Weise sollen zwei Puncte potenzhaltende in Beziehung auf den innern Aehnlichkeitspunct heißen, wenn sie auf verschiedenen Seiten dieses Aehnlichkeitspunctes und in solchen Entfernungen von ihm liegen, daß das Rechteck aus denselben gleich ist der zu dem Aehnlichkeitspuncte gehörigen gemeinschaftlichen Potenz der Kreise.

Ein Kreis soll potenzhaltend in Beziehung auf den äußern oder innern Aehnlichkeitspunct zweier andern Kreise genannt werden, je nachdem die äußere oder innere Potenz für ihn gleich der gemeinschaftlichen Potenz beider Kreise für eben diesen Aehnlichkeitspunct ist.

Zus. 1. Jeder Kreis ist daher potenzhaltend in Beziehung auf den Aehnlichkeitspunct zweier andern, wenn er durch zwei potenzhaltende Puncte geht.

Zus. 2. Jeder Kreis, welcher in Beziehung auf den äußern Aehnlichkeitspunct zweier andern, die ganz außer einander liegen, potenzhaltend ist, schneidet den äußern Potenzkreis der letztern rechtwinkelig. Jeder Kreis dagegen, welcher in Beziehung auf den innern Aehnlichkeitspunct zwei solcher Kreise potenzhaltend ist, schneidet ihren innern Potenzkreis in den Endpuncten eines Durchmessers.

611. Jeder Kreis, welcher zwei andere, ganz außer einander liegende, gleichartig berührt, ist für deren äußern Aehnlichkeitspunct potenzhaltend; für den innern Aehnlichkeitspunct dagegen ist er potenzhaltend, wenn er die genannten Kreise ungleichartig berührt.

Frage: Gilt unser Satz noch, wenn der eine von den beiden Kreisen ganz innerhalb des andern liegt?

Zus. 1. Hat man daher eine beliebige Menge von Kreisen, von denen jeder zwei gegebene Kreise gleichartig berührt, so ist der äußere Aehnlichkeitspunct dieser beiden letztern ein Punct gleicher Potenzen für die erstern.

Zus. 2. Für ungleichartige Berührungen gilt etwas Aehnliches vom innern Aehnlichkeitspuncte.

Zus. 3. Berührt jeder von zwei beliebigen Kreisen zwei andere gleichartig, so geht die Potenzlinie der erstern durch den äußern Aehnlichkeitspunct der letztern.

Zus. 4. Bei ungleichartigen Berührungen geht unter diesen Umständen die Potenzlinie der berührenden Kreise durch den innern Aehnlichkeitspunct der berührten.

Zus. 5. Wenn von einer beliebigen Anzahl von Kreisen jeder zwei andere gleichartig berührt, so liegen die sämmtlichen äußern Aehnlichkeitspuncte je zweier in gerader Linie.

Zus. 6. Etwas Aehnliches gilt für die innern Aehnlichkeitspuncte bei ungleichartigen Berührungen.

612. Erklärung. Aehnlichkeitspolaren zweier Kreise sollen die beiden Geraden heißen, welche als Polaren zu den Aehnlichkeitspuncten dieser Kreise gehören; wie die Aehnlichkeitspuncte selbst, zu denen sie gehören, wollen wir sie durch die Beinamen äußere und innere unterscheiden.

Aehnlichkeitsaxe zweier Kreise dagegen heißt jede Gerade, welche die beiden Puncte, in denen diese Kreise von einem beliebigen dritten berührt werden, mit einem ihrer Aehnlichkeitspuncte verbindet (A. 578 und 579); sie zerfallen, wie die Aehnlichkeitspolaren, in äußere und innere.

Zus. 1. Hat man daher drei beliebige Kreise und sucht ihre sechs Aehnlichkeitspuncte, so erhält man jeden der vier Pole, die für jeden Kreis zu den vier Geraden gehören, auf welchen je drei jener Aehnlichkeitspuncte liegen (A. 577) als Durchschnittspunct zweier Aehnlichkeitspolaren.

Zus. 2. Berührt ein Kreis zwei andere, so fällt der zur Aehnlichkeitsaxe gehörige Pol des erstern mit dem Durchschnittspuncte der beiden gemeinschaftlichen Tangenten zusammen — ist also ein Punct auf der Potenzlinie der beiden berührten Kreise.

Frage: In wiefern bleibt unser Satz auch für den Fall noch richtig, wo die Mittelpuncte aller drei Kreise in einer geraden Linie liegen?

613. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig berührt, so geht jede ihrer beiden äußern Aehnlichkeitspolaren durch den Pol, der für eben diesen Kreis zur Aehnlichkeitsaxe gehört.

Zus. Jeder Berührungspunct liegt mit den beiden Polen, die in dem einen und andern der sich berührenden Kreise zur Aehnlichkeitsaxe gehören, in gerader Linie.

Frage: Gelten für ungleichartige Berührungen ähnliche Sätze?

614. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig berührt, und man verbindet die Berührungspuncte mit zwei solchen Endpuncten ihrer äußern Aehnlichkeitspolaren, die auf derselben Seite der Axe liegen, so schneiden sich diese beiden Geraden stets in einem Puncte, der auf der Peripherie des dritten Kreises liegt.

Frage: Wie heißt der entsprechende Satz, der für ungleichartige Berührungen gilt?

615. Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig berührt, so wird die Peripherie dieses letztern durch die Potenzlinie der beiden erstern in zwei Bogen getheilt, die denen beziehungsweise ähnlich sind, in die jeder der erstern Kreise durch seine äußere Aehnlichkeitspolare getheilt wird.

Anmerkung. Man könnte unsern Satz auch so aussprechen: Werden zwei Kreise von einem dritten gleichartig berührt, so liegt jeder Berührungspunct mit einem Endpuncte einer äußern Aehnlichkeitspolare und einem der Durchschnittspuncte der Potenzlinie unserer beiden in Rede stehenden Kreise mit der Peripherie des dritten in gerader Linie.

Frage: Wie heißt der entsprechende Satz für ungleichartige Berührungen?

616. Werden drei Kreise von einem vierten gleichartig berührt, so liegt der Durchschnittspunct ihrer Potenzlinien (A. 594) mit jedem Berührungspuncte und dem Durchschnittspuncte der beiden äußern Aehnlichkeitspolaren des Kreises, dem dieser Berührungspunct zugehört, in gerader Linie.

Frage: Wie heißt der entsprechende Satz für ungleichartige Berührungen?

617. In jedem Viereck (ABCD Fig. 147 a), welches um einen Kreis beschrieben ist, liegen die Halbirungspuncte seiner Diagonalen (G, H) mit dem Mittelpuncte (M) des Kreises in gerader Linie.

Bew. Die Gerade GM halbirt die Diagonale BD, denn:

$$\triangle AMD + \triangle BMC = \triangle BGC + \triangle AGD = \tfrac{1}{2} ABCD$$
$$\text{also } \triangle AMD - \triangle AGD = \triangle BGC - \triangle BMC$$
$$\triangle AGM + \triangle GMD = \triangle BGM + \triangle CGM$$
$$\triangle GMD = \triangle BGM$$
$$BH = HD$$

Anmerkung. Der vorstehende Satz gilt nicht blos für den Kreis, sondern auch für die übrigen Kegelschnitte. Schon der erste Entdecker desselben, Newton, kannte ihn in dieser Allgemeinheit. Einen von dem hier mitgetheilten ganz verschiedenen Beweis unseres speciellen Satzes für den Kreis gab der (für die Wissenschaft zu früh verstorbene) französische Mathematiker Durrande s. Gergonne Ann. XIV, p. 309. In derselben schätzbaren Zeitschrift finden sich auch Beweise des allgemeinern Satzes; ein synthetischer von Poncelet, in XII, p. 109, und ein analytischer von dem Herausgeber selbst in XI, p. 382.

618. Erklärung. Ein Vieleck, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, hat man in neuerer Zeit ein nach den Ecken centrisches Viereck zu nennen angefangen; ein Vieleck dagegen, welches um einen Kreis beschrieben ist, heißt centrisch nach den Seiten.

Der bequemen Kürze halber, welche diese Ausdrücke in vielen Fällen gestatten, werden wir uns ihrer bei den nächst folgenden Sätzen, das Viereck betreffend, bedienen.

619. Ist ein Viereck nach den Ecken und Seiten zugleich centrisch, so gehen die beiden Geraden, welche die Puncte verbinden, in denen der eingeschriebene Kreis je zwei Gegenseiten berührt, durch den Durchschnittspunct der Diagonalen (A. 580, Zus. 7), und halbiren die von den letztern gebildeten Winkel, stehen also auf einander senkrecht.

620. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

621. Ist ein Viereck nach den Ecken und Seiten zugleich centrisch, so liegt der Durchschnittspunct seiner Diagonalen mit den Mittelpuncten des innern und äußern Kreises in gerader Linie.

Anleitung zum Beweis. Der Diagonalendurchschnittspunct gehört sowohl für den einen als andern Kreis als Pol zu derselben Polare.

622. In jedem Vierecke, welches sowohl nach den Ecken als nach den Seiten centrisch ist, und in welchem sich die Diagonalen unter rechten Winkeln schneiden, halbirt der Mittelpunct des innern Kreises die Gerade, welche die Halbirungspuncte der beiden Diagonalen verbindet.

A. 617 — 248.

Zus. Daher ist der Mittelpunct des äußern Kreises vom Durchschnittspuncte der Diagonalen doppelt so weit entfernt, als der Mittelpunct des innern Kreises von eben jenem Puncte, und eben so weit als die Halbirungspuncte der Diagonalen von einander.

623. In einem sowohl nach den Ecken als nach den Seiten centrischen Vierecke verhalten sich die Entfernungen des Durchschnittspunctes der Diagonalen von den Endpuncten einer der Seiten, wie die Segmente, in welche eben diese Seite durch den Be-

rührungspunct des innern Kreises getheilt wird; die Diagonalen selbst verhalten sich wie die Summen der von ihren beiderseitigen Endpuncten an den innern Kreis gezogenen Tangenten d. h. wie die Summen der von Endpuncten der Diagonalen auslaufenden Segmente der Seiten, in welche letztere durch den innern Kreis getheilt werden.

624. In einem sowohl nach den Seiten, als nach den Ecken centrischen Vierecke ist das Rechteck aus zwei solchen, durch die Berührungspuncte des innern Kreises gebildeten Seitensegmenten, welche von den beiden Endpuncten einer Diagonale auslaufen, gleich dem Quadrate vom Halbmesser des innern Kreises.

Anmerkung. Diesen Satz, dessen Beweis leicht ist, machte zuerst bekannt Durrande; s. Gergonne Annal. XV, p. 140.

625. Nimmt man in einem nach den Ecken und Seiten centrischen Vierecke von den durch den innern Kreis gebildeten Seitensegmenten die Summe sowohl der beiden, welche von den Endpuncten der einen Diagonale auslaufen, als der, welche von den Endpuncten der andern ausgehen, und bildet aus ihnen ein Rechteck, so ist der Inhalt desselben um das Quadrat vom Durchmesser des eingeschriebenen Kreises kleiner als das Rechteck aus den beiden Diagonalen.

276 — A. 623.

626. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze, so ist das Rechteck, welches aus Summen von Seitensegmenten auf die vorher näher bezeichnete Art gebildet wird, um das Quadrat vom Durchmesser des innern Kreises größer als das vierfache Rechteck aus den beiden Segmenten, in welche die beide Halbirungspuncte der Diagonalen verbindende Gerade durch den Mittelpunct des innern Kreises getheilt wird.

A. 215 — 93.

Zus. Daher sind in einem nach Ecken und Seiten centrischen Viereck das Rechteck aus den beiden Diagonalen und das Vierfache des Rechtecks aus den Linien zwischen deren Halbirungspuncten und dem Centrum des innern Kreises zusammen doppelt so groß als das Rechteck aus den Tangentensummen, welche man aus den Endpuncten jeder Diagonale an den innern Kreis zieht.

627. Verlängert man in einem nach den Seiten und Ecken centrischen Vierecke beide Paare der gegenüberliegenden Seiten bis zum Durchschnitt, und beschreibt um jedes der vier so entstandenen Dreiecke einen Kreis, so ist der Unterschied der Halbmesser zweier solcher Kreise, die um zwei zusammengehörige d. h. eine gemeinschaftliche Spitze habende Dreiecke beschrieben sind, gleich dem Unterschiede der beiden andern.

628. Sind in der Ebene eines Kreises drei nicht in gerader Linie liegende Puncte gegeben, und man sucht die ihnen für den Kreis zugehörigen Polaren, verlängert dieselben bis zum Durchschnitt, verbindet in dem so entstandenen Dreiecke jeden der genannten Puncte mit derjenigen Ecke, die seiner Polare gegenüberliegt und verlängert diese Geraden bis zum Durchschnitt mit den Gegenseiten oder Polaren, und verbindet endlich diese letztern Durchschnittspuncte unter einander, so sind die sechs Puncte, in denen diese Verbindenden die Peripherie unseres Kreises schneiden — wenn anders ein Schneiden überhaupt Statt findet — die Spitzen zweier Dreiecke, deren Seiten einzeln durch die drei gegebenen Puncte gehen.

629. Sind in der Ebene eines Kreises drei beliebige sich schneidende gerade Linien gegeben, und man sucht die ihnen zugehörigen Pole, verbindet darauf jeden derselben mit derjenigen Ecke des von den gegebenen Geraden gebildeten Dreiecks, welche der Seite, zu der der Punct als Pol gehört, gegenübersteht, verlängert diese Transversalen bis zum Durchschnitt mit den genannten Gegenseiten oder Polaren, und verbindet endlich deren Fußpuncte unter einander, so sind die sechs Durchschnittspuncte dieser letztern mit dem Umkreise — wenn ein Schneiden überhaupt statt findet — die Berührungspuncte zweier um unsern Kreis zu beschreibenden Dreiecke, deren Spitzen einzeln auf den zuerst genannten drei gegebenen geraden Linien liegen.

Aufgaben.

630. Den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller der Kreise zu bestimmen, die einen Halbmesser von vorgeschriebener Länge haben und durch einen gegebenen Punct gehen.

631. Den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller der Kreise zu bestimmen, welche, bei vorgeschriebener Größe ihrer Halbmesser, einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis berühren.

Frage: Ist der gesuchte Ort für äußere und innere Berührung derselbe oder nicht?

632. Die beiden geometrischen Oerter für die Mittelpuncte aller derjenigen Kreise zu bestimmen, welche, bei vorgeschriebener Größe ihrer Halbmesser, eine der Lage nach gegebene Gerade berühren.

633. Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Halbmesser hat und durch zwei gegebene Puncte hindurchgeht.

Anmerkung. In vielen Fällen giebt es zwei Kreise, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten, in einem Falle aber nur einen und in noch andern endlich gar keinen d. h. die Aufgabe ist unmöglich. Unter welchen Umständen findet das eine, das andere und das dritte Statt?

634. Einen Kreis von vorgeschriebenem Halbmesser zu construiren, so daß er zwei der Lage nach gegebene Gerade berührt.

Anmerkung. Meist giebt es vier Kreise, die der Forderung Genüge leisten. In einem besondern Falle aber giebt es unzählige und in einem andern endlich gar keinen d. h. die Aufgabe ist unmöglich. Welche sind die beiden letztern Fälle?

635. Einen Kreis mit vorgeschriebenem Halbmesser zu construiren, der durch einen gegebenen Punct geht und eine der Lage nach gegebene Gerade berührt.

Frage: In welchem Falle lassen sich zwei Kreise von der verlangten Beschaffenheit beschreiben, in welchem nur einer, und in welchem endlich gar keiner?

636. Einen Kreis zu construiren, der, bei vorgeschriebener Länge seines Halbmessers, durch einen gegebenen Punct geht, und einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis berührt.

Frage: In welchem Falle giebt es vier (zwei für äußere, zwei für innere Berührung) Kreise, welche den Bedingungen unserer Aufgabe genügen, in welchem Falle nur zwei, in welchem nur einen, und in welchem gar keinen?

637. Einen Kreis zu construiren, der bei vorgeschriebener Länge seines Radius eine der Lage nach gegebene Gerade und einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis berührt.

Frage: In welchem Falle lassen sich vier Kreise beschreiben, die den Forderungen genügen, in welchem nur zwei, in welchem nur einer, und in welchem endlich gar keiner?

638. Einen Kreis zu construiren, der bei vorgeschriebener Größe zwei der Lage und Größe nach gegebene Kreise berührt.

Frage: In welchem Falle sind vier Kreise von der in der Aufgabe bezeichneten Beschaffenheit möglich, in welchem nur zwei, in welchem gar keiner?

639. Den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller derjenigen Kreise zu bestimmen, deren Halbmesser von vorgeschriebener Größe und deren Peripherie eine vorgeschriebene Entfernung von einem gegebenen Punct haben.

640. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Halbmesser von vorgeschriebener Länge, und dessen Umkreis von zwei gegebenen Puncten vorgeschriebene Entfernungen hat.

Frage: Welcher Zusammenhang findet zwischen dieser und der vorhergehenden Aufgabe Statt?

641. Die beiden geometrischen Oerter für die Mittelpuncte aller der Kreise zu finden, die, bei gegebener Größe des Halbmessers, eine der Lage nach gegegebene Gerade so schneiden, daß das Stück, welches Sehne ist, eine vorgeschriebene Länge hat.

Anmerkung. Anstatt des umständlicheren Ausdrucks: ein Kreis schneidet eine der Lage nach gegebene Gerade so, daß das innerhalb desselben gelegene Stück der letztern eine vorgeschriebene Länge hat; wollen wir der nöthigen Kürze halber künftig blos sagen: Ein Kreis schneidet eine gegebene Gerade für eine gegebene Länge, und einer ähnlichen Abkürzung wollen wir uns beim Schneiden zweier Kreise bedienen.

642. Einen Kreis zu beschreiben, der, bei vorgeschriebener Länge des Halbmessers, zwei der Lage nach gegebene gerade Linien für eine vorgeschriebene Länge schneide (A. 641, Anm.).

Frage: In welchem Zusammenhange steht diese Aufgabe mit der frühern in 634?

643. Einen Kreis von vorgeschriebener Größe so zu construiren, daß seine Peripherie von einem gegebenen Puncte eine vorgeschriebene Entfernung hat, und er eine der Lage nach gegegebene Gerade für eine bestimmte Länge (A. 641, Anm.) schneidet.

Frage: Wie hängt diese Aufgabe mit der frühern in 635 zusammen?

644. Den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller der Kreise zu finden, welche für einen gegebenen Halbmesser einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis für eine vorgeschriebene Länge d. h. so schneiden, daß die gemeinschaftliche Sehne eine vorgeschriebene Länge hat.

645. Einen Kreis zu construiren, der einen gegebenen Halbmesser hat und zwei der Lage und Größe nach gegebene Kreise für vorgeschriebene Längen schneidet.

Frage: In welcher Beziehung steht diese Aufgabe mit der frühern in 638?

646. Wenn ein Kreis und in seiner Ebene ein beliebiger Punct gegeben ist, durch letzteren eine Gerade so zu ziehen, daß sie den ersteren für eine gegebene Länge schneidet (A. 641, Anm.).

Anmerkung. Liegt der Punct außerhalb des Kreises, so kann die Aufgabe nur dadurch unmöglich werden, daß die vorgeschriebene Länge zu groß ist, für Puncte innerhalb dagegen eben so gut auch dadurch, daß diese Länge zu klein. Welches ist die Gränze für diese Unmöglichkeit in dem erstern, und welches sind ihre beiden Gränzen im letztern Falle?

647. Wenn zwei Kreise der Lage und Größe nach gegeben sind, eine Gerade zu ziehen, welche beide Kreise berührt.

Frage: In welchem Falle verlangt die Aufgabe etwas Unmögliches?

Anmerkung. Ist die Aufgabe möglich, so lassen sich jederzeit vier solcher gemeinschaftlichen Tangenten ziehen.

648. Wenn zwei Kreise der Lage und Größe nach gegeben sind, eine Gerade so zu ziehen, daß sie die Kreise für vorgeschriebene Längen (A. 644) schneidet.

Anmerkung. Es lassen sich, so fern die Aufgabe überhaupt möglich ist, vier Linien ziehen, die den Bedingungen genügen.

Frage: In welchem Zusammenhange steht diese Aufgabe mit der vorhergehenden?

649. Den geometrischen Ort für die Mittelpuncte der Kreise zu finden, welche einen gegebenen Halbmesser haben und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis rechtwinkelig schneiden (A. 595).

650. Den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller der Kreise zu finden, welche zwei der Lage und Größe nach gegebene Kreise rechtwinkelig schneiden.

651. Einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene Kreise rechtwinkelig schneidet.

652. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei der Lage nach gegebene, nicht parallele Linien berührt und durch einen gegebenen Punct geht, der auf der Geraden liegt, welche den von den beiden erstern gebildeten Winkel halbirt.

Auflösung: Errichte auf der Winkelhalbirenden in dem gegebenen Puncte eine Senkrechte 2c.

Frage: Aendert sich die Sache wesentlich, wenn die beiden gegebenen Geraden parallel laufen?

653. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei der Lage nach gegebene nicht parallele Gerade berührt und durch einen gegebenen Punct geht.

Auflösung: Construire einen beliebigen von den beide gegebene Linien berührenden Kreisen, verbinde den gegebenen Punct mit dem Durchschnittspuncte der gegebenen Geraden und erwäge, daß letzterer Punct der äußere Aehnlichkeitspunct für den bereits beschriebenen und für den gesuchten Kreis ist 2c.

654. Einen Kreis zu construiren, der durch zwei gegebene Puncte geht und eine der Lage nach gegebene Gerade berührt.

Auflösung: Verbinde die beiden Puncte, verlängere diese Gerade, bis sie die gegebene schneidet, und wende nun die Sätze 259 und 248 an.

Frage: Wie ändert sich die Auflösung unserer Aufgabe, wenn die Verbindungslinie der beiden gegebenen Puncte mit der gegebenen Geraden parallel läuft?

655. Wenn zwei Puncte (A, B Fig. 148 und 149) und ein Kreis gegeben, auf der Peripherie des letztern den Punct (D) zu finden, durch welchen sich zwei Sehnen (BDE und ADF) so ziehen lassen, daß sie einzeln durch die gegebenen Puncte gehen und daß die ihre nicht gemeinschaftlichen Endpuncte verbindende Gerade (EF) parallel ist der durch die beiden gegebenen Puncte bestimmten geraden Linie (AB).

Auflösung: Nimm, wenn die beiden Puncte außerhalb des Kreises liegen (Fig. 148) BG gleich der dritten Proportionale zu BA und der Tangente, die sich von B aus an den Kreis ziehen läßt; ziehe endlich die Tangente GE, und verbinde E mit B, so ist der so erhaltene Punct D der gesuchte. Liegen die beiden Puncte innerhalb des Kreises (Fig. 149), so nimm BG gleich der dritten Proportionale zu AB und der zu B gehörigen halben Mittelsehne, ziehe die Tangente GE 2c.

Frage: Sind die zweiten Tangenten, die sich in beiden Fällen von G an den Kreis ziehen lassen, für die Auflösung unserer Aufgaben ganz unbrauchbar?

656. Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt und durch zwei gegebene Puncte geht.

Auflösung: Suche für die gegebenen Puncte (A und B Fig. 148 und 149) nach Anleitung von A. 655 auf der Peripherie des gegebenen Kreises den Punct D, für welchen EF ∥ AB, so ist derselbe der Berührungspunct zwischen dem gegebenen und dem gesuchten Kreise.

Anmerkung. Es giebt in dem einen so wie in dem andern Falle (Fig. 148 und 149) zwei Kreise, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten.

657. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene (ungleiche) Kreise berührt und durch einen gegebenen Punct geht.

Anleitung zur Auflösung. Verbinde den gegebenen Punct mit einem der Aehnlichkeitspuncte (A. 576) z. B. dem äußern, suche zu dieser Geraden und den von dem genannten Aehnlichkeitspuncte an die beiden Kreise gezogenen Tangenten die vierte Proportionale, schneide ihre Länge auf der zuerst gezogenen Geraden vom Aehnlichkeitspuncte aus ab und beschreibe nach Anleitung von A. 656 einen Kreis, der durch diesen zuletzt erhaltenen Punct und den ursprünglich gegebenen geht und einen der gegebenen Kreise berührt.

Anmerkung. Soll der gesuchte Kreis die gegebenen gleichartig d. h. beide zugleich von außen oder beide von innen berühren, so muß man zu der angedeuteten Auflösung den äußern Aehnlichkeitspunct der beiden gegebenen Kreise nehmen; für ungleichartige Berührungen dagegen den innern. Es lassen sich in Allem vier Kreise beschreiben, die das in unserer Aufgabe Verlangte leisten.

658. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Auflösung: Ziehe mit jeder der gegebenen Geraden auf jeder Seite in einer dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleichen Entfernung eine Parallele, und construire nun (A. 652) einen Kreis, welcher durch den Mittelpunct des gegebenen geht und zwei solche von den vier Hülfslinien berührt, welche beide entweder auf den einander zugekehrten, oder auf den von einander abgekehrten Seiten der mit ihnen parallelen gegebenen Geraden liegen.

659. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punct geht, eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Auflösung: Ziehe den Kreisdurchmesser, welcher auf der gegebenen Geraden senkrecht steht, verbinde, je nachdem die Berührung zwischen den beiden Kreisen eine äußere oder innere sein soll, den unserer Geraden entferntern oder nähern Scheitel desselben mit dem gegebenen Puncte, schneide auf dieser Geraden selbst oder auf ihrer Verlängerung von letzterem Puncte aus ein Stück ab, welches gleich ist der vierten Proportionale zu der zuletzt genannten Linie, dem Durchmesser und der Entfernung seines (zur Auflösung benutzten) Scheitels von der gegebenen Geraden, und beschreibe (A. 654) den Kreis, welcher durch diesen Punct und den gegebenen geht und die gegebene Gerade berührt.

660. Einen Kreis zu beschreiben, welcher die gegebene Gerade und zwei gegebene (ungleiche) Kreise berührt.

Auflösung: Ziehe mit der gegebenen Geraden eine Parallele, welche von ihr um den Halbmesser des kleinern Kreises entfernt ist, beschreibe concentrisch mit dem größern Kreise einen zweiten, dessen Halbmesser gleich dem Unterschiede der Radien der beiden gegebenen Kreise ist, und beschreibe nun (A. 659) einen Kreis, welcher den Hülfskreis und die Parallele berührt und durch den Mittelpunct des kleinern der gegebenen Kreise geht, so ist dieser concentrisch mit dem gesuchten rc.

Frage: Ist es gleichgültig, auf welcher Seite der gegebenen Geraden man die Parallele zieht?

661. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene (ungleiche) Kreise berührt.

Auflösung: Beschreibe mit dem größten und dem mittlern der gegebenen Kreise zwei andere concentrisch, deren Halbmesser einzeln gleich dem Ueberschusse des Halbmessers jedes der genannten Kreise selbst über den des dritten (kleinsten) und construire nun (A. 657) einen Kreis, welcher die beiden Hülfskreise berührt und durch den Mittelpunct des kleinsten unter den gegebenen geht, so ist dieser mit dem gesuchten concentrisch rc.

Anmerkung 1. Eine andere Lösung dieser letzten Aufgabe, welche vor der hier mitgetheilten den Vorzug hat, daß sie unabhängig von allen frühern verwandten Aufgaben ist, ergiebt sich unmittelbar aus dem frühern Lehrsatze A. 616.

Anmerkung 2. Die beiden bekannten Aufgaben, auf denen unmittelbar die Construction eines Kreises um und in ein gegebenes Dreieck beruht, nebst den acht in den vorhergehenden Nummern 653, 654, 656 — 661, mitgeheilten machen den Inhalt des sogenannten Apollonianischen Problems von den Berührungen aus. Apollonius behandelte dieses Problem in einer besondern, aus zwei Büchern bestehenden Schrift, welche den Titel: περὶ ἐπαφῶν führte, die aber leider gleich so manchen andern schätzbaren Arbeiten desselben so wie anderer ausgezeichneter griechischer Mathematiker verloren gegangen ist. Die Hülfssätze zu den einzelnen Fällen des Problems, die uns Pappus im siebenten Buche seiner mathematischen Sammlungen aufbewahrt hat, sind auch darum sehr schätzenswerth für uns, weil sie näheres Licht über die Behandlungsweise des Apollonius verbreiten. Nach ihnen darf man mit Grund vermuthen, daß die von uns im Vorhergehenden angedeuteten Auflösungen in der Hauptsache mit den von Apollonius gegebenen übereinstimmen.

Anmerkung 3. Der nöthigen Kürze halber ist Alles weggeblieben, was sich auf

die Aufzählung und Erörterung der oft ziemlich vielen verschiedenen Fälle bezieht, die bei einzelnen zu unserm Probleme gehörigen Aufgaben möglich sind, und ihren Grund in der möglichen Verschiedenheit der gegenseitigen Lage der gegebenen Kreise (für diese kömmt auch ihre gegenseitige Größe in Betracht) Linien und Puncte und in der doppelten Art der Berührung zweier Kreise haben. Wir überlassen eine solche Untersuchung aller möglichen Fälle dem eignen Fleiße der Leser, denen wir vorzugsweise diese Anhänge bestimmt haben, und empfehlen sie ihnen als eine gewiß recht nützliche Arbeit. Diejenigen, welche hierbei eines Führers bedürfen sollten, finden ihn in der kleinen Schrift:

G. U. A. Vieth Leitfaden zu vollständiger Bearbeitung des wiederhergestellten Apollonius ꝛc. Dessau 1820 in 4.

Anmerkung 4. Von den zahlreichen Bearbeitern des Apollonianischen Problems wollen wir nur folgende nennen:

Fr. Vieta: Apollonius Gallus, seu exsuscitata Apollonii Pergaei περὶ ἐπαφῶν geometria in seinen opp. ed. Schooten p. 325—346.

J. Wilh. Camerer: Apollonii de tactionibus quae supersunt. Goth. et Amstelod. 1795.

C. G. Haumann: Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen. Breslau 1817.

W. Ch. Christmann: Apollonius Suevus sive tactionum problema nunc demum restitutum. Tubing. 1821, 8.

662. Wenn drei Puncte gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, dessen Peripherie von jedem derselben eine vorgeschriebene Entfernung hat.

Frage: Wie hängt diese Aufgabe mit der nächst vorhergehenden zusammen?

663. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Puncte geht, und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis so schneidet, daß die gemeinschaftliche Sehne eine vorgeschriebene Länge hat.

664. Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punct eine Sehne so zu ziehen, daß die beiden Stücke, in welche sie in diesem Puncte getheilt wird, einen vorgeschriebenen Längenunterschied haben.

Frage 1. Welche Bedingungen müssen erfüllt werden, wenn die Aufgabe nicht etwas Unmögliches verlangen soll?

Frage 2. Kann der gegebene Punct nicht auch außerhalb des Kreises liegen?

665. Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punct (A Fig. 150) eine Sehne (DE) so zu ziehen, daß die Stücke, in welche sie in demselben getheilt wird, ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben.

Auflösung: Ziehe den Durchmesser BAH; nimm AM so, daß BA : AM gleich dem vorgeschriebenen Verhältnisse; und mache AD = AG gleich der mittlern Proportionale zwischen AM und AH, so ist DAE die gesuchte Sehne.

Frage 1. Aendert sich etwas Wesentliches, wenn der gegebene Punct außerhalb des Kreises liegt?

Frage 2. Welche Gränze darf die Größe des gegebenen Verhältnisses nicht übersteigen, damit die Aufgabe nicht unmöglich werde?

666. Wenn zwei Puncte in der Peripherie eines Kreises gegeben sind, einen dritten zu finden, dessen Entfernungen von den gegebenen ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Auflösung. Verbinde die gegebenen Puncte, theile diese Sehne nach dem vorgeschriebenen Verhältnisse, verbinde diesen Theilpunct mit dem Halbirungspuncte eines der Sehne gehörigen Bogen und verlängere dieselbe bis zum Durchschnitt mit dem andern Bogen.

Anmerkung. Es lassen sich vier Puncte finden, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

667. Aus einem der Durchschnittspuncte zweier sich schneidender Kreise eine Gerade so zu ziehen, daß das zwischen den Umfängen beider enthaltene Stück von vorgeschriebener Länge ist.

Auflösung. Beschreibe über der Centrale beider Kreise als Durchmesser einen dritten, trage in diesen von einem der Endpuncte des Durchmessers die Hälfte der gegebenen Länge als Sehne ein und ziehe mit derselben durch einen der Durchschnittspuncte beider Kreise eine Parallele ꝛc.

668. Ein Dreieck zu beschreiben, das einem (ABC Fig. 151) von zwei gegebenen gleichflächig und dem andern (BCD) ähnlich ist.

Auflösung: Verlängere DC bis zum Durchschnitt mit AE, welche ∥ BC; beschreibe über DE einen Halbkreis, errichte in C die Senkrechte CF und beschreibe über dieser ein Dreieck CGF, welches ähnlich mit BCD und in welchem CF die der CD entsprechende Seite ist.

Anmerkung. Haben die beiden Dreiecke nicht, wie hier angenommen worden, eine gemeinschaftliche Seite, so läßt sich leicht über einer Seite von ABC, welches den In-

halt des gesuchten Dreiecks bestimmt, ein solches beschreiben, welches dem andern gegebenen ähnlich ist.

Zus. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

669. In einem gegebenen Dreiecke drei Transversalen so zu ziehen, daß sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben und je zwei von ihnen Winkel von vorgeschriebener Größe bilden.

Anmerkung. Die drei gegebenen Winkel müssen natürlich immer die Bedingung erfüllen, daß ihre Summe gleich zwei Rechten ist.

Auflösung. Beschreibe über den Seiten als Sehnen Kreise, so daß die nach außen hin liegenden Abschnitte derselben zu ihren Peripheriewinkeln beziehungsweise die drei gegebenen Winkel haben. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der drei Umkreise ist der gesuchte Punct.

670. Ein Dreieck zu construiren, das einem gegebenen ähnlich ist, und dessen Seiten (nöthigenfalls verlängert) durch drei gegebene (nicht in gerader Linie liegende) Puncte gehen.

Auflösung. Verbinde die drei Puncte zu einem Dreieck; suche in diesem nach Anleitung von A. 669 den Punct, in welchem sich drei Transversalen unter den Winkeln des gegebenen Dreiecks, dem das gesuchte ähnlich sein soll, schneiden; jede andere Ternion von Transversalen, welche einzeln mit den schon gefundenen gleiche Winkel bilden, bestimmt in ihren gegenseitigen Durchschnittspuncten ein Dreieck von der verlangten Beschaffenheit.

Anmerkung. Es lassen sich also unendlich viele solcher Dreiecke finden.

671. Wenn eine gerade Linie, außerhalb und zwar auf derselben Seite von ihr zwei Puncte gegeben sind, auf ersterer den Punct zu finden, von welchem aus zwei Linien, nach den gegebenen Puncten gezogen, mit der Geraden zu beiden Seiten Winkel bilden, die einen vorgeschriebenen Unterschied haben.

Auflösung. Fälle aus einem der Puncte auf die Gerade eine Senkrechte, verlängere sie über ihren Fußpunct hinaus um ihre eigne Länge; verbinde diesen Endpunct mit dem andern der gegebenen Puncte und beschreibe über dieser Linie als Sehne einen Kreisabschnitt, dessen zugehöriger Peripheriewinkel gleich dem Nebenwinkel des vorgeschriebenen Unterschiedes rc.

Frage: Wie ändert sich unsere Aufgabe, wenn anstatt des Unterschiedes, die Summe der genannten Winkel gegeben ist?

672. Wenn eine gerade Linie und außerhalb derselben (und zwar auf derselben Seite) zwei Puncte gegeben sind, auf ersterer den Punct, der solche Lage hat, daß die Geraden, welche ihn mit den gegebenen verbinden, mit der durch die letztern gehenden Linie Winkel bilden, welche einen vorgeschriebenen Unterschied haben.

Auflösung. Sie unterscheidet sich von der für die vorige Aufgabe nur dadurch, daß der Kreisabschnitt, den man beschreibt, einen Peripheriewinkel faßt, welcher das Supplement zu der Summe des vorgeschriebenen Unterschiedes und des doppelten Winkels ist, den die beiden gegebenen Geraden mit einander bilden.

673. Ein Viereck zu construiren, welches nach den Ecken und Seiten zugleich centrisch ist, wenn eine seiner Seiten und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

674. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels eine Gerade von vorgeschriebener Länge so zu ziehen, daß das entstandene Dreieck einen vorgeschriebenen Flächenraum hat.

675. In ein Dreieck drei Kreise so zu beschreiben, daß jeder von ihnen sowohl zwei Seiten als auch die beiden andern Kreise berührt.

Auflösung. Verbinde den Mittelpunct des innern Kreises mit den Spitzen des Dreiecks; beschreibe in zwei der so entstandenen drei Dreiecke ihre innern Kreise; ziehe von dem Puncte, wo der eine von ihnen die Seite des Urdreiecks berührt, an den andern eine Tangente, und beschreibe endlich einen Kreis, welcher diese Tangente, und die beiden Seiten des Urdreiecks berührt, welche auch von den beiden vorher genannten Hülfskreisen berührt werden, so ist dieser einer der drei gesuchten Kreise. Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man die beiden andern

676. In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten (oder ihre Verlängerungen) durch drei gegebene Puncte gehen.

A. 628.

677. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Spitzen auf drei der Lage nach gegebenen geraden Linien liegen.

A. 629.

Achtes Buch.

Von dem Messen der Winkel durch Kreisbogen, und dem Berechnen derselben durch Sehnen, Sinusse, Tangenten und Secanten.

Erster Abschnitt.

Von dem Messen der Winkel durch Kreisbogen.

---

335. Lehrsatz. In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen verhalten sich sowohl die Centri- als auch die Peripherie-Winkel eben so wie die Bogen die zwischen ihren Schenkeln liegen. Dasselbe gilt für die Kreisausschnitte; und jeder Centriwinkel verhält sich zu vier Rechten wie der zwischen seinen Schenkeln enthaltene Bogen zum ganzen Umkreise.

Eucl. VI, 33. — L. G. II, 17.

Vorbereitung. Nimm die Bogen GB und BJ (Fig. 170) gleich AG, und eben so die Bogen MN, und NO gleich KM, ziehe CB, CJ und LN, LO.

Beweis. Erster Theil. Aus der Betrachtung, daß Bogen AJ und W. ACJ Gleichvielfache von Bogen AG und von W. ACG so wie auch Bogen KO und W. KLO dieselben Vielfachen von Bogen KM und von W. KLM; dann aus 148, 245, Z. 1, und 244.

Zweiter Theil. Aus dem ersten.

Dritter Theil. Aus 233, Zus. 3.

Zus. 1. Man kann also einen Bogen als Maaß für einen (ihm zugehörigen) Centriwinkel betrachten, so lange man von einem und demselben Kreise spricht. Wir werden uns dieser Ausdrucksweise in dem Folgenden bedienen.

L. G. II, 17, Zus.

Zus. 2. Das Maaß für einen Peripheriewinkel ist die Hälfte des ihm zugehörigen Bogens.

L. G. II, 18.

336. Lehrsatz. Bogen ungleicher Kreise, zu denen gleiche Centri- oder Peripheriewinkel gehören, verhalten sich zu einander, wie die Umkreise, von denen sie Theile ausmachen; und umgekehrt, verhalten sich in ungleichen Kreisen zwei Bogen wie die ganzen Umkreise, so sind

die zu ihnen gehörigen Centri- oder Peripheriewinkel von gleicher Größe.

Beweis. Erster Theil. Aus dem dritten Theile des vorigen Satzes; und 143.

Zweiter Theil. Indirect durch Hülfe des ersten Theils.

Zus. 1. In ungleichen Kreisen stehen also gleiche Winkel auf ähnlichen Bogen (316, Zus. 2).

Zus. 2. Die Bogen ungleicher Kreise, zu denen gleiche Winkel gehören, verhalten sich wie die Umkreise, oder wie die Kreishalbmesser und diese wie die Sehnen dieser Bogen (316, 196).

Zus. 3. Umgekehrt, wenn Bogen ungleicher Kreise sich wie die ganzen Umkreise oder wie die Halbmesser verhalten, so sind die zu ihnen gehörigen Winkel gleich, und ihre Sehnen verhalten sich wie die Halbmesser.

Zus. 4. Darum sind in allen Kreisen die Bogen das eigentliche und natürliche Maaß für die Centriwinkel, und die Hälften der Bogen das Maaß für die Peripheriewinkel.

Zus. 5. Dieselben Halbmesser fassen auf den Umfängen concentrischer d. h. um denselben Mittelpunct beschriebener Kreise ähnliche Bogen zwischen sich.

Zus. 6. Das Messen der Winkel durch Grade, Minuten, Sekunden ꝛc. beruht auf unserm Satze und auf 316.

Anmerkung 1. Einem alten Gebrauche zufolge theilt man den Umkreis in 360 gleiche Theile und nennt jeden derselben Grad; einen Grad theilt man wiederum in 60 Minuten, eine Minute in 60 Sekunden ꝛc. Auf einen rechten Winkel, zu dem der vierte Theil des Umkreises als Bogen gehört, kommen also 90°, und die Winkel eines Dreiecks betragen zusammen 180°.

Anmerkung 2. Darauf und auf Zus. 5 beruht die Einrichtung des in allen Reißzeugen unter dem Namen Transporteur befindlichen Werkzeugs; darauf gründen sich im Allgemeinen alle zum Winkelmessen dienende Instrumente, welchen Namen sie auch führen mögen.

Die Gestalt eines Transporteur ist entweder die eines Halbkreises oder die eines Rechtecks; in beiden Fällen ist der Rand in Grade (zuweilen auch halbe Grade) abgetheilt; aber nur im erstern erscheinen alle Grade als gleich; im letztern als ungleich.

Es stelle der Halbkreis AFKA (Fig. 171) einen Transporteur dar, dessen Mittelpunct C durch einen feinen Strich (oder Einschnitt u. dergl.) auf der Linie AK bezeichnet ist. Die gleichen Bogen AB, BD ꝛc. gehören zu gleichen Centriwinkeln ACB, BCD ꝛc.; und das Doppelte, Dreifache ꝛc. des Bogens zum Doppelten, Dreifachen ꝛc. eines dieser Winkel. Hat dagegen das Instrument die Gestalt eines Rechtecks bBJi, so werden die Grade auf den Seiten bB, BJ, Ji durch die Puncte d, e, f, g, h angezeigt, in denen die Rechtecksseiten von den Halbmessern geschnitten werden, die man nach den Endpuncten der gleichen Bogen AB, BD ꝛc. des Halbkreises zieht, in welchem das Rechteck steht. Die Natur der Sache bringt es mit sich, daß nicht alle zwischen je zwei benachbarten Radien enthaltenen Stücke der Rechtecksseiten, Bd, de, ef, fg, gh, hJ, von gleicher Länge sein können.

Der Gebrauch des Instrumentes unter der einen und der andern Form ist derselbe, und fällt in die Augen. Man legt den Durchmesser AK auf den einen Schenkel des Winkels, so daß der Mittelpunct C mit dem Scheitel zusammenfällt. Die Zahl, die an der Stelle z. B. D oder d sich befindet, wohin der zweite Schenkel fällt, zeigt an, wie viel Grade dieser Winkel oder der zu messende Bogen in sich schließt.

Anmerkung 3. Späterhin, und namentlich als man in Frankreich die Decimaltheilung für Maaße und Gewichte einführte, theilte man den rechten Winkel oder den vierten Theil des Umkreises, auch Quadrant genannt, nicht in 90 sondern in 100 Grade, jeden Grad in 100 Minuten, eine Minute in 100 Sekunden ꝛc. Trotz der großen Vortheile, welche eine solche Eintheilung gewährt, hat sie sich doch nicht allgemein geltend machen können, ja in Frankreich selbst scheint man in der neuesten Zeit immer

mehr zum Alten wieder zurückzukehren. Es wird daher auch hier die alte Eintheilung beibehalten werden.

Anmerkung 4. So wie man den Umkreis in Theilen des Halb- oder Durchmessers ausdrückt, eben so kann man auch umgekehrt den Halbmesser in Theilen des Umkreises d. h. in Graden, Minuten, Sekunden ꝛc. ausdrücken. Hierzu dient folgender:

337. Lehrsatz. Der Bogen, der von gleicher Länge ist mit dem Radius, beträgt 57 Grad 17 Minuten 44,8 Sekunden.

Bew. Es ist: Halber Umkreis : Radius $= 355 : 113$ oder

$$180^\circ : r = 355 : 113$$

$$\text{also } r = \frac{113}{355} \cdot 180^\circ = 57^\circ\ 17'\ 44''8$$

Zus. 1. Der Halbmesser in Sekunden ausgedrückt giebt: 206264″8.

Anmerkung. Daß der Radius in Sekunden ausgedrückt werden soll, deutet man an durch r''.

Zus. 2. Ein Bogen, der in Theilen des Halbmessers als Einheit dargestellt ist, wird in Sekunden ausgedrückt dadurch, daß man ihn durch r'' multiplicirt; und umgekehrt ein in Sekunden angegebener Bogen wird in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, wenn man ihn durch r'' dividirt.

338. Lehrsatz. Kreisabschnitte (ABC, DEF Fig. 158) sind ähnlich, wenn die in ihnen stehenden Winkel gleich; Kreisausschnitte sind ähnlich, wenn die zugehörigen Halbmesser gleiche Winkel bilden.

Beweis. Erster Theil. Durch Hülfe von 335 zeigt man, daß die Bogen, auf denen die Winkel ABC und DEF stehen, sich wie die ganzen Umkreise verhalten, daß mithin dasselbe auch für die Bogen ABC und DEF gilt; und wendet dann 316, Z. 3 an.

Zweiter Theil. Aus der Gleichheit der Centriwinkel, der daraus folgenden Aehnlichkeit der Bogen, und dem gleichen Verhältniß der letztern zum Halbmesser (335 und 316, Zus. 2).

Anmerkung. Euclides hat diesen Satz unter die Axiome aufgenommen, die er seinem dritten Buche vorausschickt.

Zus. 1. Die Bogen ähnlicher Abschnitte oder Ausschnitte verhalten sich wie die Kreishalbmesser oder wie die zu den Bogen zugehörigen Sehnen.

L. G. IV, 11 Zus.

Zus. 2. Daher sind ähnliche Kreisabschnitte, die auf gleichen Sehnen stehen, gleich.

Zus. 3. Man kann also über einer geraden Linie nicht zwei Kreisabschnitte beschreiben, die ähnlich und ungleich sind.

Eucl. III, 23.

Zus. 4. Aehnliche Ausschnitte und Abschnitte stehen in dem zweifach höhern Verhältniß der zugehörigen Sehnen, oder der Durchmesser der Kreise, zu denen sie gehören (222, und 316, Z. 3).

L. G. IV, 11, Zus. — Tacquet zu Eucl. XII, 2.

339. Lehrsatz. Bogen (AG, DE Fig. 157) ungleicher Kreise, zu denen ungleiche Winkel gehören, stehen im zusammengesetzten Verhältnisse der Winkel und Halbmesser; und das Verhältniß der Winkel ist zusammengesetzt aus dem geraden Verhältnisse der Bogen und dem umgekehrten der Halbmesser.

Vorbereitung. Man denke sich die Kreise concentrisch über einander gelegt.

Beweis. Erster Theil. $\frown AG : \frown DF = CA : CD$

$\frown DF : \frown DE = $ W. $DCF :$ W. DCE

$\frown AG : \frown DE = CA.$ W. $DCF : CD.$ W. DCE

Zweiter Theil. Aus dem ersten und 144.

Anmerkung. Trotz der häufigen Anwendung dieses Satzes in der Astronomie findet man ihn doch beinahe in keinem einzigen Elementarbuche. L. C. Leçons d'Astronomie §. 124 und Krafft geom. sublim. §. 107.

340. Lehrsatz. Ausschnitte verschiedener Kreise stehen im zusammengesetzten Verhältnisse der Winkel, die sie bilden, und der Quadrate der Halbmesser von den Kreisen, zu denen sie gehören. Sind die Ausschnitte ähnlich, so verhalten sie sich wie die Quadrate der Durchmesser.

Beweis. Aus 321 und 339.

Krafft geom. subl. §. 107.

Anmerkung. Der Inhalt eines Abschnitts (Fig. 122) hängt von dem Inhalte des zugehörigen Ausschnitts ab; da derselbe gleich ist entweder dem Unterschiede oder der Summe des Ausschnittes und des Mittelpunctsdreiecks, je nachdem er (wie LKHL) kleiner, oder (wie LPHL) größer als der Halbkreis ist. Der Flächeninhalt eines Abschnitts wird daher (321, Anm. 1 und 203, Zus. 6) dargestellt durch

$$\frac{B.r}{2} \mp \triangle LCH = \frac{B.r}{2} \mp \frac{LH.CJ}{2}$$

Das Nähere hierüber s. in 399, Zus. 2.

341. Lehrsatz. Das Maaß für den Winkel, welchen eine Sehne mit der Tangente im Berührungspuncte bildet, ist die Hälfte des zur Sehne gehörigen Bogens.

L. G. II, 19.

Beweis. Aus 247, und 336, Zus. 4.

342. Lehrsatz. Das Maaß für einen Winkel (DAE Fig. 159 und 160), dessen Scheitel (A) nicht auf dem Umkreise liegt, ist entweder die halbe Summe oder der halbe Unterschied der zwischen den (nöthigenfalls verlängerten) Schenkeln desselben enthaltenen Bogen, je nachdem der Scheitel innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt.

L. C. §. 470.

Vorbereitung. Ziehe HD.

Beweis. Aus 38 und 336 Zus. 4.

Zus. 1. Nimmt man den Scheitel A (Fig. 155) des Winkels auf dem Durchmesser so, daß $AG = GC$ so ist

W. $FAE = \frac{1}{3}\, gCE$; denn $\frac{1}{2} \frown gE - \frac{1}{2} \frown GH = \frown GH$ d. i.

$\frown gE = 3\, GH$ rc.

Anmerkung 1. Gäbe es also ein Mittel, um, wenn ein Winkel gCE, oder ein Bogen gE gegeben wäre, in dem Kreise, dessen Halbmesser gC, eine Schneidende gGA so zu ziehen, daß das außerhalb des Kreises liegende Stück GA gleich dem Radius, so würde es leicht sein, einen gegebenen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen. Allein die Mittel der Elementargeometrie d. h. Lineal und Zirkel reichen dazu durchaus nicht hin. Schon Archimedes (Lemmata pr. 8) hat die Aufgabe von der Dreitheilung eines Winkels oder Bogens auf diesen Satz zurückgebracht, der ganz zusammenfällt mit dem frühern Satze 53.

Zus. 2. Liegt der Scheitel F (Fig. 123) des Winkels GFD innerhalb des Kreises, ist einer seiner Schenkel ein Durchmesser GFCN, und liegt außerdem der Winkel so, daß die Sehne GD gleich dem

Schenkel FD, so ist der Bogen GD der dritte Theil von dem Bogen ABGD.

Beweis. W. FCD = W. GFD — W. FDC = W. GDC — W. FDC, also ⌒ ABG = 2 ⌒ GD.

Anmerkung 2. Man würde also einen gegebenen Bogen ABD in drei gleiche Theile theilen können, wenn man ein Mittel kennte, einen Durchmesser GN so zu ziehen, daß die Sehne GD gleich dem Stück FD würde, was jener von der Sehne des ganzen Bogens abschneidet.

Ich habe diesen Satz in einem Briefe gefunden, welchen Kinner in Prag im J. 1654 an Huygens geschrieben hat.

343. Lehrsatz. Das Maaß für den äußern Winkel (LKJ Fig. 160), welchen eine Sehne (KL) mit einer verlängerten Schneidenden (FJ) auf dem Umkreise bildet, ist die halbe Summe der Bogen (LK und KF), welche die genannten Geraden von ihrem Durchschnittspuncte aus nach beiden Seiten hin abschneiden.

Vorbereitung. Ziehe LF.

Beweis. Aus 38 und 236, Zus. 4.

Zweiter Abschnitt.

Vom Messen und Berechnen der Winkel und Bogen durch Sehnen, Sinusse, Tangenten und Sekanten.

I. Erklärungen und allgemeine Eigenschaften.

344. Erklärung. Man nennt von zwei Bogen (DB, GD Fig. 172) den einen das Complement des andern, wenn beide zusammen den vierten Theil des Umkreises ausmachen; das Supplement eines Bogens heißt ein anderer, wenn beide zusammen dem halben Umkreise gleich sind. Auf ähnliche Weise ist es bei zwei Winkeln; sie complementiren sich, wenn sie zusammen einen Rechten, und supplementiren sich, wenn beide zusammen zwei Rechten gleich sind.

Zus. Zieht man einen Bogen oder Winkel (d. i. die Zahl der Grade, durch die seine Größe dargestellt wird) von 90° und 180° ab, so erhält man respective sein Complement und sein Supplement.

Anmerkung. Da die Bogen das Maaß für die Winkel sind (336, Zus. 4), so muß man beim vierten Theil des Umkreises an einen rechten Winkel, beim halben Umkreis an zwei Rechte denken, und muß überhaupt das, was von Bogen gesagt wird, auch von Winkeln gelten, und umgekehrt.

345. Erklärung. Sehne eines Bogens heißt die Gerade, welche die beiden Endpuncte des Bogens verbindet. Zwar verbindet eine Sehne immer die Endpuncte zweier, zum ganzen Umkreise sich gegenseitig ergänzender Kreisbogen, allein wenn man von dem zu einer Sehne gehörigen Bogen spricht, so versteht man stillschweigend immer denjenigen, der kleiner (oder wenigstens nicht größer) als der halbe Umkreis ist *).

*) Diese Erklärung ist hier zur Bequemlichkeit des Lesers aus 228 wiederhohlt worden.

346. Erklärung. Man nennt **Sinus** eines Bogens (DB Fig. 172) die Senkrechte (DJ) welche aus dem Endpuncte (D) des Bogens, auf den durch den Anfangspunct (B) gehenden Durchmesser gefällt wird. Diese Senkrechte ist zugleich auch der Sinus des Winkels (DCB), dessen Maaß der Bogen DB ist.

Zus. 1. Der Sinus eines Bogens ist auch der Sinus seines Supplementes.

L. G. Tr. §. 10.

Zus. 2. Je größer der Bogen ist, desto größer ist sein Sinus, bis daß man zu einem Bogen von 90 Graden oder dem vierten Theile des Umkreises gelangt, wo der Sinus gleich dem Kreishalbmesser wird; darum führt der Radius auch den Namen sinus totus. Die Sinusse (z. B. NP) von Bogen (BGP), welche größer als 90° sind wiederum kleiner, und der Sinus von 180° ist Null.

Anmerkung. Gienge man noch über den halben Umkreis hinaus, nähme man z. B. den Bogen BGAM, so wäre sein Sinus NM und von einerlei Größe mit dem Sinus des Bogens BK d. i. des Unterschiedes zwischen jenem Bogen und dem halben Umkreis. Allein der Sinus liegt dann unterhalb des Durchmessers also auf der entgegengesetzten von der, wo die Sinusse der Bogen von der Größe bis zu 180° fallen. Erinnert man sich nun, was wir oben (170, Anm. 2) über negative Größen und ihre Beschaffenheit gesagt haben, so wird man sich bald überzeugen, daß diese Sinusse als negativ zu betrachten sind.

Es ist sonach: $\sin 0° = 0$; $\sin 90° = r$; $\sin 180° = 0$; $\sin 270° = -r$ ꝛc.

L. G. Tr. 7, 8, 9.

347. Erklärung. Fig. 172. **Cosinus** (HD) eines Bogens DB oder Winkels DCB nennt man den Sinus seines Complementes; oder, was auf dasselbe hinaus kömmt, den Theil (CJ) des durch den Anfangspunct (B) des Bogens gehenden Durchmessers, der zwischen dem Mittelpuncte und dem Sinus des Bogens enthalten ist.

L. G. Tr. 6.

Zus. 1. Die Größe des Cosinus nimmt ab, wenn die des Bogens zunimmt; für 90° oder für einen rechten Winkel ist er Null; er wird umgekehrt größer und nähert sich dem Radius immer mehr, je kleiner der Bogen wird, oder je näher dieser dem Werthe 0° kömmt; daher ist $\cos. 0° = r$.

Zus. 2. Der Cosinus eines Winkels oder Bogens ist auch (der Größe nach) der Cosinus dessen Supplementes.

Anmerkung. Erinnert man sich dessen, was wir oben (170, Anm. 2) über die Beschaffenheit negativer Größen gesagt haben, so sieht man, daß die Cosinusse für Bogen zwischen 90° und 270° stets negativ sind. Denn während man sie für Bogen, deren Endpuncte — für B als gemeinschaftlichen Anfangspunct — nicht über G hinaus gehen, vom Mittelpuncte aus nach der Seite von BG hin nimmt, muß man sie für alle die Fälle, wo die Endpuncte der Bogen über G hinaus fallen und zwar in einem der beiden folgenden Quadranten liegen, vom Centro aus nach der Seite von GA hin nehmen, also auf derjenigen, die der ersten und ursprünglichen entgegengesetzt ist. Und dieser Gegensatz der Lage dieser Linien ist es, der für sie als Zahlgrößen entgegengesetzte Vorzeichen nöthig macht*). Es ist demnach

$$\cos 0° = r, \; \cos 90° = 0, \; \cos 180° = -r, \; \cos 270° = 0.$$

Diese Bemerkung ist wichtig, weil man sehr oft nur aus dem Vorzeichen eines berechneten Cosinus beurtheilen kann, ob derselbe zu einem Bogen gehört, der $< 90°$ oder zu dessen Supplemente, also zu einem Bogen, der $> 90°$.

348. Erklärung. **Sinus versus** oder **Quersinus** eines

*) Eine gründliche und genügende Erörterung dieses Gegenstandes findet man in: v. Münchow Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Bonn 1826.
Anmerk. des Uebers.

Bogens nennt man den Theil (BJ) des Radius, welcher zwischen dem Anfangspuncte des Bogens und dessen Sinus enthalten ist.

Zus. Der Quersinus ist also für Bogen, die kleiner als 90° sind, gleich dem Unterschiede zwischen Radius und Cosinus, für Bogen dagegen, die größer als 90°, oder für die Supplemente der erstern ist er gleich der Summe des Radius und Cosinus.

Anmerkung. Der Quersinus ist daher für die Bogen von 0° bis 180° positiv, weil man ihn auf dem Anfangsdurchmesser vom Anfangspuncte der Bogen aus nach derselben Seite hin rechnet; und zwar wächst er von 0 bis + 2r.

349. Erklärung. Tangente eines Winkels oder Bogens (BD) heißt der Theil (BE Fig. 172) von der unbegränzten durch den Anfangspunct (B) der Bogen gehenden Berührenden, der zwischen diesem Anfangspuncte und dem Durchschnittspunct (E) mit dem durch den Endpunct (D) des Bogens (BD) gehenden Halbmesser enthalten ist.

L. G. Tr. 5.

Zus. Die Tangenten wachsen also mit den zugehörigen Winkeln oder Bogen; ist letzterer 90° so kann der durch seinen Endpunct gehende Halbmesser der Berührenden durch den Anfangspunct gar nicht begegnen, denn beide sind senkrecht auf dem Anfangsdurchmesser also parallel; daher ist die Tangente in diesem Falle von unbegränzter Größe, oder, wie die Mathematiker sich auszudrücken pflegen, unendlich. Aber die Tangenten der Winkel oder Bogen, die größer als 90° haben gleiche Größe mit den Tangenten der Bogen, von denen sie Supplemente sind.

L. G. Tr. 12.

Anmerkung. Was den letzten Theil unseres Satzes anlangt, so überzeugt man sich leicht, daß in der That, wenn der Bogen größer als 90° z. B. BGP ist, der Radius CP die Tangente BE niemals oberhalb des Anfangsdurchmessers treffen kann, sondern nur unterhalb; wenn man z. B. hier PC über K hinaus bis Q verlängert, so ist BQ, der aufgestellten Erklärung zufolge, die Tangente des Bogens BK, welcher = PA, dem Supplemente von BGP ist.

Und beachtet man das, was wir oben (170, Anm. 2) über das Wesen negativer Größen gesagt haben, so sieht man, daß BQ als negativ betrachtet werden muß.

Es ist also: tang 0° = 0; tang 90° = ∞ (Unendlich);
tang. von einem Bogen, der > 90° negativ; tang 180° = 0.
tang. eines Bogens der > 180° bis 270° positiv; tang 270° = ∞
tang. der Bogen von 270° bis 360° negativ; tang 360° = 0.

Wir werden später (364, Anm.) sehen, wie dieses mit dem, was wir über positive und negative Sinusse und Cosinusse gesagt haben, übereinstimmt.

350. Erklärung. Die Cotangente (GF Fig. 172) eines Winkels (BCD) oder Bogens (BD) ist die Tangente von dessen Complement.

Zus. Die Cotangente wird also kleiner, wenn die Größe des Bogens zunimmt; sie wird Null für 90°, und unendlich für 0°.

Anmerkung. Was wir über das Positive und Negative der Tangenten gesagt haben, gilt auch für die Cotangenten.

351. Erklärung. Die Secante (CE Fig. 172) eines Bogens ist der durch seinen Endpunct gehende und bis zur Tangente verlängerte Radius.

L. G. Tr. 5.

Zus. Die Secante wächst also mit dem Bogen; für 90° ist sie unendlich; aber Secanten von Bogen, die > 90°, haben gleiche Größe mit den Secanten ihrer Supplemente.

Anmerkung. Was wir über das Positive und Negative der Tangenten gesagt haben gilt auf gleiche Weise auch von den Secanten.

352. Erklärung. Cosecante (CF) eines Bogens ist die Secante seines Complements.

Zus. Die Cosecante wird kleiner, wenn der Bogen wächst; für 90° ist sie Null; für 0° unendlich.

Anmerkung. Was über das Positive und Negative der Secanten gesagt worden findet hier auf gleiche Weise Statt.

353. Erklärung. Alle diese im Vorigen aufgeführten Linien, nämlich Sehne, Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante, und Quersinus führen den gemeinschaftlichen Namen goniometrische d. i. zum Winkelmessen dienende Linien.

Anmerkung. Die Eigenschaften der Sehnen, Sinusse, Tangenten und Secanten werden ganz durch die Geometrie erwiesen, und aus den Eigenschaften des Kreises und der ähnlichen Dreiecke hergeleitet; und insofern gehören diese Linien zur Geometrie selbst. Aber die Mathematiker gehen weiter. Sie vergleichen die Größe dieser Linien mit der des Radius, und drücken dieselbe in Zahlen, für den Halbmesser als Einheit, aus. Dieß geht aus den Gränzen dessen, was die Alten im strengsten Sinne Geometrie nannten, heraus, besonders da außer chord. 60°, sin 30°, tang 45° und sec. 60° alle Sehnen, Sinusse, Tangenten und Secanten, durch incommensurable Zahlen, also nur näherungsweise ausgedrückt werden.

Da es nöthig ist, daß wir in dem Folgenden, wo von diesen Linien gehandelt wird, uns der Kürze befleißigen, und doch auch die Art ihrer Berechnung nicht ganz mit Stillschweigen übergehen dürfen, so werden wir kein Bedenken tragen, jene kürzeren Ausdrücke, über die wir uns oben in der Anm. zu 203, Zus. 2 ausgesprochen haben, zu gebrauchen. Unser Lehrsatz 358 z. B. würde nach der Ausdrucksweise der Alten, die wir bisher genau beachtet haben, so lauten: „Das Rechteck aus der Sehne, welche die Summe zweier Bogen spannt, und dem Durchmesser, ist gleich der Summe der Rechtecke aus der Sehne eines jeden einzelnen Bogens und der Sehne vom Supplemente des andern.“ Die folgenden Sätze könnten auf dieselbe Weise ausgesprochen werden. Wiewohl diese Ausdrücke nun, wie ich glaube, mehr dem Sinne und der Weise der Alten entsprechend wären, so ziehen wir hier doch die andern vor, weil sie kürzer sind und bei den Berechnungen noch mehr zu Statten kommen, besonders aber, da wir sie oben genau erklärt und erörtert, und überdieß gezeigt haben, wie sie in der That aus den strengsten Beweisen der Geometrie selbst hergeleitet werden. Wir haben um so weniger Bedenken getragen, dieß zu thun, da selbst Euclides und Archimedes, sobald es auf ein Rechnen in Zahlen ankam, diese Ausdrücke gebraucht haben; wie man deutlich sieht aus dem 7ten und 10ten Buche der Elemente, und aus der Schrift Archimed's über den Kreis. So viel über unsere Behandlungsweise der folgenden Lehrsätze.

354. Lehrsatz. Die Verhältnisse der Sehnen (DB, db Fig. 172), der Sinusse (DJ, di), der Quersinusse (BJ, bi), der Tangenten (BE, be), der Secanten (CE, Ce), der Cosinusse (CJ, Ci), der Cotangenten (GF, gf), und der Cosecanten (CF, Cf) von gleichen Winkeln, oder von Bogen, die zu gleichen Winkeln gehören, also ähnlich sind — die Verhältnisse aller dieser Linien zum Radius sind in allen Kreisen, wie groß auch deren Halbmesser sein mögen, dieselben.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke durch 196.

Zus. Die Sehnen, Sinusse, Tangenten und Secanten bilden daher ein bestimmtes und wahres Maaß für die Bogen und Winkel; denn, was auch die Größe des Radius sein möge, die Sehnen, Sinusse, Tangenten und Secanten werden immer durch dieselbe Menge von Theilen dieses Radius dargestellt.

355. Lehrsatz. Das Gränzverhältniß zwischen einem Bogen, dessen Sehne, Sinus und Tangente ist das Verhältniß der Gleichheit.

Beweis. Aus 309.

Zus. 1. Die Sinusse und Tangenten sehr kleiner Bogen stehen daher annähernd in demselben Verhältnisse als die Bogen selbst.

Zus. 2. Der Bogen von 1″ ist klein genug, um ohne erheblichen Fehler seinen Sinus als gleich mit ihm zu betrachten; also sin. 1″ = ⌒ 1″ zu setzen. Daher ist der Halbmesser in Secunden ausgedrückt (337, Z. 1 und 2) $= \frac{1}{\sin. 1''}$.

Anmerkung. Der Bogen von einer Sekunde, für den Radius als Einheit, ist
0,00000 48481 36811
sein Sinus 0,00000 48481 36809.
Selbst der Bogen von einer Minute unterscheidet sich noch wenig von seinem Sinus; denn er ist: 0,00029 08882 08666
sein Sinus: 0,00029 08882 04563.

Zus. 3. Ist daher ein Bogen B sehr klein, so ist

$\frac{\sin B}{B} = 1$, und wenn $B = x - y$,

$\frac{\sin (x-y)}{(x-y)} = 1$ d. h. je kleiner der Unterschied zweier Bogen ist, desto näher kömmt der Quotient, den man aus der Division des Sinus von dem Bogen, der diesen Unterschied ausdrückt, durch den Bogen selbst erhält, der Einheit. Es findet also namentlich Statt, wenn $x = y$, oder $x - y = 0$.

Zus. 4. Auf gleiche Weise ist, wenn B sehr klein,

$\frac{\text{tang } B}{B} = 1$, oder $\frac{\text{tang } (x-y)}{x-y} = 1$.

Zus. 5. Auch ist in eben diesem Falle

$\frac{\text{chord. } B}{B} = 1$, oder $\frac{\text{chord. } (x-y)}{x-y} = 1$.

II. Eigenschaften und Berechnung der Sehnen.

---

356. Lehrsatz. Sind zwei ungleiche Bogen (BG, AB Fig. 156) von demselben Kreise gegeben, so hat die Sehne des größern zur Sehne des kleinern ein größeres Verhältniß als der größere Bogen selbst zum kleinern.

Vorbereitung. Halbire durch BD den Winkel ABG, ziehe AG, DA, DG, und aus D DZ ⊥ AG, beschreibe aus D mit DE einen Kreisbogen, welcher die verlängerte DZ in T und DA in H schneidet.

Beweis. Da W. ABD = DBG, so ist AD = DG, und, weil BG > AB, EG > AE. Es ist aber Ausschnitt DET > △ DEZ, und △ DEA > Ausschnitt DEH, also

△ DEZ : △ DEA < Ausschnitt DET : Aussch n. DEH;

und, da △ DEZ : △ DEA = EZ : AE,

EZ : AE < Ausschnitt DET : Ausschn. DEH
< W. EDZ : EDA

Also auch EZ + AE : AE < W. ZDA : EDA

und 2 AZ : AE < 2 W. ZDA : EDA

d. i. $AG : AE < W. ADG : EDA$

Mithin auch $AG - AE : AE < W. EDG : EDA$

aber $GE : AE = BG : BA$,

und $W. EDG : EDA = \frown BG : \frown AB$,

darum auch $BG : BA < \frown BG : \frown BA$.

Anmerkung. Dieser Satz ist von Ptolemäus, der ihn so wie die beiden folgenden in seinem Almagest I, 9 vorträgt.

Zus. Die Sehne eines Bogens steht also zur Sehne von einem Theile desselben z. B. dem mten, in einem kleinern Verhältniß als m : 1; und die Sehne vom dritten Theile eines Bogens ist größer als der dritte Theil der Sehne des ganzen Bogens.

357. Lehrsatz. Das Quadrat des Durchmessers ist gleich der Summe der Quadrate von der Sehne eines beliebigen Bogens und der Sehne seines Supplements.

Beweis leicht.

Zus. Daher ist es leicht, wenn Durchmesser und Sehne eines Bogens gegeben sind, die Sehne von dessen Supplement zu finden.

Anmerkung 1. Die Sehne eines Bogens von 60° ist die Seite des innern regelmäßigen Sechsecks (277, Z. 2), ist also gleich dem Radius. Alle übrigen Sehnen findet man durch Wurzelausziehen und zwar aus Zahlen, die keine Quadratzahlen sind; man kann daher die Sehnen auch blos näherungsweise finden.

Anmerkung 2. Darauf, daß die Sehne eines Bogens von 60° gleich ist dem Radius, gründet sich der Gebrauch der Linien, die man auf dem Proportionalzirkel mit dem Buchstaben C. (Chordes) bezeichnet findet. Sie dienen dazu, um die Sehnen für jeden Winkel oder Bogen zu finden, und umgekehrt aus der gegebenen Länge der Sehne die Größe des zugehörigen Bogens oder Winkels zu bestimmen.

Anmerkung 3. Die Chordenlinie dient auch zur Auffindung der Größe der Seiten der regelmäßigen Vielecke in Beziehung auf den Radius, da diese Seiten Sehnen der Mittelpunctswinkel sind. Die Chordenlinie ist zu diesem Zwecke eben so brauchbar als die Polygonlinie.

358. Lehrsatz. Die Sehne (DB Fig. 140) von der Summe zweier Bogen (AD, DB) ist gleich der Summe der Produkte aus der Sehne jedes Bogens in die Sehne vom Supplemente des andern, dividirt durch den Durchmesser; also:

$$DB = \frac{AB \cdot DJ + AD \cdot BJ}{AJ}.$$

Vorbereitung. Ziehe den Durchmesser AJ und die Supplementsehnen DJ, BJ.

Beweis. Aus dem ptolemäischen Lehrsatze (276); ja unser Lehrsatz fällt ganz mit diesem zusammen, wenn man für Rechtecke setzt: Produkte der Zahlen, welche die Längen der Linien ausdrücken. Auch Ptolemäus hat diesen Satz zur Berechnung der Sehnen angewandt.

Zus. 1. Kennt man also die Sehnen zweier Bogen, so kann man auch die ihrer Summe zugehörige Sehne finden. Man berechnet zuerst durch Hülfe von 357, Zus. die Sehnen der Supplemente dieser Bogen, und dann durch unsern in Rede stehenden Satz die Sehne der Summe. Diesen Weg schlug auch Ptolemäus ein.

Zus. 2. Die Sehne eines Bogens, der doppelt so groß, als ein gegebener, ist gleich dem Produkte aus der Sehne des letztern in die Sehne seines Supplementes, dividirt durch den Radius; also, wenn

AB = AD, so ist:

$$DB = \frac{AB \, . \, DJ}{\frac{1}{2} \, AJ}.$$

Zus. 3. Um die Sehne eines Bogens, der das Drei- Vier- Fünffache ꝛc. von einem gegebenen ist, zu finden, berechnet man durch Hülfe des Hauptsatzes und des vorigen Zusatzes, die Sehne des Bogens, der gleich der Summe des Einfachen und des Doppelten vom gegebenen ist, ꝛc.

Zus. 4. Die Sehne AB des Unterschiedes zweier Bogen (DAB und DPA) ist:

$$AB = \frac{AJ \, . \, DB - AD \, . \, JB}{DJ}.$$

Beweis. Er ergiebt sich unmittelbar aus dem Hauptsatze.

359. Lehrsatz. Die Sehne BH (Fig. 130 unter den zu den Anhängen gehörigen Figuren) eines Bogens (BMH), welcher die Hälfte eines gegebenen Bogens (BMHD) ist, ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte des Radius und des Ueberschusses, welchen der Durchmesser über die Sehne (AD) des Bogens hat, welcher das Supplement des gegebenen ist; also $BH = \sqrt{BC \, . \, (BA - AD)}$.

Beweis. $BH_q = BA_r \, BK = 2 \, BC_r \, (BC - CK) = BC_r \, (BA - 2 \, CK) = BC_r \, (BA - AD)$ ꝛc.

Zus. Man kann also die Sehnen aller derjenigen Bogen berechnen, die durch ein fortgesetztes Halbiren entstehen; und die Rechnung wird noch erleichtert durch den Satz des Snellius, der den Zus. zu unserm §. 295 ausmacht.

Anmerkung 1. Man kann die Sehne von der Hälfte eines gegebenen Bogens auch noch auf eine andere Weise finden. Wenn FJ = JE, Fig. 141, so ist CK ⊥ FE, also, da auch W. JEB = 90°,

$$JE = \sqrt{JK \, . \, JB} \; (87, \, Z. \, 1)$$

wo $JK = CJ - CK$, und $CK = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{KE}^2}$

Anmerkung 2. Man kann also leicht die Sehnen für alle Winkel oder Bogen berechnen. Denn die für 60° ist gleich dem Radius; daraus leitet man durch Hülfe unseres Satzes der Reihe nach her die Sehnen für 30°, 15°, $7\frac{1}{2}$°, $3\frac{3}{4}$°, oder für 225′; sucht dann die Sehne für den fünften Theil von 225′ d. h. für 45′; darauf die für den dritten Theil von 45′ d. i. für 15′; daraus wiederum die für den fünften Theil d. i. die für 3′ und daraus die für den dritten Theil d. i. für 1′. Um nämlich die Sehnen zu finden, die zu Bogen gehören, welche den dritten oder fünften Theil von einem gegebenen Bogen bilden, bedient man sich einer Art regula falsi. Die Sehne von dem dritten Theile eines gegebenen Bogens ist, wie man weiß (356, 3.) größer als der dritte Theil der Sehne des letztern selbst. Man nimmt daher eine Zahl, die um etwas größer ist, als der (bekannte) dritte Theil, betrachtet diese als die Länge der Sehne von dem dritten Theile des Bogens, und berechnet aus ihr (358, Z. 2) die Länge der Sehne des dreifachen Bogens, die also mit der gegebenen Sehne übereinstimmen muß; findet sich noch ein Unterschied, so macht man folgenden Regel de tri-Satz:

Die gefundene Sehne verhält sich zu der als Sehne vom dritten Theile des Bogens angenommenen, wie die wahre Sehne des Bogens zur wahren Sehne seines dritten Theils. Dieß Verfahren gründet sich darauf, daß für Bogen, die wenig von einander verschieden sind, die Zunahme der Sehnen demselben Verhältnisse folgt, als die der Bogen; wie dieß schon aus der Lehre von den Gränzen folgt, aber auch noch aus unserm Satze in 366 hervorleuchten soll.

Man kann hierüber nachlesen: Deparcieux nouveau traité de Trigonometric p. 4 — 12, wo dieser Gegenstand sehr gut behandelt ist.

Anmerkung 3. Ptolemäus ist der erste Schriftsteller, welcher uns auf diese Weise die Eigenschaften der Sehnen kennen gelehrt, und Chordentafeln berechnet hat, von halbem zu halbem Grad, indem er von 30′ anfing und mit 180° endigte. Er theilte, der Gewohnheit der damaligen Zeit gemäß, den Radius in 60 gleiche Theile, jeden derselben wiederum in 60, und so fort indem er durchweg die Sexagesimaltheilung befolgte. Delambre hat die Berechnungen des Ptolemäus sehr genau gefunden. Man bediente sich der Sehnen und Sehnentafeln, als Sinusse und Tangenten noch nicht bekannt waren. Jetzt gebraucht man blos die letztern, welche die Griechen nicht kannten. Aus S. 360 wird es einleuchtend werden, daß man die Sinusse aus den Sehnen und umgekehrt diese aus jenen herleiten kann.

III. Eigenschaften und Berechnung der Sinusse und Quersinusse.

---

360. Lehrsatz. Der Sinus (DJ Fig. 172) eines Bogens (BD) ist die Hälfte der Sehne (DK) vom doppelten Bogen (DBK); und die Sehne jedes Bogens ist zweimal so groß als der Cosinus seines halben Supplements.

Tacquet Trigon. Lemm. p. 335. — L. G. Trig. 15.

Beweis. Erster Theil aus 245 und 346.

Zweiter Theil aus dem ersten, $\text{chord. } B = 2 \sin \frac{1}{2} B = 2 \cos (90^\circ - \frac{1}{2} B) = 2 \cos \frac{180^\circ - B}{2}$.

Zus. 1. Man kann also die Sinusse aus den Sehnen, und umgekehrt diese aus jenen herleiten.

Zus. 2. Der Sinus des Winkels oder Bogens von 30°, also auch der Cosinus von 60° ist gleich der Hälfte des Radius oder des Sinus von 90°.

Anmerkung. Darauf gründen sich auf den Proportionalzirkeln die Linien, welche mit Sinus oder auch blos mit S bezeichnet sind. Sie dienen dazu Winkel vermittelst ihres Sinus zu bestimmen, und umgekehrt, für einen gegebenen Winkel und Radius den Sinus des erstern zu finden.

Zus. 3. Die Seite eines in den Kreis beschriebenen Vielecks ist das Doppelte vom Sinus des halben Mittelpunctswinkels, so daß man diese Seiten sehr leicht finden kann, so bald die Sinusse aller Bogen mit hinreichender Genauigkeit berechnet sind.

361. Lehrsatz. Der Sinus des größern von zwei Bogen hat zum Sinus des kleinern ein kleineres Verhältniß, als der größere Bogen zum kleinern.

Beweis. Es sei der größere Bogen A, der kleinere a, so ist $\sin A = \frac{1}{2} \text{chord. } 2A$, und $\sin a = \frac{1}{2} \text{chord. } 2a$, aber

$$\text{chord. } 2A : \text{chord. } 2a < 2A : 2a$$
$$< A : a$$

also auch $\sin A : \sin a < A : a$.

Zus. Die Sinusse nehmen nach einem kleinern Verhältnisse zu oder ab als die zu ihnen gehörigen Bogen; dieser Unterschied tritt desto

stärker hervor je größer die Bogen werden; für sehr kleine Bogen ist er unmerklich.

362. Lehrsatz. Die Summe der Quadrate vom Sinus und Cosinus eines Bogens ist gleich dem Quadrat des Radius; also

$$r^2 = \overline{\sin}^2 + \overline{\cos.}^2$$

L. G. Tr. 16.

Beweis. Aus 87.

Zus. 1. Daher findet man sehr leicht den Sinus oder Cosinus, wenn Radius und Cosinus oder Sinus gegeben sind. Denn

$$\overline{\sin.}^2 = r^2 - \overline{\cos.}^2 = (r + \cos.)\ (r - \cos.)$$
$$\overline{\cos.}^2 = r^2 - \overline{\sin}^2 = (r + \sin)\ (r - \sin).$$

Tacquet Trigon. Porism. 1.

Zus. 2. $\sin^2 45^0 + \cos^2 45^0 = 2 \sin^2 45^0 = 2 \cos^2 45 = r^2$

also $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Zus. 3. $\sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{r}{2}.\sqrt{3}$.

Beweis. $\sin^2 60^0 + \sin^2 30^0 = r^2$

$$\sin^2 60^0 + \frac{r^2}{4}\ (360,\ 3.\ 2) = r^2$$

also $\sin 60^0 = \frac{r}{2} \sqrt{3}$.

Anmerkung. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{2}}$ kommen so oft bei diesen Berechnungen vor, daß wir ihre Werthe beifügen wollen.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356$$
$$\sqrt{3} = 1{,}73205081$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70710678.$$

363. Lehrsatz. Der Sinus (LM Fig. 173) von der Hälfte eines Bogens ist gleich der Quadratwurzel aus dem halben Produkte des Radius und Quersinus; oder der Hälfte der Quadratwurzel aus der Quadratsumme des Sinus und Quersinus. Der Cosinus (CM) von der Hälfte eines Bogens dagegen ist gleich der Wurzel aus dem halben Produkte des Radius und des Quersinus vom Supplemente; d. h.

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\tfrac{r}{2}.\ \text{sin. vers. } B} = \sqrt{\tfrac{r}{2}\ (r - \cos B)}$$
$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{\sin^2 B + \text{sin. vers}^2\ B}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\tfrac{r}{2}.\ \text{sin. vers. supp. } B.} = \sqrt{\tfrac{r}{2}.\ (r + \cos B)}.$$

L. G. Tr. 20.

Beweis. Erster Theil. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABL und LBN, verbunden damit, daß $LM = \frac{1}{2}$ LB.

Zweiter Theil. Aus 87, angewandt auf Dr. LBN.

Dritter Theil. Aus der Betrachtung, daß $\cos = \sqrt{r^2 - \sin^2}$ verbunden mit dem ersten Theile.

Zus. $\sin^2 \frac{1}{2} B . \cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{r^2}{4} . \text{sin. vers } B . \text{sin. vers. supp. } B$

$$= \frac{r^2}{4} (1 - \cos B) (1 + \cos B)$$

$$= \frac{r^2}{4} . (1 - \cos^2 B)$$

$$= \frac{r^2}{4} . \sin^2 B$$

also $\text{sin. vers. } B = \frac{\sin^2 B}{\text{sin. vers. supp. } B}$.

Anmerkung. Ueber andere Ausdrücke des Quersinus s. 348, Zus. und 368.

364. Lehrsatz. Nimmt man im Umfange eines Kreises einen bestimmten Bogen AY (Fig. 174), dann das Zweifache desselben AD, und nun die Bogen DE, EF, FG, GH ꝛc. sämmtlich gleich diesem Zweifachen AD, so verhält sich der Radius zum doppelten Cosinus dieses (einfachen) Bogens, wie der Sinus desselben zum Sinus des doppelten Bogens, oder wie der Sinus des doppelten zur Summe der Sinusse vom dreifachen und einfachen Bogen, oder wie der Sinus des dreifachen zur Summe der Sinusse vom vierfachen und doppelten Bogen — kurz wie der Sinus des (n — 1) fachen Bogens zur Summe der Sinusse vom n fachen und (n — 2) fachen Bogen.

Vorbereitung. Ziehe den Durchmesser ACZ, die Sehnen DE, EF, FG, GH, so wie AY, AD, AE, AF, AG, AH, und HG, HF, HE. Verlängere AF und nimm EJ = AE; eben so FK = AF, GL = AG ꝛc.

Beweis. Aus der Construction ergiebt sich leicht, daß die Dreiecke ADE, AEJ, AFK, AGL ꝛc. gleichschenkelig und nicht nur einander, sondern auch dem Dreieck DCZ ähnlich sind. Eben so leicht sieht man, daß △ EJF ≌ △ ADE, △ FGK ≌ △ AEF, △ GHL ≌ △ AFG ꝛc., also FJ = DE, GK = AE, HL = AF ꝛc.

Demnach ist:

$$\begin{aligned} DC : DZ = AD : AE &= AE : AJ \\ &= AE : AF + FJ \\ &= AE : AF + AD \\ &= AF : AK \\ &= AF : AG + GK \\ &= AF : AG + AE \\ &= AG : AL \\ &= AG : AH + HL \\ &= AG : AH + AF. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} DZ &= 2 \cos \tfrac{1}{2} AYD \quad (360) &&= 2 \cos AY \\ AD &= 2 \sin \tfrac{1}{2} AYD &&= 2 \sin AY \\ AE &= 2 \sin \tfrac{1}{2} ADE &&= 2 \sin AD = 2 \sin 2 AY \\ AF &= 2 \sin \tfrac{1}{2} ADEF = 2 \sin \tfrac{3}{2} AD &&= 2 \sin 3 AY \\ AG &= 2 \sin \tfrac{1}{2} AEG = 2 \sin 2 AD &&= 2 \sin 4 AY \\ AH &= 2 \sin \tfrac{1}{2} AEH = 2 \sin \tfrac{5}{2} AD &&= 2 \sin 5 AY \end{aligned}$$

u. s. w.

Bezeichnet man also Bogen AY mit B, so hat man

$$\begin{aligned} r : 2\cos B &= \sin B : \sin 2B \\ &= \sin 2B : \sin 3B + \sin B \\ &= \sin 3B : \sin 4B + \sin 2B \\ &= \sin 4B : \sin 5B + \sin 3B \\ &\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ &= \sin (n-1) B : \sin. nB + \sin. (n-2) B. \end{aligned}$$

Anmerkung 1. Diesen Satz, nur auf Sehnen angewandt, gebrauchte schon 1633 Gellibrand in seiner Trigonometria Britannica. Später wurde er so wie der folgende angewandt von Sharp in seiner Method of constr. the natur. sines, die man in den Mathematical Tables von Sherwin findet, und bei mehrern andern.

Anmerkung 2. Der Beweis unsers Satzes lehrt uns folgende bemerkenswerthe Eigenschaft des Kreises kennen: Theilt man einen Peripheriewinkel DAF in zwei gleiche Theile durch eine Sehne, AE, so ist diese die mittlere Proportionale zwischen dem kleinern Schenkel und der Summe von beiden Schenkeln.

Zus. Es ist allgemein
$\sin. nB = 2\cos B . \sin (n-1) B - \sin (n-2) B$, wenn man den Radius $r=1$ setzt,
also für den besondern Fall, wo $n=2$

$$\sin 2B = 2 \sin B \cos B.$$

Anmerkung 3. Man sieht hieraus, wie leicht es ist, wenn $\sin B$ und $\cos B$ bekannt sind, der Reihe nach $\sin 2B$, $\sin 3B$, $\sin 4B$ ꝛc. zu berechnen, ohne daß man die Cosinusse eben dieser Bogen zu kennen braucht.

365. Lehrsatz. Unter denselben Voraussetzungen wie beim vorigen Satze verhält sich auch der Radius zum doppelten Cosinus, wie dieser Cosinus zur Summe des Radius und des Cosinus vom doppelten Bogen; oder wie der Cosinus des doppelten Bogens zur Summe des Cosinus vom einfachen und des Cosinus vom dreifachen Bogen, oder wie der Cosinus des dreifachen Bogens zur Summe des Cosinus vom zweifachen und des Cosinus vom vierfachen Bogen — kurz wie des Cosinus vom (n—1) fachen des Bogens zur Summe des Cosinus vom (n—2) fachen und des Cosinus vom n fachen des Bogens *).

Vorbereitung. Man verlängere den Durchmesser ZA, und die Sehnen ZD, ZE ꝛc.; ziehe nach diesen Verlängerungen $DM = DZ$, $EN = EZ$, $FO = FZ$, $GP = GZ$ ꝛc. Dadurch werden alle Dreiecke wie MDZ, NEZ, OFZ, PGZ gleichschenkelig und ähnlich dem $\triangle$ DCZ. Es ist ferner, wie man leicht sieht, $\triangle MAD \cong \triangle DZE$, $\triangle DEN \cong \triangle EFZ$ ꝛc., also $AM = EZ$, $DN = FZ$ ꝛc.
Daher hat man:

$$\begin{aligned} DC : DZ &= DZ : ZM \\ &= DZ : AZ + AM \\ &= DZ : AZ + EZ = EZ : ZN \\ &\qquad = EZ : DZ + DN \\ &\qquad = EZ : DZ + FZ = FZ : ZO \\ &\qquad\qquad = FZ : EZ + EO \\ &\qquad\qquad = FZ : EZ + GZ \end{aligned}$$

u. s. w.

---

*) Dieser Lehrsatz lautet in dem Original merklich verschieden von dem, was hier die Uebersetzung liefert. Unser Verfasser behauptet nämlich, um es kurz in Zeichen auszudrücken, es sei:

Aber es ist:

$$\begin{aligned} ZD &= 2 \cos \frac{\text{supp. } DZ}{2} (360) = 2 \text{ os } \tfrac{1}{2} AD \\ &= 2 \cos AY. \\ ZE &= 2 \cos \tfrac{1}{2} EDA = 2 \cos 2 AY \\ ZF &= 2 \cos \tfrac{1}{2} FEDA = 2 \cos 3 AY \\ ZG &= 2 \cos \tfrac{1}{2} GEA = 2 \cos 4 AY \end{aligned}$$

Setzt man also Bogen $AY = B$, so hat man

$$\begin{aligned} r : 2 \cos B &= \cos B : r + \cos 2 B \\ &= \cos 2 B : \cos B + \cos 3 B \\ &= \cos 3 B : \cos 2 B + \cos 4 B \\ &\;\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &= \cos (n-1) B : \cos (n-2) B + \cos n B. \end{aligned}$$

Anmerkung 1. Aus dem Beweise sieht man, daß:

$$DC : DZ = DZ : ZA + ZE$$

oder $AZ : DZ = DZ : \frac{ZA + ZE}{2}$

d. h. halbirt man einen Peripheriewinkel, dessen einer Schenkel ein Durchmesser ist, durch eine Sehne, so ist diese die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und der halben Summe desselben und des andern Schenkels.

Zus. Man hat also allgemein:

$$\cos. n B = \frac{2 \cos B . \cos (n-1) B - r . \cos (n-2) B}{r}$$

und für $n = 2$

$$\begin{aligned} \cos 2 B = \frac{2 \cos^2 B - r^2}{r} &= \frac{\cos^2 B - (r^2 - \cos^2 B)}{r} \\ &= \cos^2 B - \sin^2 B \end{aligned}$$

wenn man $r = 1$ setzt.

Anmerkung 2. Man sieht hieraus, wie leicht man, wenn cos B gegeben ist, die Werthe von cos 2 B, cos 3 B ꝛc. berechnen kann, ohne die Werthe von den Sinussen dieser Bogen zu kennen.

366. Lehrsatz. Den Sinus (LN Fig. 175) von der Summe zweier Bogen (DL und DB) erhält man, wenn man die Summe der Produkte aus dem Sinus eines jeden Bogens in den Cosinus des andern durch den Radius dividirt; und der Sinus (TS) des Unterschiedes zweier Bogen ist gleich dem Unterschiede der genannten Produkte dividirt durch den Radius.

L. G. Tr. 19.

Vorbereitung. Es sei $LM \perp CD$, so ist LM der Sinus und CM der Cosinus des Bogens LD; zieht man ferner $DJ \perp CB$, so ist DJ der Sinus und CJ der Cosinus des Bogens DB; und wenn $LN \perp CB$, so ist LN der Sinus von LB d. i. $DL + DB$, und CN der Cosinus von der Summe dieser beiden Bogen. Verlängert man ferner LM bis sie dem Umkreise zum zweitenmal (in T) begegnet, so ist $\frown DT = \frown DL$, also BT gleich dem Unterschiede unserer beiden Bogen DB und

---

$$\begin{aligned} r : 2 \cos B &= \cos B : r + \cos 2 B \\ &= \cos 2 B : r + \cos 3 B \\ &= \cos 3 B : r + \cos 4 B \\ &\;\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &= \cos (n-1) B : r + \cos n B \end{aligned}$$

was aber offenbar nur so lange richtig ist, als n nicht größer als 2 ist.
Die vorgenommene Aenderung war daher nothwendig.

Anmerk. des Uebers.

DL. Zieht man endlich TU und MP ⊥⊥ LN und MO ⊥ CB, so ist TS = UN = PN — PU = PN — LP, denn LP = PU, weil LM = MT ist.

Beweis. Erster Theil. Es ist LN = PN + PL; sucht man nun für PL einen Werth mittelst der ähnlichen Dreiecke PML und CDJ, und eben so für PN aus den Drr. MCO und CDJ, so erhält man:

$$LN = \frac{LM \,.\, CJ + DJ \,.\, CM}{CD}.$$

woraus unser Satz unmittelbar folgt.

Zweiter Theil. TS = UN = PN — PL ꝛc.

Zus. 1. Der Sinus des Zweifachen eines Bogens ist gleich dem doppelten Producte aus Sinus und Cosinus des Bogens dividirt durch den Radius, also

$$\sin 2\,B = \frac{2 \sin B \,.\, \cos B}{r}, \text{ oder für } r = 1$$

$$\sin 2\,B = 2 \sin B \,.\, \cos B.$$

Anmerkung 1. Dieß stimmt überein mit 364, Zus.

Zus. 2. $\sin B = 2 \sin \frac{1}{2} B \,.\, \cos \frac{1}{2} B$, wenn $r = 1$.
Cagnoli §. 63.

Zus. 3. $\sin (30^\circ + a) = \frac{1}{2} \cos a + \frac{1}{2} \sin a \,.\, \sqrt{3}$
$\sin (30^\circ - a) = \frac{1}{2} \cos a - \frac{1}{2} \sin a \,.\, \sqrt{3}$
wenn $r = 1$
also

$$\sin (30^\circ + a) = \sin (30^\circ - a) + \sin a \,.\, \sqrt{3}.$$

Beweis. Aus 362, Zus. 3.

Anmerkung 2. Multiplicirt man daher den Sinus eines Bogens a mit $\sqrt{3}$ und addirt zu diesem Producte den Sinus des Bogens, der um a kleiner als 30° ist, so ist diese Summe gleich dem Sinus des Bogens, der um a größer als 30° ist.

Zus. 4. $\sin (60^\circ + a) = \frac{1}{2} \cos a \,.\, \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sin a$
$\sin (60^\circ - a) = \frac{1}{2} \cos a \,.\, \sqrt{3} - \frac{1}{2} \sin a$
$\sin (60^\circ + a) = \sin. (60^\circ - a) + \sin a$
$\sin (60^\circ - a) = \sin. (60^\circ + a) - \sin a.$

Anmerkung 3. Man kann daher aus dem Sinus eines Bogens, der größer oder kleiner als 60° ist, blos durch Addition den Sinus eines Bogens herleiten, der kleiner oder größer als 60° ist.

Zus. 5. $\sin (60^\circ + a) . \sqrt{3} = \sin (30^\circ + a) + \cos a.$

Anmerkung 4. Man kann also aus dem Sinus eines Bogens, der um a größer als 30° ist, den Sinus des Bogens finden, der um a größer als 60° ist, und umgekehrt.

Zus. 6. Ist der Bogen C sehr klein, so ist annähernd
$\sin (B \pm C) = \sin B \pm C \,.\, \cos B$
d. h. wenn zwei Bogen nur sehr wenig von einander verschieden sind, so folgt die Zu- oder Abnahme ihrer Sinusse sehr nahe demselben Verhältnisse, als die Zu- oder Abnahme der Bogen.

367. Lehrsatz. Den Cosinus (CN Fig. 175) von der Summe (LB) zweier Bogen (DB und DL) erhält man, wenn man den Unterschied zwischen den Producten aus den Cosinussen und Sinussen dieser Bogen durch den Radius dividirt; der Cosinus (CJ) dagegen von dem

Unterschiede zweier Bogen ist gleich der Summe der genannten Producte, dividirt durch den Radius; d. h.

$$\cos (B + C) = \frac{\cos B \,.\, \cos C - \sin B \,.\, \sin C}{r}$$

$$\cos (B - C) = \frac{\cos B \,.\, \cos C + \sin B \,.\, \sin C}{r}.$$

L. G. Tr. 19.

Vorber. Sie ist dieselbe, wie für den vorigen Lehrsatz; man erhält aus ihr:

$CN = CO - NO = CO - PM,$

$CS = CO + OS = CO + XT = CO + UX = CO + PM.$

Beweis. Man sucht den Werth für CO aus den ähnlichen Dreiecken CMO und CDJ, und den Werth für PM aus den Drr. PLM und CDJ, und erhält so:

$$CN = \frac{CM \,.\, CJ - LM \,.\, DJ}{CD}$$

$$CS = \frac{CM \,.\, CJ + LM \,.\, DJ}{CD}.$$

worin eben unser Lehrsatz enthalten ist.

Anmerkung 1. Aus 347, Zus. 1 sieht man, warum der Cosinus des Unterschiedes zweier Bogen größer ist, als der Cosinus ihrer Summe.

Zus. 1. Der Cosinus vom Zweifachen eines Bogens ist gleich dem Unterschiede zwischen den Quadraten des Cosinus und Sinus des Bogens dividirt durch den Radius.

$$\cos 2 B = \frac{\cos^2 B - \sin^2 B}{r}.$$

L. G. Tr. 13.

Anmerkung 2. Dies stimmt überein mit 365, Zus.

Zus. 2. Ist C sehr klein, so ist

$$\cos (B \pm C) = \cos B \mp C \,.\, \sin B$$

d. h. unterscheiden sich zwei Bogen nur wenig von einander, so folgt die Ab- oder Zunahme ihrer Cosinusse sehr nahe demselben Verhältnisse, wie die Zu- oder Abnahme der Bogen.

Anmerkung 3. Setzt man in den Ausdrücken dieses und des vorigen Satzes $C = 2 B$, so erhält man

$$\sin (B + 2 B) = \sin 3 B = \frac{\sin B \,.\, \cos 2 B + \sin 2 B \cos B}{r}$$

$$= \frac{\sin B (\cos^2 B - \sin^2 B) + 2 \sin B \cos^2 B}{r^2}$$

$$= \frac{3 \sin B \cos^2 B - \sin^3 B}{r^2}$$

und auf ähnliche Weise

$$\cos 3 B = \frac{\cos^3 B - 3 \sin^2 B \,.\, \cos B}{r^2}$$

Substituirt man in dem erstern Ausdruck für $\cos^2 B$ seinen Werth $r^2 - \sin^2 B$, so erhält man

$$\sin 3 B = 3 \sin B - \frac{4 \sin^3 B}{r^2}, \text{ und wenn } 3 B = D,$$

$$\sin D = 3 \sin \frac{D}{3} - \frac{4 \sin^3 \frac{D}{3}}{r^2}$$

Anmerkung 4. Auf demselben Wege kann man Ausdrücke für sin 4 B, sin 5 B etc. (s. L. G. Tr. 34) herleiten, nämlich:

$$\sin 4\,B = \frac{4 \sin B \cos^3 B - 4 \sin^3 B \,.\, \cos B}{r^2}$$

$$\cos 4\,B = \frac{\cos^4 B - 6 \cos^2 B \,.\, \sin^2 B + \sin^4 B}{r^2}$$

Gienge man in dieser Entwickelung nur noch um einige Schritte weiter, so würde man das allgemeine Gesetz, nach dem diese Ausdrücke fortschreiten, von selbst bemerken und sehen, daß allgemein:

$$\sin.\, n\,B = n \,.\, \cos^{n-1} B \,.\, \sin B - \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cos^{n-3} B \,.\, \sin^3 B$$

$$+ \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \,.\, n-4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \,.\, \cos^{n-5} B \,.\, \sin^5 B - \text{etc.}$$

$$\cos n\,B = \cos^n B - \frac{n.n-1}{1.2} \,.\, \cos^{n-2} B \sin^2 B + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \cos^{n-4} B \,.\, \sin^4 B - \text{etc.}$$

Formeln, deren Richtigkeit auch noch auf anderm Wege dargethan werden können. Man findet sie bei sehr viel Schriftstellern, unter andern bei: Euler Introd. in Anal. Inf. I, §. 133, und Cagnoli §. 117—124.

Anmerkung 5. Vergleicht man diese Ausdrücke für sin 3 B, cos 3 B, oder sin n B, cos n B, mit denen, welche wir oben in 364 und 365 mitgetheilt haben, so sieht man um wie viel geeigneter zum Berechnen der Sinusse und Cosinusse von 2 B, 3 B, etc. durch Hülfe von sin B und cos B diese letztern vor jenen erstern sind, und wie sie, aus geometrischen Beweisen entlehnt, in der That mehr und unmittelbarer zur Geometrie gehören als jene, die mehr in Umformungen einmal bekannter Ausdrücke bestehen. Aber zugleich sieht man, wie nützlich es ist, diese verschiedenen Verfahrungsarten mit einander zu vergleichen.

6. Allgemeine Anmerkung über die Berechnung der Sinustafeln. Die in dem Vorigen erörterten Eigenschaften der Sinusse sind es durch die man in den Stand gesetzt würde, um Tafeln der Sinusse und Cosinusse für alle Bogen zu berechnen. Man kann z. B. mit dem Sinus von 30° anfangen, welcher der Hälfte des Radius gleich ist; leitet daraus nach 362, Z. 1, den Werth für cos 30° her; und dann durch Hülfe von 363, der Reihe nach, die Sinusse und Cosinusse von 15°, $7\frac{1}{2}$°, $3\frac{3}{4}$°, $1\frac{7}{8}$°, 56′ 15″, 28′ $7\frac{1}{2}$″, 14′ $3\frac{3}{4}$″, 7′ $1\frac{7}{8}$″, 3′ $30\frac{15}{16}$″, 1′ $45\frac{15}{32}$″, $52\frac{47}{64}$″, welcher letztere Bogen klein genug ist, um daraus, durch 367, Z. den Sinus und Cosinus von 1′ herzuleiten; daraus nach 359, Z. die für 2′, 4′, 8′, 16′, 32′, 64′ ꝛc. Ferner durch Hülfe von 366, die von 3′, von 5′, von 7′, 14′, ꝛc.; von 16′ + 14′ d. i. von 30′, und daraus die für 60′ oder 1° und von da von Grad zu Grad fort, bis 30°, von wo an man, nach 366, Anmerk. 2, leicht die übrigen findet. Man kann über das Berechnen der Sinustafeln auf diesem Wege nachsehen: Tacquet Trig. prop. 1—5 sowie p. 346, und andere.

Anfangs hat man auch wirklich auf diesem Wege das große Werk der Berechnung von Sinustafeln von Minute zu Minute, ja von 10″ zu 10″ ausgeführt; und fügte nach der Erfindung der Logarithmen auch die Logarithmen der Sinusse bei.

Späterhin berechnete man die Sinusse leichter und von Secunde zu Secunde, durch Hülfe von Reihen, deren Glieder Potenzen des Bogens (in Theilen des Halbmessers ausgedrückt) dessen Sinus man sucht. Doch da diese Reihen nicht der Geometrie sondern ganz der höhern Rechnung angehören, so können wir hier nicht von ihnen handeln. Einige werden wir in dem Anhange mittheilen.

368. Lehrsatz. Der Quersinus (NB Fig. 173) ist gleich dem Quadrat der Sehne (LB) dividirt durch den doppelten Radius.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke LNB und ALB.

Zus. Den Quersinus kann man also leicht aus der Sehne berechnen; aber noch leichter aus dem Cosinus (348).

Anmerkung 1. Man sehe den andern Ausdruck für den Quersinus 368, Z.

Anmerkung 2. In neuern Zeiten hat man die Quersinusse, als entbehrlich, in vielen hieher gehörigen Schriften, und besonders aus allen Tafeln weggelassen. Nur

in einigen wenigen ältern Tafeln findet man auch die Quersinusse besonders aufgeführt, z. B. in den englischen Tafeln von Sherwin.

369. **Lehrsatz.** Der Gränzwerth sowohl für den Quersinus eines Bogens als für den Theil der Secante, der zwischen dem Bogen und der Tangente liegt, ist gleich dem Quadrate des Bogens dividirt durch den doppelten Radius.

Newton Principia I, Lemm. 11.

Bew. Erster Theil. Es ist: (Fig. 172) $\text{sin. vers} = BJ = \frac{\overline{DB}^2}{AB}$; da nun der Bogen die Gränze der Sehne ist, so ist die Gränze des $\text{sin. vers.} = \frac{B^2}{2r}$, wo B den Bogen bezeichnet.

Zweiter Theil. $\triangle EDZ \sim \triangle CEB$, also $DE = \frac{JB \cdot CE}{CB}$

$$= \frac{\overline{DB}^2 \cdot CE}{AB \cdot CB}$$

aber Bogen DB ist Gränze für Sehne DB, und CB Gränze von CE, also Gränze von $DE = \frac{B^2}{2r}$.

Zus. 1. Die Quersinusse kleiner Bogen nehmen daher zu oder ab wie die Quadrate dieser Bogen.

Zus. 2. Für kleine Bogen ist der Theil der Secante, welcher zwischen dem Bogen und der Tangente liegt, gleich dem Quersinus, und er nimmt zu wie das Quadrat des Bogens.

Anmerkung. Diese beiden Zusätze sind von vielfachem Nutzen in der Natur- und Sternkunde.

IV. Eigenschaften und Berechnung der Tangenten.

370. **Lehrsatz.** Die Tangente (BE) eines Bogens (DB Fig. 172) oder Winkels (DCB) ist gleich dem Producte des Radius und Sinus dividirt durch den Cosinus; und die Cotangente gleich dem Producte des Radius und Cosinus dividirt durch den Sinus; also

$$\text{tang.} = \frac{r \cdot \text{sin.}}{\text{cos.}}, \ \text{cotang.} = \frac{r \cdot \text{cos.}}{\text{sin.}}$$

L. G. Tr. 17.

Bew. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CJD und CBE, für den ersten Theil; CHD und GFC für den zweiten.

Cagnoli §. 56, 57, 102.

Anmerkung 1. Man sieht hieraus:

1) daß, wenn entweder der Sinus, oder der Cosinus eines Bogens negativ ist, auch dessen Tangente negativ, übereinstimmend mit der Anmerk. zu 349.
2) daß, wenn Sinus und Cosinus zugleich negativ sind, die Tangente positiv ist, wie z. B. für die Bogen zwischen 180° und 270°.
3) daß die Tangente für 90° unendlich ist, da $\tang 90° = \frac{r \cdot \sin 90°}{\cos 90°} = \frac{r^2}{0}$, welcher letztere Ausdruck eine Größe im Zustande eines unbegränzten Wachsthums, d. h. ein unendlich Großes bezeichnet.

Zus. 1. Tangente und Cotangente für 45° sind beide gleich dem Radius.

Anmerkung 2. Hierauf beruhen die auf den Proportionalzirkeln befindlichen und mit tang. bezeichneten Linien. Die Entfernung vom Anfangspuncte bis 45° ist der Radius; darnach werden die Tangenten größer, aber eben darum sind auf jeder Platte des Zirkels zwei Tangenten-Linien befindlich; die eine, an deren Ende die Zahl 45 steht, dient für die Winkel, die nicht größer als 45° sind; der Radius ist hier die ganze Linie vom Mittelpuncte des Zirkels bis 45. Die andere Tangentenlinie, gewöhnlich mit t bezeichnet, fängt in nicht größerer Entfernung vom Mittelpuncte mit 45° an, und geht bis 70° und drüber, dient also für Winkel, die größer als 45° sind. Sie ist nach einem kleineren Maaßstabe gezeichnet, als die erste, indem hier der Radius der kleine Abstand des Mittelpunctes von dem Anfangspuncte der Linie ist.

Anmerkung 3. Nicht selten steht mit der Tangenten-Linie eine andere, gewöhnlich durch S. T (Semi-Tangens) bezeichnete Linie in Verbindung, welche gewöhnlich die Linie der halben Tangenten oder richtiger die Linie der Tangenten der halben Bogen heißt.

Es sei z. B. BG Fig. 178 ein Bogen, dessen Tangente BE; man ziehe aus dem Endpuncte H des Durchmessers BH die Supplementsehne HG, die den senkrechten Radius AC in D schneidet; alsdann ist CD das, was man halbe Tangente des Bogens BG, oder besser Tangente von der Hälfte des Bogens BG nennt. Ein Maaßstab, auf welchem diese sogenannten halben Tangenten angegeben sind, kann mit vielem Nutzen bei der Zeichnung von Figuren gebraucht werden, die sich auf die stereographische Projection beziehen.

Zus. 2. Tangenten und Cotangenten sind leicht zu berechnen, wenn die Sinusse und Cosinusse schon berechnet sind.

Zus. 3. Die Tangente eines Bogens ist die Hälfte von der Seite eines um den Kreis beschriebenen Vielecks, dessen Centriwinkel doppelt so groß ist, als der dem Bogen zugehörige; so wie der Sinus die Hälfte von der Seite eines solchen innern Vielecks ist, nach dem was wir schon früher bemerkt haben. So ist z. B. die Tangente eines Bogens von 1° 52′ 30″ die Hälfte der Seite von einem Vieleck, dessen Centriwinkel 3° 45′ beträgt d. i. von 96eck; und der Sinus von 1° 52′ 30″ ist die Hälfte von der Seite des in den Kreis beschriebenen 96ecks.

Nimmt man daher diese Tangente und diesen Sinus, so ist das Verhältniß des Umkreises zum Radius größer als das 192fache des Sinus, und kleiner als das 192fache der Tangente. Hätte man den Sinus und die Tangente von 1′ genommen, so wäre dieß so viel gewesen als hätte man ein 10800eck angewendet. Man sieht also, wie leicht es ist, solche das Verhältniß des Umkreises zum Radius umschließende Verhältnisse zu erhalten, sobald einmal die Sinus- und Tangenten-Tafeln berechnet sind. Man vergleiche damit, was wir oben 325, Anmerkung 8 gesagt haben.

Zus. 4. Die Tangente eines Bogens von 60° ist das Dreifache der Tangente von 30°.

Bew. $$\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$$
$$= 2 \cos 30^\circ$$
$$= \sqrt{3} \text{ (360, 3. 2 und 362, 3. 3)}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{3}}$$

Aber $\text{tang } 30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also

$\text{tang } 60^0 = 3 \text{ tang } 30^0$

Anmerkung. Dieser Satz soll noch einmal, auf eine mehr geometrische Art, bewiesen werden, in der Anmerkung 1 zu 376, Z. 5.

371. Lehrsatz. Die Tangente eines Bogens ist gleich dem Quadrat des Radius dividirt durch die Cotangente, und diese also gleich dem Quadrat des Radius dividirt durch die Tangente; also:

$$\text{tang.} = \frac{r^2}{\text{cotang.}}, \text{ und cotang.} = \frac{r^2}{\text{tang.}}$$

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CEB und CFG (Fig. 172).

Zus. 1. Für den Radius als Einheit ist die Tangente der reciproke Werth der Cotangente, und umgekehrt diese der reciproke Werth von jener.

$$\text{tang.} = \frac{1}{\text{cotang.}}, \text{ und cotang.} = \frac{1}{\text{tang.}}.$$

L. G. Tr. 18.

Zus. 2. Es kommt daher auf dasselbe hinaus, ob man durch die Tangente dividirt oder durch die Cotangente multiplicirt und umgekehrt, und wenn man mit Logarithmen arbeitet, ob man den Logarithmus der Tangente subtrahirt, oder den der Cotangente addirt; und da das Addiren immer leichter und bequemer als Subtrahiren, so giebt man ihm natürlich immer den Vorzug.

372. Lehrsatz. Von zwei ungleichen Bogen hat die Tangente des größern zu der des kleinern immer ein größeres Verhältniß als der größere Bogen zum kleinern.

Vorber. Es sei JEL (Fig. 143.) der größere und JE der kleinere Bogen; JH ist die Tangente des erstern und JG die des letztern. Ziehe CEG und CLH; beschreibe aus C mit CG als Radius den Bogen VGU, welcher die verlängerte CJ in V und CH in U schneidet.

Beweis. Ausschn. CGU : Ausschn. CGV $= \frown$ GU : $\frown$ GV $= \frown$ EL : $\frown$ JE

$\triangle$ GCH : $\triangle$ GCJ = GH : GJ, aber $\triangle$ GCH $>$ Ausschn. CGU und $\triangle$ CGJ $<$ Ausschn. CGV, also

$\triangle$ GCH : $\triangle$ GCJ $>$ Ausschn. CGU : Ausschn. CGV

also auch GH : GJ $> \frown$ EL : $\frown$ JE, und

JH : GJ $> \frown$ JEL : $\frown$ JE.

Anmerkung 1. Dieser Satz ist derselbe wie der oben in 206, Zus. 2, angeführte; und wird auf diese Weise von Commandinus in der dort angeführten Stelle des Pappus bewiesen.

Anmerkung 2. Der berühmte Niederländische Mathematiker Albert Girard hat in seiner vortrefflichen kleinen Schrift: Invention nouvelle en Algebre diesen Satz aus Pappus entlehnt und ihn einfacher also bewiesen:

Es sei BFK (Fig. 176) eine Schneidende, und FP eine Berührende, und MK ∥ BH, so ist

MK : BG $<$ GH : BG,
aber MK : BG = FK : BF
also FK : BF $<$ GH : BG
und FP : BF $<$ GH : BG
daher $\frown$ FD : $\frown$ BF $<$ GH : BG
und $\frown$ BFD : $\frown$ FB $<$ BH : BG.

Zus. Die Tangenten nehmen in größerm Verhältnisse zu als die Bogen, und zwar um desto mehr je größer letztere werden.

373. Lehrsatz. Der Unterschied der Quadrate des Radius und der Tangente eines Bogens verhält sich zum doppelten Quadrat des Radius, wie die Tangente dieses Bogens zur Tangente des doppelten Bogens.

Vorbereitung. Es sei BH (Fig. 177) der einfache, BHD der doppelte Bogen. Ziehe BF $\perp$ AB, ferner AHC, ADF, DB und CJ $\perp$ AC; so ist DE $=$ EB, oder DB $=$ 2 DE.

Beweis. $\triangle ABE \sim \triangle ABC$, daher $\overline{AB}^2 = AC . AE$, und

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = AC . AE : \overline{AC}^2 = AE : AC = DE : CJ$$

Ferner
$$2\,\overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 = BD : DE, \text{ also auch}$$
$$2\,\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : CJ = BF : CF$$
$$2\,\overline{AB}^2 : \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = BF : CF$$
$$\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : 2\,\overline{AB}^2 = BC : BF.$$

Zus.
$$BF = \frac{2\,\overline{AB}^2 . BC}{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$$
d. i.
$$tg\ 2\ B = \frac{2\ r^2\ tg\ B}{r^2 - tg^2\ B}.$$

Anmerkung 1. Dieß ist der bekannte Satz von John Pell; und der Beweis, welchen Cavaleri davon gegeben hat. S. controversia de circuli mensura p. 13 et 60.

Anmerkung 2. Man kann diesen Satz auch ohne die Hülfe ähnlicher Dreiecke beweisen:

$$AF : AB = CF : CB$$
$$\overline{AF}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{CF}^2 : \overline{CB}^2$$
$$\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 : \overline{AB}^2 = (BF - BC)^2 : \overline{BC}^2$$
$$= \overline{BF}^2 + \overline{BC}^2 - 2\ BF . BC : \overline{BC}^2,$$
$$2\ BF . BC + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$$
$$2\ BF . BC : \overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$$
$$2\ BC : BF = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$$
$$BF = \frac{2\,\overline{AB}^2 . BC}{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$$
$$tang\ 2\ B = \frac{2\ r^2 . tang\ B}{r^2 - tang^2\ B}.$$

Dieser Beweis ist von Lagny und findet sich in seiner schönen Abhandlung über die Tangenten von den Vielfachen der Bogen Mem. de l'Acad. 1705. p. 254.

Anmerkung 3. Man kann zu unserm Satze auch so gelangen:

$$tang\ 2\ B = \frac{r . \sin 2\ B}{\cos 2\ B} = \frac{2\ r . \sin B . \cos B}{\cos^2 B - \sin^2 B}$$
$$= \frac{2\ r}{\frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\sin B}{\cos B}}$$
$$= \frac{2\ r^2}{cotg\ B - tang\ B}$$

$$= \frac{2\,r^2}{\frac{r^2}{\text{tang } B} - \text{tang } B}$$

$$= \frac{2\,r^2 \text{ tang } B}{r^2 - \text{tang}^2 B}.$$

Anmerkung 4. Auf dieselbe Weise könnte man Ausdrücke für tang 3 B, tang 4 B .... tang n B herleiten; allein es scheint uns nicht nöthig, darauf weiter einzugehen.

374. Lehrsatz. Theilt man den halben Umkreis in n gleiche Theile, so ist die Summe der Sinusse der Bogen, welche der Reihe nach, einen, zwei, drei 2c. bis n solcher Theile in sich schließen, gleich dem Producte aus der Cotangente von der Hälfte eines solchen Theils in den Radius.

Beweis. Es sei ein solcher Theil AB (Fig. 144); er heiße B; alsdann ist AB : BE = AE : 2 (BK + CM + DO) (284). Aber 2 (BK + CM + DO) ist die Summe aller Sinusse BK, KH, CM, MG, DO, OF der Bogen innerhalb des ganzen Umkreises, also

chord. B : chord. supp. B = r : Summe aller Sinusse bis 180°

und darum

$$\text{Summe aller Sinusse bis } 180^\circ = \frac{r \,.\, \text{chord. supp. } B}{\text{chord. } B}$$

$$= \frac{r \,.\, \frac{1}{2} \text{ chord. supp. } B}{\frac{1}{2} \text{ chord. } B}$$

$$= \frac{r \,.\, \cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} B} = r \,.\, \text{cotg } \tfrac{1}{2} B.$$

Ist also B = 1° so ist die Summe aller Sinusse von Grad zu Grad genommen = r . tg 89 ½° = 114,5886 für den Radius = 1.

S. Vieta opp. pag. 375; und Krafft geometr. sublim. §. 100.

V. Eigenschaften und Berechnung der Secanten.

375. Lehrsatz. Die Secante eines Bogens ist gleich der Summe der Tangente des Bogens und der Tangente seines halben Complements.

Beweis. W. E = 90° — ECB (Fig. 178). Es sei W. BCF = ½ E, = ½ (90° — W. ECB); alsdann ist W. ECF = ECB + BCF

$$= ECB + \frac{90^\circ}{2} - \frac{ECB}{2} = \frac{90^\circ + ECB}{2}.$$

Aber W. CFB = 90° — BCF = 90° — ½ (90° — ECB)

$$= \frac{90^\circ + ECB}{2},$$

also W. ECF = CFB, und darum EC = EF = EB + BF = tang W. BCE + tang W. BCF = tang W. BCE + tang ½ compl. W. BCE.

Gellibrand Trigon. Brit. Cap. XVII, pr. 6.

Zus. Die Secanten können daher durch eine einfache Addition der Tangenten gefunden werden.

376. Lehrsatz. Die Secante (CE Fig. 172) ist gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate des Radius und der Tangente; auch gleich dem Quadrate des Radius dividirt durch den Cosinus; auch gleich dem Producte aus Tangente und Radius dividirt durch den Sinus. Die Cosecante ist gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate des Radius und der Cotangente, auch gleich dem Quadrat des Radius dividirt durch den Sinus; auch gleich dem Producte aus Radius und Cotangente dividirt durch den Cosinus; also

$$\text{sec.} = \sqrt{r^2 + \text{tang}^2} = \frac{r^2}{\text{cosin.}} = \frac{r \,.\, \text{tang}}{\text{sin}}$$

$$\text{cosec.} = \sqrt{r^2 + \text{cotg}^2} = \frac{r^2}{\text{sin.}} = \frac{r \,.\, \text{cotg}}{\text{cos.}}.$$

Beweis. Erster Theil. Nro. 1 aus 87; Nro. 2 und 3 aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CDJ und CEB.

Zweiter Theil. Nro. 1 aus 87; Nro. 2 und 3 aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CGF und CHD.

Zus. 1. Für den Radius = 1 wird die Secante der reciproke Werth des Cosinus; die Cosecante der reciproke Werth des Sinus, also $\text{sec.} = \frac{1}{\text{cos.}}$, $\text{cosec.} = \frac{1}{\text{sin.}}$.

Zus. 2. Es gilt daher für Secante und Cosinus, so wie für Cosecante und Sinus ganz dasselbe, was wir oben 371, Zus. 2 für Tangente und Cotangente bemerkt haben.

Zus. 3. Die Logarithmen von Sinus und Cosecante desselben Bogens ergänzen sich daher zum doppelten Logarithmen des Sinus tot.; eben so ist es mit den Logarithmen von Cosinus und Secante.

Zus. 4. Man sieht daher, wie leicht Tafeln für die Logarithmen der Secanten und Cosecanten zu berechnen sind, wenn man die Logarithmen der Sinusse und Cosinusse schon kennt. Aber man sieht zugleich auch, daß ihre Berechnung ganz unnütz ist, indem man die Logarithmen der Sinusse und Cosinusse unmittelbar statt ihrer gebrauchen kann. Daher sind sie auch in den besten Tafeln weggelassen.

Zus. 5. $\text{sec. } 60^0 = 2\ r.$

Beweis. $\text{sec. } 60^0 = \frac{r^2}{\cos 60^0} = \frac{r^2}{\sin 30^0} = \frac{r^2}{\frac{1}{2} r} = 2\,r.$

Anmerkung 1. Hieraus läßt sich leicht ein Beweis für unsern frühern Satz, 370, 3. 4 herleiten. Denn es sei W. DAB (Fig. 177) = 60°, und W. CAB = 30°, so ist W. FAC = CAB, und daher AF : AB = CF : CB = 2 : 1 (206), also FC = 2 CB, und FB = 3 CB.

Anmerkung 2. Auf manchen Maaßstäben und auf allen Proportionalzirkeln befindet sich eine Secanten-Linie, welche auf letztern mit einem s bezeichnet ist. Da die Secanten größer als der Radius sind, und beim Proportionalzirkel es nöthig ist, den Halbmesser zu kennen, so hat die Secantenlinie ihren Anfangspunct nicht in dem Mittelpuncte des Zirkels, sondern in einiger Entfernung davon, und eben diese Entfernung ist der Halbmesser des Kreises, zu dem die Secantenlinie gehört; den Halbmesser des beabsichtigten oder gegebenen Kreises hat man in der Entfernung des Nullpunctes der einen Platte von dem der andern.

Allgemeine Anmerkung. Es würde nun hier die schicklichste Stelle sein, das Nöthige über die Einrichtung und den Gebrauch der Tafeln für die goniometrischen Linien

zu sagen. Allein da man alles hieher Gehörige in den gangbarsten Tafeln selbst, und zwar in der Einleitung angegeben findet, so kann man den Anfänger darauf verweisen.

Dritter Abschnitt.

Von den Formeln für goniometrische Linien.

---

377. Man macht gegenwärtig in der Mathematik einen sehr häufigen und wichtigen Gebrauch von den goniometrischen Linien und ihren gegenseitigen Beziehungen, die zu diesem Ende durch Formeln dargestellt werden, welche man leicht entweder dem Gedächtnisse einprägen, oder doch dem Auge vergegenwärtigen kann. Mehrere Schriftsteller wie Euler, Cagnoli, de Gelder u. a. haben eine große Anzahl solcher Formeln aufgestellt. Viele derselben, vielleicht alle, lassen sich geometrisch, d. h. aus der Figur selbst herleiten, wie dieß, wenigstens für mehrere, von vorzüglichen Schriftstellern geschehen ist. Ausgezeichnet, besonders durch seine Einfachheit, ist in dieser Beziehung Robertson in seinen Elements of Navigation, IV, §. 169 — §. 225. Hier aber, nachdem wir die Hauptformeln geometrisch begründet haben, ziehen wir es vor, zu zeigen, wie alle übrigen, ohne weitern Beweis aus diesen hergeleitet werden können. Wir werden sie durch mehrere Sätze hindurch in fortlaufender Ordnung aufführen, damit man diejenigen, die man gerade gebraucht, desto leichter finden kann; und bemerken nur noch, daß sie alle für den Radius als Einheit entwickelt sind, oder daß in ihnen durchgängig $r = 1$ gesetzt ist.

378. Die wichtigsten Ausdrücke für die Sinusse und Cosinusse in bestimmten Fällen, sind in folgenden Formeln enthalten:

1. $\sin 0^\circ = 0$ (346, Anm.) $\cos. 0^\circ = 1$ (347, Anm.)
2. $\sin 30^\circ = \cos. 60^\circ = 0,5$ (360, Z. 2)
   $\cos. 30^\circ = \sin. 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (362, Z. 3)
3. $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (362, Z. 2)
4. $\sin 90^\circ = 1$ $\cos 90^\circ = 0$
5. $\sin 180^\circ = 0$ $\cos 180^\circ = -1$
6. $\sin 270^\circ = -1$ $\cos 270^\circ = 0$
7. $\sin 360^\circ = 0$ $\cos 360^\circ = 1$

(4.–7.: 346, Anm. und 347, Anm.)

---

8. $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ (362)
9. $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B$
   $= (1 + \cos B)(1 - \cos B)$
   $=$ sin. vers. supp. B . sin. vers. B. (348, Z.)

10. $\cos^2 B = 1 - \sin^2 B$

11. $\sin(B + C) = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$ } (366)

12. $\sin(B - C) = \sin B \cdot \cos C - \sin C \cdot \cos B$ }

13. $\cos(B + C) = \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C$ } (367)

14. $\cos(B - C) = \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C$ }

15. $\sin 2B = 2 \sin B \cdot \cos B$ (§. 11)

16. $\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B$ (§. 13)

17. $\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1$ (§. 16 und 9)

18. $\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B$ (§. 16 und 10)

19. $\sin(90^0 + C) = \cos C$ (§. 11, 12, 4)

20. $\cos(90^0 \mp C) = \pm \sin C$ (§. 13, 14, 4)

21. $\sin(180 \pm C) = \mp \sin C$ (§. 11, 12, 5)

22. $\cos(180 \pm C) = - \cos C$ (§. 13, 14, 5).

Die Werthe für

$\sin(B + C) + \sin(B - C)$
$\sin(B + C) - \sin(B - C)$
$\cos(B - C) + \cos(B + C)$
$\cos(B - C) - \cos(B + C)$

ergeben sich unmittelbar aus §. 38, 39, 41, 42.

---

23. $\sin(B+C) \cdot \sin(B-C) = \sin^2 B - \sin^2 C = \cos^2 C - \cos^2 B$ } §. 11, 12, 9, 10.

24. $\sin(B+C) \cdot \cos(B-C) = \dfrac{\sin 2B + \sin 2C}{2}$ (§. 11, 14, 8, 15)

25. $\sin(B-C) \cdot \cos(B+C) = \dfrac{\sin 2B - \sin 2C}{2}$ (§. 12, 13, 8, 15)

26. $2 \cdot \sin(B+C) \cdot \cos(B+C) = \sin 2B \cos 2C + \sin 2C \cdot \cos 2B$ (§. 15, 11)

27. $2 \cdot \sin(B-C) \cdot \cos(B-C) = \sin 2B \cdot \cos 2C - \sin 2C \cos 2B$ (§. 15, 12)

28. $\cos(B+C) \cdot \cos(B-C) = \cos^2 B - \sin^2 C = \cos^2 C - \sin^2 B$ } (§. 13, 14, 9, 10.)

---

29. $\sin^2 \tfrac{1}{2} B = \dfrac{1 - \cos B}{2}$ (§. 18)

30. $\cos^2 \tfrac{1}{2} B = \dfrac{1 + \cos B}{2}$ (§. 17)

31. $\sin \frac{1}{2}(B+C) \cdot \sin \frac{1}{2}(B-C) = \frac{\cos C - \cos B}{2}$ (§. 23, 29)

32. $\cos \frac{1}{2}(B+C) \cdot \cos \frac{1}{2}(B-C) = \cos^2 \frac{1}{2} C - \sin^2 \frac{1}{2} B = \cos^2 \frac{1}{2} B - \sin^2 \frac{1}{2} C$ (§. 28).

---

33. $\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{1}{2}(B+C) \cdot \cos \frac{1}{2}(B-C)$ (§. 24)

34. $\sin B - \sin C = 2 \sin \frac{1}{2}(B-C) \cdot \cos \frac{1}{2}(B+C)$ (§. 25)

35. $\cos B + \cos C = 2 \cos \frac{1}{2}(B+C) \cdot \cos \frac{1}{2}(B-C)$ (§. 28, 30)

36. $\cos C - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(B+C) \cdot \sin \frac{1}{2}(B-C)$ (§. 23, 29)

$\cos C - \cos B$ siehe §. 48.

---

37. $\sin B \cdot \cos C = \sin B - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C \cdot \sin B$ (§. 29)

38. $\sin B \cdot \cos C = \frac{1}{2} \sin (B+C) + \frac{1}{2} \sin (B-C)$ (§. 11, 12)

39. $\sin C \cdot \cos B = \frac{1}{2} \sin (B+C) - \frac{1}{2} \sin (B-C)$ (§. 11, 12)

40. $\cos B \cdot \cos C = \cos C - 2 \sin^2 \frac{1}{2} B \cdot \cos C$

41. $\cos B \cdot \cos C = \frac{1}{2} \cos (B+C) + \frac{1}{2} \cos (B-C)$ (§. 13, 14)

42. $\sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cos (B-C) - \frac{1}{2} \cos (B+C)$ (§. 13, 14)

43. $\text{sin. vers. } B = 1 - \cos B$ (348, 3.)

44. $\text{sin. vers. } B = 2 \sin^2 \frac{1}{2} B$ (§. 43, 29).

45. $\text{sin. vers. } B = \frac{\sin^2 B}{\text{sin. vers. supp. } B}$ (363, 3.)

46. $\text{sin. vers. } B - \text{sin. vers. } C = \cos C - \cos B$ (§. 43).

---

47. $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$ (370)

48. $\text{cotang } B = \frac{\cos B}{\sin B}$ (370)

49. $\tan B = \frac{1}{\text{cotang } B}$ (371, 3.)

50. $\text{cotang } B = \frac{1}{\tan B}$ (371, 3.)

51. $\tan 45^\circ = \text{cotg } 45^\circ = 1.$

---

52. $\tan B + \tan C = \frac{\sin (B+C)}{\cos B \cdot \cos C}$ (§. 11, 47)

53. $\text{tang } B - \text{tang } C = \frac{\sin (B - C)}{\cos B \cdot \cos C}$ (§. 12, 47)

54. $\text{cotg } B + \text{cotg } C = \frac{\sin (B + C)}{\sin B \cdot \sin C}$ (§. 11, 48)

55. $\text{cotg } C - \text{cotg } B = \frac{\sin (B - C)}{\sin B \cdot \sin C}$ (§. 12, 48)

56. $\text{tang}^2 B - \text{tang}^2 C = \frac{\sin (B + C) \cdot \sin (B - C)}{\cos^2 B \cdot \cos^2 C}$ (§. 52, 53)

57. $\text{tang}^2 B - \text{tang}^2 C = \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\cos^2 B \cdot \cos^2 C}$ (§. 23, 56)

$$= \frac{\cos^2 C - \cos^2 B}{\cos^2 B \cdot \cos^2 C}$$

58. $\text{cotg}^2 C - \text{cotg}^2 B = \frac{\sin (B + C) \cdot \sin (B - C)}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}$ (§. 54, 55)

59. $\text{cotg}^2 C - \text{cotg}^2 B = \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}$.

---

60. $\text{tang } (B + C) = \frac{\text{tg } B + \text{tg } C}{1 - \text{tg } B \cdot \text{tg } C}$ (§. 11, 13, 47)

61. $\text{tang } (B - C) = \frac{\text{tg } B - \text{tg } C}{1 + \text{tg } B \cdot \text{tg } C}$ (§. 12, 14, 47)

62. $\text{cotg } (B + C) = \frac{1 - \text{tg } B \cdot \text{tg } C}{\text{tg } B + \text{tg } C}$ (§. 50, 60)

$$= \frac{\text{cotg } B \cdot \text{cotg } C - 1}{\text{cotg } B + \text{cotg } C}$$

63. $\text{cotg } (B - C) = \frac{1 + \text{tg } B \cdot \text{tg } C}{\text{tg } B - \text{tg } C}$ (§. 50, 61)

64. $\text{tang } (45^0 \pm B) = \frac{1 \pm \text{tg } B}{1 \mp \text{tg } B}$ (§. 51, 60, 61)

65. $\text{tang } 2 B = \frac{2 \text{ tang } B}{1 - \text{tang}^2 B}$ (§. 60)

66. $\text{tang } \frac{1}{2} B = \sqrt{\left[\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}\right]}$ (§. 29, 30)

67. $\text{tang } \frac{1}{2} B = \frac{\sin B}{1 + \cos B}$ (§. 66, oder §. 15, 30)

68. $\text{tang } \frac{1}{2} B = \frac{\sin^2 B}{\sin B (1 + \cos B)}$ (§. 67)

69. $\tang \frac{1}{2} B = \frac{1 - \cos^2 B}{\sin B (1 + \cos B)}$ (F. 68)

70. $\tang \frac{1}{2} B = \frac{1 - \cos B}{\sin B}$ (F. 69)

71. $\tang \frac{1}{2} B = \operatorname{cosec} B - \operatorname{cotg} B$ (376, Z. 1, F. 48, 70)

72. $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} B = \frac{1 + \cos B}{\sin B}$ (F. 67)

73. $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} B = \operatorname{cosec} B + \operatorname{cotg} B$ (376, Z. 1, F. 48, 72)

74. $\tang \frac{1}{2} B + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B = 2 \operatorname{cosec} B$ (F. 71, 73)

75. $\tang (45^0 \pm \frac{1}{2} B) = \frac{\cos \frac{1}{2} B \pm \sin \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} B \mp \sin \frac{1}{2} B}$ (F. 64, 47)

76. $\tang^2 (45 \pm \frac{1}{2} B) = \frac{1 \pm \sin B}{1 \mp \sin B}$ (F. 75)

77. $\tang \frac{1}{2} (B + C) = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ (F. 33, 35)

78. $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} (B + C) = \frac{\sin B - \sin C}{\cos C - \cos B}$ (F. 34, 36)

79. $\tang \frac{1}{2} (B - C) = \frac{\sin B - \sin C}{\cos B + \cos C}$ (F. 34, 35)

80. $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} (B - C) = \frac{\sin B + \sin C}{\cos C - \cos B}$ (F. 33, 36)

81. $\frac{\tang \frac{1}{2} (B + C)}{\tang \frac{1}{2} (B - C)} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C}$ (F. 77, 79)

82. $\frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} (B + C)}{\tang \frac{1}{2} (B - C)} = \frac{\cos B + \cos C}{\cos C - \cos B}$.

---

83. $\sec B = \tang B + \tang \frac{1}{2} \text{compl.} B$ (375)

84. $\sec B = \frac{1}{\cos B}$ (376, Z. 1)

85. $\sec B = \sqrt{1 + \tang^2 B}$ (376)

86. $\sec B = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B}$ (376, F. 29)

87. $\sec B = 1 + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} B$ (F. 47, 13, 84)

88. $\operatorname{cosec} B = \frac{1}{\sin B}$

89. $\operatorname{cosec} B = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 B}$

Anmerkung. Diese vorstehenden Formeln enthalten Ausdrücke für Sinus, Cosinus

und Tangente, welche oft gebraucht werden; wir halten es daher für nützlich, sie hier noch beizufügen. Sie sind sämmtlich aus Cagnoli entlehnt.

379. Der Sinus eines Bogens kann durch folgende Formeln ausgedrückt werden:

90. $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$

91. $\sin B = \cos B \cdot \tang B$

92. $\sin B = \frac{\cos B}{\cotg B}$

93. $\sin B = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 B}}$

94. $\sin B = \frac{\tang B}{\sqrt{1 + \tang^2 B}}$

95. $\sin B = 2 \sin \frac{1}{2} B \cdot \cos \frac{1}{2} B$

96. $\sin B = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2 B}{2}\right)}$

97. $\sin B = \frac{2 \tang \frac{1}{2} B}{1 + \tang^2 \frac{1}{2} B}$ (F. 85, 84, 95)

98. $\sin B = \frac{2}{\tang \frac{1}{2} B + \cotg \frac{1}{2} B}$ (F. 74)

99. $\sin B = \frac{1}{\cotg B + \tg \frac{1}{2} B}$ (F. 71)

100. $\sin B = 2 \sin^2 (45^0 + \frac{1}{2} B) - 1$ (F. 29, 20)

101. $\sin B = 1 - 2 \sin^2 (45^0 - \frac{1}{2} B)$ (F. 29, 20)

102. $\sin B = \frac{1 - \tg^2 (45^0 - \frac{1}{2} B)}{1 + \tg^2 (45^0 - \frac{1}{2} B)}$ (F. 76)

103. $\sin B = \frac{\tg (45^0 + \frac{1}{2} B) - \tg (45^0 - \frac{1}{2} B)}{\tg (45^0 + \frac{1}{2} B) + \tg (45^0 - \frac{1}{2} B)}$ (F. 75, 8; 95)

104. $\sin B = \sin (60^0 + B) - \sin (60^0 - B)$ (F. 11, 2)

380. Der Cosinus eines Bogens läßt sich durch folgende Ausdrücke darstellen:

105. $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B}$ (F. 10)

106. $\cos B = \frac{\sin B}{\tang B}$ (F. 47)

107. $\cos B = \sin B \cdot \cotg B$ (F. 48)

108. $\cos B = \frac{1}{\sec B} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tg^2 B}}$ (F. 84, 85)

109. $\cos B = \frac{\cot g\ B}{\sqrt{1 + \cot g^2 B}}$ (§. 89, 88, 48)

110. $\cos B = \cos^2 \frac{1}{2} B - \sin^2 \frac{1}{2} B$ (§. 16)

111. $\cos B = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} B$ (§. 18)

112. $\cos B = 2 \cos^2 \frac{1}{2} B - 1$ (§. 17)

113. $\cos B = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2 B}{2}\right)}$ (§. 17)

114. $\cos B = \frac{1 - tg^2 \frac{1}{2} B}{1 + tg^2 \frac{1}{2} B}$ (§. 86, 84)

115. $\cos B = \frac{\cot g \frac{1}{2} B - tg \frac{1}{2} B}{\cot g \frac{1}{2} B + tg \frac{1}{2} B}$ (§. 71, 73)

116. $\cos B = \frac{1}{1 + tg\ B \,.\, tg \frac{1}{2} B}$ (§. 87, 84)

117. $\cos B = \frac{2}{tg\ (45^0 + \frac{1}{2} B) + \cot g\ (45^0 + \frac{1}{2} B)}$ (§. 75)

118. $\cos B = 2 \cos (45^0 + \frac{1}{2} B) \,.\, \cos (45^0 - \frac{1}{2} B)$ (§. 28)

119. $\cos B = \cos (60^0 + B) + \cos (60^0 - B)$ (§. 13, 2)

381. Für die Tangente eines Bogens hat man folgende Werthe:

120. $\tan g\ B = \frac{\sin B}{\cos B}$ (§. 47)

121. $\tan g\ B = \frac{1}{\cot g\ B}$ (§. 49)

122. $\tan g\ B = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 B}\right) - 1}$ (§. 84, 85)

123. $\tan g\ B = \frac{\sin B}{\sqrt{1 - \sin^2 B}}$ (§. 105, 120)

124. $\tan g\ B = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 B}}{\cos B}$

125. $\tan g\ B = \frac{2 \tan g \frac{1}{2} B}{1 - tg^2 \frac{1}{2} B}$ (§. 65)

126. $\tan g\ B = \frac{2 \cot g \frac{1}{2} B}{\cot g^2 \frac{1}{2} B - 1}$ (§. 125)

127. $\tan g\ B = \frac{2}{\cot g \frac{1}{2} B - tg \frac{1}{2} B}$ (§. 126)

128. $\tan g\ B = \cot g\ B - 2 \cot g\ 2 B$ (§. 65)

129. $\tan g\ B = \frac{1 - \cos 2 B}{\sin 2 B}$ (§. 70)

130. $\tang B = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$ (F. 67)

131. $\tang B = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2B}{1 + \cos 2B}\right)}$ (F. 66)

132. $\tang B = \frac{tg\,(45^0 + \frac{1}{2} B) - tg\,(45^0 - \frac{1}{2} B)}{2}$ (F. 75)

Vierter Abschnitt.

Von dem Gebrauche der trigonometrischen Tafeln zur leichtern Berechnung mancher Größen.

382. Lehrsatz. Jede Größe, die ein ächter Bruch ist, und, welche Veränderungen sie auch erleide, dieß stets bleibt, kann man als den Sinus eines Bogens ansehen; eben so kann man jede Größe, die ein Bruch ist, und bei Veränderungen, die sie erleidet, den Werth sowohl jedes beliebigen ächten als unächten Bruches, also auch jeder noch so großen ganzen Zahl, annehmen kann, als die Tangente eines Bogens betrachten.

Beweis. Nimmt man den Radius zur Einheit, so sind alle Sinusse (ächte) Brüche; die Tangenten sind ächte Brüche bis 45°, von da an werden sie unächte Brüche und zum Theil ganze Zahlen.

Anmerkung. Die Secanten, die immer größer als der Radius, sind unächte Brüche und ganze Zahlen.

383. Lehrsatz. Wenn man in einem Ausdruck von der Form $ab - cd = x$, wo a, b, c, d jede beliebige Größe haben können, nur so, daß stets $ab < cd$, $\sqrt{\left(\frac{cd}{ab}\right)} = \cos A$ setzt, so ist $ab - cd = x = cd \,.\, \tang^2 A$.

Bew. $x = ab - cd = cd\left(\frac{ab}{cd} - 1\right) = cd\left[\frac{1}{\cos^2 A} - 1\right]$

$= cd \,.\, (\sec^2 A - 1)$

$= cd \,.\, \tang^2 A.$

Zusatz. Da man jeder Zeit $ab = p^2$ und $cd = q^2$ setzen kann, so hat man auch, wenn $x = p^2 - q^2$ und $\frac{q}{p} = \cos A$,

$x = q^2 \,.\, \tang^2 A.$

384. Lehrsatz. In jedem Ausdruck von der Form $x = ab + cd$ kann man, welche Größe auch a, b, c, d haben, $\sqrt{\left(\frac{cd}{ab}\right)} = \tang A$ setzen, und erhält alsdann $x = \frac{ab}{\cos^2 A}$.

Bew. $x = ab + cd = ab\left(1 + \frac{cd}{ab}\right)$

$= ab\,(1 + \text{tang}^2\ A)$

$= ab\ .\ \sec^2 A = \frac{ab}{\cos^2 A}.$

Zus. 1. Man kann auch

$$\text{cotg}\ A = \sqrt{\left(\frac{cd}{ab}\right)}$$

setzen, und erhält alsdann

$$x = \frac{ab}{\sin^2 A}.$$

Zusatz 2. Nimmt man $ab = p^2$ und $cd = q^2$, und setzt $\frac{q}{p} = \text{tang}\ A$, so erhält man

$$x = \frac{p^2}{\cos^2 A}.$$

385. Lehrsatz. Setzt man in einem Größenausdrucke von der Form $x = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\frac{q}{p} = \text{tang}\ A$, so erhält man $x = \frac{p}{\cos A}$.

Bew. $x = \sqrt{p^2 + q^2} = p\sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$

$= p\sqrt{1 + \text{tang}^2 A} = p\ .\sec A$

$= \frac{p}{\cos A}.$

386. Lehrsatz. Wenn man in einem Ausdrucke von der Form $x = \sqrt{p^2 - q^2}$, $\frac{q}{p} = \cos A$ setzt, so erhält man $x = p \sin A$; und nimmt man $\frac{q}{p} = \sin A$, so ist $x = p\ .\ \cos A$.

Bew. $x = \sqrt{p^2 - q^2} = p\sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right)} = \begin{cases} p\sqrt{1 - \cos^2 A} \\ p\sqrt{1 - \sin^2 A} \end{cases}$

$= \begin{cases} p\ .\ \sin A \\ p\ .\ \cos A. \end{cases}$

387. Lehrsatz. Setzt man in einem Ausdrucke von der Form: $x = m . \frac{a \pm b}{a \mp b}$, $\frac{b}{a} = \text{tang}\ B$, so erhält man dadurch

$$x = m\ .\ \text{tang}\ (45 \pm B).$$

Bew. $x = m\ .\ \frac{1 \pm \frac{b}{a}}{1 \mp \frac{b}{a}} = m\ .\ \frac{1 \pm \text{tg}\ B}{1 \mp \text{tg}\ B}$

$= m\ .\ \text{tang}\ (45^0 \pm B).$

Neuntes Buch.

T r i g o n o m e t r i e.

E i n l e i t u n g.

388. Erklärung. Die Trigonometrie ist die Wissenschaft, welche uns Dreiecke ausmessen oder dieselben auflösen lehrt *).

L. G. Tr. 1.

Anmerkung 1. Wir werden uns hier auf die Auflösung geradliniger Dreiecke beschränken. Man nennt diesen Theil der Trigonometrie gewöhnlich ebene Trigonometrie, weil die Seiten jedes geradlinigen Dreiecks in einer und derselben Ebene liegen, und stellt ihr entgegen die sphärische Trigonometrie, welche die sphärischen oder Kugel-Dreiecke zum Gegenstand ihrer Untersuchung nimmt, — Dreiecke, deren Seiten als Normalkreisbogen einer Sphäre nie in derselben Ebene liegen.

Anmerkung 2. Was man Dreiecksmessung (Trigonometrie) nennt, sollte eigentlich Dreiecksberechnung heißen, da man die unbekannten Seiten und Winkel eines Dreiecks durch Rechnung findet — eine Bestimmungsart, die bei den Alten gar nicht vorkam, und wovon sich z. B. im Euklides auch keine Spur findet.

Linien und Winkel werden dort als bekannt angesehen, wenn sie ihrer Größe nach gegeben oder durch die übrigen Stücke der Figur, zu der sie gehören, bestimmt sind; wovon wir in der Anm. 2 zu S. 478 ein bemerkenswerthes Beispiel anführen werden. — Da wir also rechnen müssen, so werden wir von Multiplication und Division von Linien d. i. von Zahlen, welche die Größe dieser Linien darstellen, sprechen; wie wir dieß schon in der Anm. 1 zu 325 gethan, und noch umständlicher in der Anm. zu 354 erörtert haben.

389. Erklärung. Man sagt, ein Dreieck werde aufgelöst, wenn aus zwei Winkeln und einer Seite, oder aus zwei Seiten und einem Winkel, oder aus allen drei Seiten desselben, als den bekannten und gegebenen Stücken, die übrigen (durch Rechnung) bestimmt werden. Und die Erforschung der Regeln, welche man, um zu dieser Bestimmung zu gelangen, befolgen muß, ist es, welche den Zweck der Trigonometrie ausmacht.

Anmerkung 1. Die Trigonometrie setzt voraus, daß die gegebenen Stücke hinreichend sind, um von ihnen als den bekannten zu den gesuchten zu gelangen, daß also dadurch, daß man den gegebenen Stücken bestimmte Größenwerthe beilegt, auch die übrigen nothwendig bestimmte Werthe annehmen, daß es mithin nie zwei Dreiecke geben kann, die in den gegebenen Stücken übereinstimmten, in den übrigen dagegen verschieden wären. Dieß ist auch der Grund, warum in der Erklärung nicht der Fall mitaufgeführt worden ist, wo blos die drei Winkel in zwei Dreiecken einzeln gleich sind, denn aus dem vierten Buche weiß man, daß dann die Dreiecke blos ähnlich, und zwar jede Seite des einen gleich vielmal größer oder kleiner als die entsprechende des andern

---

*) Eine weit umfassendere und richtigere Bestimmung des Begriffs der Trigonometrie findet man in: v. Münchow's Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie ꝛc. Bonn 1826, §. 6. Anm. des Uebers.

ist, aber eben darum je zwei solcher Seiten nichts weniger als unter einander gleich zu sein brauchen.

Es lassen sich daher auch bei der Untersuchung über die Bestimmung der noch fehlenden Stücke eines Dreiecks aus den übrigen gegebenen nur drei Fälle unterscheiden, die nämlich, welche wir in der Erklärung selbst namhaft gemacht haben. Und daß in dem ersten und letzten Falle durch die gegebenen Stücke die übrigen in der That vollkommen bestimmt seien, geht aus den Sätzen 46 und 50 im ersten Buche klar und bestimmt hervor. Dasselbe gilt im Ganzen von dem zweiten Falle, nur mit dem Unterschiede, daß man hier unterscheiden muß, ob der gegebene Winkel zwischen den gegebenen Seiten liegt oder nicht; findet das erstere Statt, so leuchtet die Wahrheit unserer Behauptung aus S. 45 hervor; ist dagegen der gegebene Winkel der Gegenwinkel für eine der gegebenen Seiten, so ist nach S. 49 im ersten Buche durch die gegebenen Stücke Alles bestimmt, wenn man nur noch weiß, ob der Gegenwinkel der andern gegebenen Seite spitz oder stumpf ist. Denn sind (Fig. 68) die Seiten AD, DC und Winkel A gegeben, so lassen sich zwei Dreiecke ADC und ADB construiren, die in diesen Stücken übereinstimmen und gleichwohl nicht nur hinsichtlich ihres Flächeninhaltes sondern auch der drei übrigen Stücke verschieden sind. In jedem Falle aber sind die beiden Dreiecke so beschaffen, daß der Winkel ACD in dem einen das Supplement von dem Winkel B des andern ist. Da nun Supplementarwinkel einerlei Sinus haben (346, 3. 1), so kann man, so oft eine Rechnung, durch welche man einen Winkel zu bestimmen sucht, dahin führt, daß man einen Werth für den Sinus dieses Winkels findet, nicht wissen, ob man den in den Tafeln neben dem gefundenen Sinus stehenden spitzen Winkel oder dessen Supplement als den gesuchten betrachten soll. Ob beide Werthe zulässig sind oder nur einer und welcher, kann nur aus der besondern Beschaffenheit der jedesmaligen Aufgabe entschieden werden.

Anmerkung 2. Man pflegt gewöhnlich bei der Auflösung der Dreiecke die rechtwinkeligen zuerst und abgesondert von den schiefwinkeligen zu behandeln. Und es ist ohne Zweifel, daß die erstern größere Leichtigkeit und Einfachheit für die Auflösung darbieten, als die letztern, darum weil ein Stück, der rechte Winkel, in ihnen schon zum Voraus bestimmt und gegeben ist. Woraus dann ferner folgt, daß sein Sinus gleich dem Radius, und jeder der beiden spitzen Winkel das Complement des andern ist.

Anmerkung 3. Wir wollen hier noch eines Hülfssatzes erwähnen, den wir im Folgenden oft anwenden werden. Von zwei Größen A, und B erhält man die größere (A), wenn man zu ihrer halben Summe $\frac{1}{2}$ (A + B) ihren halben Unterschied $\frac{1}{2}$ (A — B) addirt; zieht man dagegen diesen halben Unterschied von der halben Summe ab, so erhält man die kleinere Größe (B).

Erster Abschnitt.

Von den rechtwinkeligen Dreiecken.

---

390. Lehrsatz. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke verhält sich der Radius zum Sinus eines der spitzen Winkel, wie die Hypotenuse zu der Cathete, welche diesem Winkel gegenüber liegt; dagegen verhält sich der Radius zur Secante eines der genannten Winkel wie die an diesem Winkel anliegende Cathete zur Hypotenuse.

L. G. Tr. 42.

Vorbereitung. Man nehme an, Cd (Fig. 172) sei der Radius, gdb der mit ihm aus C beschriebene Umkreis; ferner sei di ⊥ Cb, dh und DH ⊥ Cg, und Cg ⊥ Cb.

Beweis. Erster Theil. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Cdi und CDJ verbunden mit 346.

Zweiter Theil. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CDJ und Ceb verbunden mit 351.

Anmerkung 1. Dieser Satz ist eigentlich nur ein besonderer Fall von 393.

Zus. 1. $r : \cos$ W. $CDJ = CD : DJ$
$r : \cos$ W. $DCJ = CD : CJ$

Zus. 2. $\left.\begin{array}{l} DJ : CD = r : \text{cosec W. } DCJ = \sin \text{W. } DCJ : r \\ CJ : CD = r : \text{cosec W. } CDJ = \sin \text{W. } CDJ : r \end{array}\right\}$ 376, Z. 1.

Anmerkung 2. Da man in den besten Tafeln die Secanten nicht findet, so ist es gut, wenn man alle Sätze und Regeln für die Secanten und Cosecanten in Sätze und Regeln für die Cosinusse und Sinusse umwandelt.

Zus. 3. $\sin^2 \frac{1}{2}$ W. $CDJ = \frac{CD - DJ}{2\,CD}$ (378, F. 29).

also $\sin \frac{1}{2}$ W. $CDJ = \sqrt{\left(\frac{CD - DJ}{2\,CD}\right)}$.

Cagnoli §. 217.

Zus. 4. $tg^2 \frac{1}{2}$ W. $CDJ = \frac{CD - DJ}{CD + DJ}$ (378, F. 29 u. 30).

391. **Lehrsatz.** In jedem rechtwinkeligen Dreiecke verhält sich der Radius zur Tangente eines der spitzen Winkel, wie die an diesem Winkel anliegende Cathete zur andern.

L. G. Tr. 43.

Vorbereitung. Wie für den vorigen Satz; außerdem be $\perp$ Cb, und GF $\perp$ Cg.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CDJ und Cbe; in Verbindung mit 349.

Zus. Daher ist auch:
$CJ : DJ = r : \text{cotang W. } CDJ$
$DJ : CJ = r : \text{cotang W. } DCJ.$

392. Regeln zur Auflösung der vier Fälle, die bei rechtwinkeligen Dreiecken vorkommen.

Anmerkung. Sind drei Stücke eines Dreiecks gegeben, so kann man immer (mit Ausnahme der schon früher bereits ausgeschiedenen Fälle) jedes der drei übrigen unmittelbar d. h. unabhängig von den beiden andern finden. Aber man kann auch, und dieß ist oft noch bequemer und besser, erst eines derselben bestimmen und dann durch Hülfe dieses bereits gefundenen die übrigen. So wird z. B. in dem 2ten der folgenden vier Fälle die gesuchte Seite entweder unmittelbar gefunden, durch die erste Auflösung (II, Nro. 2), welche sich auf (87) stützt, oder noch leichter dadurch daß man zuvor ihren Gegenwinkel sucht, und dann II, Nro. 1 anwendet. Dasselbe gilt von dem vierten Fall.

I. Erster Fall.

Gegeben: Die Hypotenuse und einer der spitzen Winkel.

Gesucht: Die beiden Catheten und der andere Winkel.

Auflösung:

1) Gegenseite (des gegeb. Wink.) $= \frac{\text{Hyp.. sin. gegeb. Wink.}}{\text{radius}}$ (390).

2) Anliegende Seite $= \frac{\text{Hyp. . cos. gegeb. Wink.}}{\text{radius}}$ (390, Z. 1).

3) Gesuchter Winkel = compl. gegeb. Wink.

II. Zweiter Fall.

Gegeben: Hypotenuse und eine Cathete

Gesucht: Die andere Cathete und die Winkel.

Erste Auflösung.

1) $\sin.$ Gegenw. (d. gegeb. Seite) $= \frac{\text{gegeb. Seite . radius}}{\text{Hypoten.}}$ (390)

oder

$\cos.$ anlieg. Wink. $= \frac{\text{gegeb. Seite . radius}}{\text{Hypoten.}}$ (390, Z. 1)

2) gesuchte Cathete $= \frac{\sin.\ \text{Gegenw. . Hypot.}}{\text{radius}}$ (390)

$= \frac{\text{tang. Gegenw. . gegeb. Seite}}{\text{radius}}$ (391)

oder auch

gesuchte Cathete $= \sqrt{(\text{Hyp.})^2 - (\text{geg. Cath.})^2}$ (87, Z. 2)

$= \sqrt{[(\text{Hyp.} + \text{geg. Cath.})(\text{Hyp.} - \text{geg. Cath.})]}$

Zweite Auflösung für die Winkel.

$\sin \frac{1}{2}$ anlieg. Wink. $= \sqrt{\left[\frac{\text{Hyp.} - \text{gegeb. Cath.}}{2\ \text{Hyp.}}\right]}$ (390, Z. 3)

$\text{tang} \frac{1}{2}$ anlieg. Wink. $= \sqrt{\left[\frac{\text{Hyp.} - \text{gegeb. Cath.}}{\text{Hyp.} + \text{gegeb. Cath.}}\right]}$ (390, Z. 4).

Anmerkung. Giebt eine Rechnung als Resultat den Cosinus eines sehr kleinen oder den Sinus eines einem Rechten sehr nahe kommenden Winkels, so kann man durch die gewöhnlichen Tafeln keine große Genauigkeit erlangen, weil in diesem Falle die Cosinusse und Sinusse für eine schon merkliche Veränderung des Winkels oder Bogens ihre eigne Größe nur wenig ändern. Das Gegentheil findet Statt für Sinusse kleiner und Cosinusse solcher Winkel, die nahe einem Rechten gleich sind; man muß daher bei Auflösungen zur Erreichung des möglich größten Grades der Genauigkeit diesen Umstand berücksichtigen.

III. Dritter Fall.

Gegeben: Eine Cathete und ein Winkel.

Gesucht: Hypotenuse, andere Cathete und Winkel.

Auflösung:

1) Gesuchter Winkel $=$ compl. gegeb. Wink.

2) Hyp. $= \frac{\text{gegeb. Cath. . radius}}{\cos.\ \text{anlieg. Wink.}}$ (390, Z. 1)

$= \frac{\text{gegeb. Cath. . radius}}{\sin.\ \text{Gegenwink.}}$ (390)

$= \frac{\text{gegeb. Cath. . sec. anlieg. Wink.}}{\text{radius}}$ (390)

$= \frac{\text{gegeb. Cath. . cosec. Gegenwink.}}{\text{radius}}$ (390, Z. 2).

3) Gesuchte Cathete $= \frac{\text{gegeb. Cath. . tang. anlieg. Wink.}}{\text{radius}}$ (391)

$= \frac{\text{gegeb. Cath. . cotg. Gegenwink.}}{\text{radius}}$ (391, Z.)

IV. Vierter Fall.

Gegeben: Die beiden Catheten.

Gesucht: Die Hypotenuse und die beiden Winkel.

Auflösung:

1) $\text{cotang. gesucht. Wink.} = \frac{\text{anlieg. Seite} \times \text{radius}}{\text{Gegenseite}}$ (391, Z.)

oder $\text{tang. gesucht. Wink.} = \frac{\text{Gegenseite . radius}}{\text{anliegende Seite}}$ (391).

2) $\text{Hypot.} = \frac{\text{Cath.} \times \text{radius}}{\text{sin. Gegenwink.}}$ (390).

$\text{Hypot.} = \frac{\text{Cath.} \times \text{radius}}{\text{cos. anlieg. Wink.}}$ (390, Z. 1)

$= \frac{\text{Cath.} \times \text{cosec. Gegenwink.}}{\text{radius}}$ (390, Z. 2)

$= \frac{\text{Cath.} \times \text{sec. anlieg. Wink.}}{\text{radius}}$ (390).

3) $\text{Hypot.} = \sqrt{(\text{eine Cath.})^2 + (\text{andere Cath.})^2}$ (87)

$= \text{eine Cath.} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\text{andere Cath.}}{\text{erstere Cath.}}\right)^2\right]}$

Anmerkung 1. Wenn man, was freilich das einfachste ist, den radius = 1 setzt, so muß man darauf beim Gebrauche der Tafeln die gebührende Rücksicht nehmen, und alle Sinusse und Cosinusse, die Tangenten bis 45° und Cotangenten über 45° als ächte Brüche betrachten, also wenn man mit Logarithmen rechnet, die Characteristik des Resultates, so oft dieß der Logarithme von einer Seite ist, um 10 vermindern.

Anmerkung 2. Wenn man, wie dieß in der Praxis fast immer der Fall ist, mit Logarithmen rechnet, so wird die Rechnung einfacher, wenn man, anstatt einen Logarithmus zu subtrahiren, seine decadische Ergänzung addirt. Eben so muß man bei Logarithmen immer in dem II und IV Fall den Ausdruck in Nro. 3 gebrauchen, weil die Rechnung sich vereinfacht.

Zweiter Abschnitt.

Von den schiefwinkeligen Dreiecken.

---

393. Lehrsatz. In jedem Dreiecke (ABC Fig. 179) verhalten sich die Seiten zu einander wie die Sinusse ihrer Gegenwinkel, also:

$$AB : BC = \sin C : \sin A$$
$$AC : BC = \sin B : \sin A$$
$$AC : AB = \sin B : \sin C.$$

L. G. Tr. 44.

Vorbereitung. Ziehe $AH \perp BC$ und $BE \perp AC$.

Beweis. Aus 390 und 156.

Anmerkung 1. Ist Dr. ABC z. B. in A rechtwinkelig, so hat man:

$$AC : BC = \sin B : \sin 90^\circ$$
$$AC : BC = \sin B : \text{radius}$$

was unsern Satz 390 giebt, der also nur ein besonderer Fall dieses allgemeinern Satzes ist.

Anmerkung 2. Auch unser früherer Satz 391 wird leicht aus dem vorstehenden hergeleitet. Denn ist $A = 90^\circ$, so ist

$$\begin{aligned} AB : AC &= \sin C : \sin B \\ &= \cos B : \sin B \\ &= 1 : \frac{\sin B}{\cos B} \\ &= r : \text{tang } B. \end{aligned}$$

Anmerkung 3. Ist einer der Winkel z. B. A ein stumpfer, so sollte man eigentlich anstatt sin A haben sin. suppl. A; allein wir haben oben in 346, 3. 1 gesehen, daß das Supplement eines Winkels denselben Sinus hat, wie der Winkel selbst; und wollte man die Richtigkeit dieser Behauptung aus unserem Satze hergeleitet haben, so betrachte man Fig. 22. In ihr ist

$\triangle DAB \sim \triangle HCD$, also

$AD : DC = AB : CH$

Aber im Dr. CAB ist:

$AB : CA = \sin$ W. $ACB : r$

und im Dr. CAH

$CH : CA = \sin$ W. $CAH : r$

also $AB : CH = \sin$ W. $ACB : \sin$ W. CAH,

und darum auch

$AD : DC = \sin$ W. $ACB : \sin$ W. CAH.

Aber im Dr. ACD ist:

$AD : DC = \sin$ W. $ACD : \sin$ W. CAD

also $\sin$ W. $ACB : \sin$ W. $ACD = \sin$ W. $CAD : \sin$ W. CAD

mithin $\sin$ W. $ACD = \sin$ W. ACB d. h. $\sin$ W. $ACD = \sin.$ suppl. W. ACD.

Anmerkung 4. Dieser Satz dient die Seiten eines Dreiecks zu finden, wenn eine derselben und die Winkel gegeben sind, oder die dritte Seite zu finden, wenn die beiden andern und einer ihrer Gegenwinkel gegeben. Aber man achte in diesem Falle auf das, was wir in 389, Anm. 1 über die Beschaffenheit der unbekannten Winkel gesagt haben. Wir werden Anwendungen dieses Satzes in dem ersten und zweiten Falle finden.

394. **Lehrsatz.** In jedem ungleichseitigen Dreiecke ABC verhält sich die Summe zweier Seiten ($BC + AB$) zu ihrem Unterschiede ($BC - AB$) wie die Tangente der halben Summe ihrer Gegenwinkel [$\text{tang } \frac{1}{2}(A + C)$] zur Tangente des halben Unterschiedes dieser Winkel [$\text{tang } \frac{1}{2}(A - C)$].

L. G. Tr. 47.

Beweis 1. $BC : AB = \sin A : \sin C$ (393)

$$\begin{aligned} BC + AB : BC - AB &= \sin A + \sin C : \sin A - \sin C \\ &= \text{tang } \tfrac{1}{2}(A + C) : \text{tg } \tfrac{1}{2}(A - C) \quad (378, \text{F. } 81). \end{aligned}$$

Beweis 2. Aus Figur 180.

Zus. 1. Kennt man in einem Dreiecke zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, so kennt man auch 1) die Summe jener Seiten, 2) ihren Unterschied, 3) die Summe ihrer beiden Gegenwinkel, die das Supplement zu dem gegebenen Winkel bildet, kann also durch unsern Satz den halben Unterschied dieser beiden Winkel finden, und daraus durch den Hülfssatz 391, Anm. 3, die einzelnen Winkel selbst herleiten. Unser Satz dient also ganz eigentlich dazu ein Dreieck aufzulösen, wenn zwei Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel gegeben sind.

Anmerkung 1. Dieser Satz ist nur anwendbar bei ungleichseitigen Dreiecken; nicht bei gleichseitigen, da in ihnen sowohl der Unterschied zweier Seiten als zweier Winkel Null ist; aus eben diesem Grunde auch nicht bei gleichschenkeligen, wenn der gegebene Winkel der von den Schenkeln eingeschlossene ist. In den übrigen Fällen beim gleichschenkeligen Dreiecke wäre zwar die Anwendung des Satzes zulässig, allein man bedarf ihrer dann nicht, da schon ohnehin alle Stücke des Dreiecks bekannt sind.

Anmerkung 2. Sind in einem gleichschenkeligen Dreiecke (KBH Fig. 79) die bei-

den Schenkel und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben, so fälle man aus der Spitze B die Senkrechte BJ; da durch diese sowohl die Grundlinie als der Winkel an der Spitze halbirt wird, so hat man:

$$r : \sin \tfrac{1}{2} KBH = KB : \tfrac{1}{2} KH$$

oder, (was noch leichter) da alle Winkel eines gleichschenkeligen Dreiecks bestimmt sind, wenn man einen kennt, man findet die dritte Seite durch S. 393.

Zus. 2. Da $A + C = 180^\circ - B$

also $\frac{1}{2}(A + C) = 90^\circ - \frac{1}{2} B$

oder $\frac{1}{2}(A + C) = \text{compl.} \frac{1}{2} B$,

daher $\text{tang} \frac{1}{2}(A + C) = \text{cotang.} \frac{1}{2} B$

so kann man unsern Satz auch so ausdrücken:

$$BC + AB : BC - AB = \text{cotg} \tfrac{1}{2} B : \text{tang} \tfrac{1}{2}(A - C)$$

und man erhält den

größern Winkel $A = \text{compl.} \frac{1}{2} B + \frac{1}{2}$ gefund. Unterschied

kleinern Winkel $C = \text{compl.} \frac{1}{2} B - \frac{1}{2}$ gefund. Unterschied.

Zus. 3. $BC - AB : BC + AB = \text{tg} \frac{1}{2} B : \text{cotg} \frac{1}{2}(A - C)$ (371, Z. 1)

also
$$\text{cotg} \tfrac{1}{2}(A - C) = \frac{BC + AB}{BC - AB} \cdot \text{tang} \tfrac{1}{2} B$$

$$= \frac{1 + \frac{AB}{BC}}{1 - \frac{AB}{BC}} \cdot \text{tg} \tfrac{1}{2} B$$

Anmerkung 3. Man braucht also, um die Winkel zu finden, nicht die Seiten selbst zu kennen; es ist genug, daß man ihr Verhältniß $\frac{AB}{BC}$ kenne.

Zus. 4. Setzt man in Zus. 3 $\frac{AB}{BC} = \text{tang}\, \alpha$, so hat man

$$\text{cotg} \tfrac{1}{2}(A - C) = \frac{1 + \text{tang}\, \alpha}{1 - \text{tg}\, \alpha} \cdot \text{tg} \tfrac{1}{2} B$$

$$= \text{tg}(45^\circ + \alpha) \cdot \text{tg} \tfrac{1}{2} B \quad (378, \text{F.} 64)$$

395. Lehrsatz. In jedem ungleichseitigen Dreiecke verhält sich die größte Seite (AC Fig. 181) zur Summe der beiden übrigen (BC + AB), wie der Unterschied eben dieser beiden (BC — AB) zum Unterschied der beiden Segmente (EC — AE), in welche die größte Seite durch ihr Höhenperpendikel getheilt wird.

Bew. 1. Aus 87 Z. 2 auf die Drr. ABE und CBE angewandt, verbunden mit 81.

Bew. 2. Aus Fig. 181.

Zus. Aus unserem Satze

$$AC : BC + AB = BC - AB : EC - AE$$

ergiebt sich, daß wenn AC, BC, AB gegeben sind, auch EC — AE gefunden werden kann, also auch, durch Hülfssatz 391 Anmerk. 3, die Segmente EC und AE selbst, da man auch ihre Summe d. i. AC kennt.

Sind nun AE und EC bestimmt, so findet man durch S. 390 in den rechtwinkeligen Dreiecken ABE und CBE die Winkel A und C, daraus Winkel ABE und CBE, und aus ihnen B. Man kann also, wie man hieraus sieht, durch Verbindung unseres Satzes mit S. 390 die Winkel eines Dreiecks finden, dessen Seiten bekannt sind.

Anmerkung. Aus denselben Gründen, die wir in Anmerkung 1 zum vorigen Satze

angegeben haben, läßt sich unser Satz nicht auf diejenigen gleichschenkeligen Dreiecke anwenden, in denen die Grundlinie die größte Seite ist, und eben so wenig auf gleichseitige Dreiecke; aber bei letztern bedarf es auch keiner Bestimmung der Winkel (51, Z. 3), und bei erstern, wo der Winkel an der Spitze immer durch die Senkrechte auf die Grundlinie, so wie diese selbst, halbirt wird, kann man durch Auflösung eines einzigen rechtwinkeligen Dreiecks die Größe aller Winkel bestimmen; denn

$$AB : \tfrac{1}{2} AC = r : \cos A = r : \sin \tfrac{1}{2} B.$$

396. **Lehrsatz.** In jedem Dreiecke verhält sich der Radius zum Cosinus eines der Winkel, wie das doppelte Rechteck aus den diesen Winkel einschließenden Seiten zum Ueberschuß der Summe der Quadrate eben dieser beiden Seiten über das Quadrat der dritten Seite, also (Fig. 66)

$$r : \cos W.BCA = 2\,AC\,.\,BC : \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$$

L. G. Tr. 45.

Bew. Fällt man die Senkrechte BD, so ist (90)

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 \mp 2\,AC\,.\,CD.$$

Aber in dem rechtwinkeligen Dreiecke BCD ist

$$BC : CD = r : \cos BCD,$$

also, für $r = 1$, $CD = BC\,.\,\cos BCD$.

Ferner ist $\cos BCD = \pm \cos BCA$ je nachdem BCA ein spitzer oder stumpfer Winkel ist, (347, Z. 2)

also $\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 \mp 2\,AC\,.\,(\pm BC) \cos W.BCA$

daher in allen Fällen

$\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\,AC\,.\,BC\,.\,\cos C$, woraus unser Satz sofort sich ergiebt.

Anmerkung 1. Dieser Satz, der sich ganz auf unsern frühern Satz 90 stützt, kann als die gesammte Trigonometrie in sich fassend betrachtet werden.

Zus. 1. Bezeichnet man der Kürze halber die drei Seiten eines Dreiecks mit a, b, c, und ihre Gegenwinkel der Reihe nach mit A, B, C, so giebt unser Satz unmittelbar

$$1.\quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$2.\quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$$

$$3.\quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

Anmerkung 2. Es sind diese drei Formeln, auf welche z. B. Puissant Alles stützt, was er über Trigonometrie beibringt in seinem vortrefflichen Werke: Traité de Geodésie.

Anmerkung 3. Ist $A = 90^\circ$, so ist $\cos A = 0$, also $a^2 = b^2 + c^2$ und man erhält also den pythagoräischen Lehrsatz.

Setzt man diesen Werth für a^2 aus Nro. 1 unseres Zusatzes in die beiden andern Formeln, so erhält man

$$\cos B = \sin C = \frac{c}{a},$$

und $\sin B = \cos C = \dfrac{b}{a}$,

also $1 : \sin B = a : b$ etc. was unsern S. 390 giebt; ferner $\dfrac{\sin B}{\cos B} = \operatorname{tang} B = \dfrac{b}{c}$ d. i. $1 : \operatorname{tg} B = c : b$ was unsern S. 391 giebt.

Zus. 2. $\sin A = \frac{a\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2\ abc}$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$
$$= 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}\right)^2$$
$$= \frac{4\ a^2\ b^2\ c^2 - a^2\ (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\ a^2\ b^2\ c^2}$$

also $$\sin A = \frac{a\sqrt{4\ b^2\ c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2\ abc}$$
$$= \frac{a\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2\ abc}$$

Anmerkung 4. Man vergleiche damit die Ausdrücke in 399, 3., und 400, Anm.

Anmerkung 5. Setzt man der Kürze halber für den unter dem Wurzelzeichen in Zus. 2 stehenden, aus lauter bekannten Größen gebildeten Ausdruck, das einfache Symbol D, so erhält man

$$\sin A = \frac{a\sqrt{D}}{2\ abc}, \text{ und auf ähnliche Weise}$$
$$\sin B = \frac{b\ .\sqrt{D}}{2\ abc}$$
$$\sin C = \frac{c\ .\sqrt{D}}{2\ abc}$$

woraus sofort sich ergiebt $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ d. h. unser obiger S. 393.

Anmerkung 6. Aus dem Satze $\sin A : \sin B = a : b$ kann man nun wieder, wie wir schon früher angedeutet haben, durch bloße Umformung des Ausdrucks herleiten:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)} = \frac{a + b}{a - b}$$ d. h. unsern frühern S. 394, und man sieht daher, wie alle Hauptsätze der Trigonometrie aus unserm in Rede stehenden Satze durch bloße Rechnung hergeleitet werden können.

Zus. 3. $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\left[\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4\ bc}\right]}$

Bew. $$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{2} \quad (378, \text{Fig. } 29)$$
$$= \frac{2\ bc - b^2 - c^2 + a^2}{4\ bc}$$
$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{4\ bc}$$
$$= \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4\ bc} \quad (81)$$

also $$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\left[\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4\ bc}\right]}$$

Anmerkung 7. Dieser Satz bietet, wie man sieht, auch einen Weg dar, die Winkel eines Dreiecks aus seinen Seiten zu finden.

Zus. 4. $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\left[\frac{(a + b + c)(-a + b + c)}{4\ bc}\right]}$

Bew. Wird aus

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 + \cos A}{2}$$

auf ähnliche Weise, wie der des vorigen Zusatzes hergeleitet.

Anmerkung 8. Sind alle die drei Seiten eines Dreiecks gegeben, so läßt sich unmittelbar der Cosinus für die Hälfte eines jeden seiner Winkel finden.

Anmerkung 9. Die in den Zusätzen 3 und 4 gegebenen Auflösungen gewähren den Vortheil, daß, weil $\frac{1}{2}$ A unter allen Umständen $< 90^0$ sein muß, man stets unmittelbar den Winkel nimmt, der in den Tafeln neben dem gefundenen Werthe des Sinus oder Cosinus steht, also einer Untersuchung der Frage, ob nicht vielleicht das Supplement zu nehmen sei, ganz überhoben ist.

Zus. 5. $a = \sqrt{(b - c)^2 + 4\ bc \sin^2 \tfrac{1}{2} A}$

Bew. $a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos A$

$= b^2 + c^2 - 2\,bc\,(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A)$ (378, F. 11)

$= (b - c)^2 + 4\ bc \sin^2 \tfrac{1}{2} A$ etc.

Anmerkung 10. Man kann also in einem Dreiecke, von welchem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, die dritte Seite finden, ohne einen der beiden andern Winkel vorher zu bestimmen.

397. Lehrsatz. In jedem Dreiecke (BCA Fig. 66) verhält sich das Rechteck aus einer Seite (BC) und dem Sinus eines der anliegenden Winkel (BCD) zu dem Unterschiede der Rechtecke aus eben dieser Seite und dem Cosinus eben dieses Winkels und aus der andern (AC) gleichfalls an dem genannten Winkel anliegenden Seite und dem Radius, wie die Tangente des der erstern Seite gegenüberliegenden Winkels zum Radius, also (für $r = 1$)

$$a\,.\,\sin C : b - a\,.\,\cos C = \text{tang } A : 1.$$

Bew. Es sei BD $\perp$ AC; alsdann ist:

$$\text{tang } A = \frac{BD}{AD}$$

und in $\triangle$ BCD ist $BD = a\,.\,\sin C$ und

$CD = a\,.\,\cos$ W. BCD $= \pm\ a\,.\,\cos$ W. BCA

$= \pm\ a\,.\,\cos C$,

also $\text{tang } A = \dfrac{a\,.\,\sin C}{AC \mp (\pm\ a\,.\,\cos C)}$, also in jedem Falle

$$\text{tang } A = \frac{a\,.\,\sin C}{b - a \cos C}$$

woraus unser Satz leicht folgt.

Anmerkung 1. Obgleich die Lage der Senkrechten BD ganz verschieden ist, je nachdem der Winkel C spitz oder stumpf ist, so wird doch in beiden Fällen der Werth von AD auf gleiche Weise durch $a - b\,.\,\cos C$ dargestellt.

Anmerkung 2. Ist der Winkel C ein spitzer, so kann der gesuchte Winkel A gleichfalls ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer sein. Das erste findet Statt, so lange $a\,.\,\cos C < b$, denn dann ist tang A positiv; das zweite, wenn $a\,.\,\cos C = b$, denn dann wird der Nenner des Bruches, der den Werth von tang A darstellt, Null, also sein Werth unendlich groß; das letzte endlich, wenn $a\,.\,\cos C > b$, wo tang A negativ und daher $A > 90^0$ wird.

398. Regeln
zur Auflösung der vier Fälle, welche bei schiefwinkeligen Dreiecken vorkommen können.

I. Erster Fall. Fig. 180.

Gegeben: Zwei Winkel, A, und C, und die Seite b.

Gesucht: 1) der dritte Winkel B
2) die beiden andern Seiten, a, c.

Auflösung:

1. Gesuchter Winkel = Suppl. Summe der gegebenen Winkel

2. gesuchte Seite = $\frac{\text{sin Gegenwinkel . gegebene Seite}}{\text{sin Gegenw. der gegebenen Seite}}$ (393).

II. Zweiter Fall.

Gegeben: Zwei Seiten und ein Gegenwinkel.

Gesucht: 1) der andere Gegenwinkel
2) der eingeschlossene Winkel
3) die dritte Seite.

Auflösung.

1. sin. des andern Gegenw. = $\frac{\text{Gegenseite} \times \text{sin. gegeb. Wink.}}{\text{Gegenseite des gegeb. Wink.}}$ (393)

Anmerkung. Da der Sinus eines Winkels zugleich auch Sinus von dessen Supplement ist, so findet hier die Zweideutigkeit Statt, von der wir oben 389, Anm. 2 gesprochen haben. Dieselbe verschwindet jedoch in zwei Fällen, einmal, wenn diejenige von den beiden gegebenen Seiten die größere ist, deren Gegenwinkel gegeben; denn alsdann kann der andere Gegenwinkel nur spitz sein; und zweitens, wenn die Gegenseite des gesuchten Winkels größer als die des gegebenen, und der gefundene spitze Winkel kleiner als der gegebene; denn dann muß jener Winkel größer sein als dieser, und man muß eben darum sein Supplement nehmen.

2. Dritter (eingeschlossener) Winkel = suppl. Summe der beiden übrigen.

3. Dritte Seite = $\frac{\text{sin Gegenwinkel} \times \text{gegebene Seite}}{\text{sin Gegenwinkel der gegebenen Seite}}$

(393 und Nro. 1).

III. Dritter Fall.

Gegeben: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

Gesucht: 1) die beiden andern Winkel
2) die dritte Seite.

Erste Auflösung.

1. tang $\frac{1}{2}$ Unterschied der gesuchten Winkel

$= \frac{\text{Untersch. der gegeb. Seiten}}{\text{Summe der gegeb. Seiten}}$. cotg $\frac{1}{2}$ gegebener Winkel.

Größerer Winkel = compl. $\frac{1}{2}$ gegeb. W. + $\frac{1}{2}$ gefund. Untersch.
Kleinerer Winkel = compl. $\frac{1}{2}$ gegeb. W. — $\frac{1}{2}$ gefund. Untersch. } 394, 3. 1.

2. Sind die Winkel gefunden, so sucht man die dritte Seite nach Fall I.

Zweite Auflösung. Man suche in den Tafeln den Winkel (α) dessen Tangente gleich ist dem Quotienten, den man erhält, wenn man die kleinere der gegebenen Seiten (AB Fig. 180) durch die größere (BC) dividirt, dann ist:

cotg $\frac{1}{2}$ Untersch. der ges. W. = tg $\frac{1}{2}$ gegeb. W. tang $(45^0 + \alpha)$ (394, 3. 4).

Cagnoli §. 230.

Anmerkung. Diese Auflösung ist von großem Nutzen in der Astronomie, und lehrt zugleich, daß man zur Bestimmung der Winkel nicht die eigentliche Größe ihrer Gegenseiten, sondern nur ihr gegenseitiges Verhältniß zu kennen braucht.

Dritte Auflösung.

$$\text{tang. gesucht. W.} = \frac{\text{Gegenseite} \times \text{sin. gegeb. Wink.}}{\text{zweite gegeb. Seite} - \text{Gegens.} \times \text{cos. gegeb. W.}} \quad (397).$$

Anmerkung. Diese Auflösung dient blos zur Bestimmung der Größe der Winkel.

Vierte Auflösung. Man nehme den Winkel d so, daß

$$\text{tang } d = \frac{2 \text{ sin. } \frac{1}{2} \text{ gegeb. Wink.}}{\text{Untersch. gegeb. Seiten}} . \sqrt{\text{Product gegeb. Seiten}},$$

alsdann ist:

$$\text{Gesuchte Seite} = \frac{\text{Unterschied gegeb. Seiten}}{\cos d}.$$

Cagnoli 227, 228.

Beweis. Nach 396, Z. 5, ist

$$a^2 = (b-c)^2 + 4\,bc \sin^2 \tfrac{1}{2} A = (b-c)^2 \left[1 + \frac{4\,bc \sin^2 \frac{1}{2} A}{(b-c)^2}\right]$$

also, wenn $\text{tang } d = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} A \,.\, \sqrt{b \,.\, c}}{b - c}$

$$a = (b - c)\sqrt{1 + tg^2 d}$$

$$= \frac{b - c}{\cos d} \quad (378, \text{ F. } 85 \text{ und } 84).$$

Anmerkung. Durch diese Auflösung findet man die gesuchte Seite ohne vorher die Winkel bestimmt zu haben.

IV. Vierter Fall.

Gegeben: Die drei Seiten

Gesucht: Die drei Winkel.

Erste Auflösung. Man fälle auf die größte Seite aus ihrer Gegenecke eine Senkrechte, die nach 39 stets innerhalb des Dreiecks fallen und demnach die Seite in zwei Stücke theilen muß.

1. $\text{Untersch. dieser Stücke} = \dfrac{\text{Summe d. and. Seiten} \times \text{Untersch.}}{\text{Größte Seite.}}$ (395).

Größeres Stück $= \frac{1}{2}$ größte Seite $+ \frac{1}{2}$ Untersch. der Stücke

Kleineres Stück $= \frac{1}{2}$ größte Seite $- \frac{1}{2}$ Untersch. der Stücke.

2. $\text{cos. eines der beiden klein. W.} = \dfrac{\text{anlieg. Stück} \times \text{radius}}{\text{angränzende Seite}}$ (390, Z. 1).

3. Größter Winkel = suppl. Summe der beiden andern.

Zweite Auflösung. Die Winkel ohne Hülfe der Senkrechten zu finden.

1. $$\cos \tfrac{1}{2} \text{W.} = \sqrt{\left[\frac{\frac{1}{2}\text{Summe der Seiten} \,.\, (\frac{1}{2}\text{Summe} - \text{Gegenseite.})}{\text{Product der anliegenden Seiten}}\right]}$$

(396, Z. 4).

2. $$\sin \tfrac{1}{2} \text{W.} = \sqrt{\left[\frac{(\frac{1}{2}\text{Summe} - \text{eine angränz. S.})(\frac{1}{2}\text{S} - \text{and. angr. S.})}{\text{Product der anliegenden Seiten.}}\right]}$$

(396, Z. 3).

Anmerkung. Diese Auflösung kann in vielen Fällen sehr zu Statten kommen und ist ganz ähnlich der, welche man in dem entsprechenden Fall der sphärischen Trigonometrie gebraucht.

L. G. Tr. 57.

399. Lehrsatz. Der Flächenraum eines Dreiecks wird dargestellt durch das halbe Product zweier Seiten und des Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Beweis. Nach S. 203 wird der Flächenraum des Dreiecks ABC (Fig. 66) ausgedrückt durch $\frac{1}{2}$ AB . CJ.
Aber CJ : b = sin A : r, also

$$\triangle\ ABC = \frac{b\,.\,c\,.\,\sin A}{2\,r} = \frac{b\ c\ \sin A}{2} \text{ für } r = 1.$$

Zus. 1. Daher ist

$$\sin A = \frac{2\ \triangle\ ABC}{b\ .\ c}.$$

Anmerkung 1. Vergleicht man diesen Zusatz mit 396, Z. 2 so sieht man, daß
$\triangle\ ABC = \frac{1}{4}\sqrt{2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$.
Die Richtigkeit dieses Satzes wird sich auch noch aus 400, Anm. ergeben.

Anmerkung 2. Mit Berücksichtigung dessen, was wir oben 353, Anm. gesagt haben, überzeugt man sich, daß (Fig. 122)

$$\triangle\ LCH = \frac{LC\ .\ CH\ .\ \sin W.\ LCH}{2} = \frac{r^2\ .\ \sin W.\ LCH}{2}.$$

Setzt man nun W. LCH $= \frac{\pi}{m}$; wo π den halben Umkreis für den Halbmesser als Einheit bezeichnet, so ist $\triangle$ LCH $= \frac{1}{2}\ r\ .\ \sin\frac{\pi}{m}$, daher

$$\text{Abschnitt LKH} = \text{Ausschnitt LCHK} - \triangle\ \text{LCH}$$
$$= \frac{B\ .\ r}{2} - \frac{r}{2}\ .\ \sin\frac{\pi}{m}$$

wo B den zugehörigen Bogen bezeichnet. Für denselben kann man setzen $\frac{\pi\ .\ r}{m}$, und erhält dadurch:

Zus. 2. Für den Abschnitt, dessen zugehöriger Bogen $\frac{\pi}{m}$, den Ausdruck: $\left[\frac{r}{2}\frac{\pi\ r}{m} - \sin\frac{\pi}{m}\right]$.

Anmerkung 3. Für m = 1, wird $\sin\frac{\pi}{m} = 0$, und der Abschnitt also $\frac{\pi\ r^2}{2}$ = dem Halbkreis. Wenn m = 2, so erhält man den Werth für den dem Quadranten zugehörigen Abschnitt, nämlich:

$$\frac{\pi\ r^2}{4} - \frac{r^2}{2}.$$

400. Lehrsatz. Der Flächenraum eines Dreiecks (ABC Fig. 66) wird dargestellt durch die Quadratwurzel aus dem Producte, welches man erhält, wenn man die halbe Summe seiner drei Seiten mit dem halben Ueberschusse der Summe je zweier über die dritte multiplicirt.

Vorbereitung. Fälle die Senkrechte BD, bezeichne sie durch y und CD durch x; den Umfang des Dreiecks aber durch p, setze also p = a + b + c.

Bew. 1) $a^2 = y^2 + x^2$

2) $c^2 = y^2 + (b - x)^2$

3) $a^2 - c^2 = x^2 - (b - x)^2 = 2\,b\,x - b^2$

4) $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}$

$$5)\ y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$$
$$= \left(a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}\right)\left(a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,b}\right)$$
$$= \frac{[(a+b)^2 - c^2].[c^2 - (a-b)^2]}{4\,b^2}$$

also $$6)\ y^2 = \frac{1}{4\,b^2}.(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

$$7)\ y^2 = \frac{1}{4\,b^2}.\,p.\,(p - 2\,c)(p - 2\,b)(p - 2\,a)$$
$$= \frac{16}{4\,b^2}.\,\tfrac{1}{2}\,p\,(\tfrac{1}{2}\,p - a).(\tfrac{1}{2}\,p - b)(\tfrac{1}{2}\,p - c)$$

$$8)\ y = \frac{2}{b}\sqrt{\tfrac{1}{2}\,p\,(\tfrac{1}{2}\,p - a)(\tfrac{1}{2}\,p - b)(\tfrac{1}{2}\,p - c)}$$

und daraus, weil $\triangle\,ABC = \frac{b\,.\,y}{2}$

$$9)\ \triangle\,ABC = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,p\,.(\tfrac{1}{2}\,p - a)(\tfrac{1}{2}\,p - b)(\tfrac{1}{2}\,p - c)}.$$

Anmerkung 1. Bezeichnet man den Inhalt unseres Dreiecks der Kürze halber mit $\triangle$, so erhält man aus Nro. 7

$\frac{b^2\,y^2}{4} = \left(\frac{b\,y}{2}\right)^2 = \triangle^2 = \tfrac{1}{2}\,p\,(\tfrac{1}{2}\,p - a)(\tfrac{1}{2}\,p - b)(\tfrac{1}{2}\,p - c)$; also $\tfrac{1}{2}\,p\,(\tfrac{1}{2}\,p - a) : \triangle = \triangle : (\tfrac{1}{2}\,p - b)(\tfrac{1}{2}\,p - c)$ d. h.

Zus. 1. Jedes Dreieck ist die mittlere Proportionalfläche zwischen den beiden Rechtecken, von denen das eine aus dem halben Umfange und aus seinem Ueberschusse über eine der Seiten, das andere aus den Ueberschüssen eben dieses halben Umfanges über die beiden andern Seiten gebildet wird.

Anmerkung 2. Substituirt man in unserm Hauptsatze für p seinen Werth, $a + b + c$, und führt die angedeuteten Multiplicationen aus, so erhält man:

$$\triangle = \frac{\sqrt{2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{4}$$

vergleicht man damit 396, Z. 2, so erhält man:

$$\sin A = \frac{2\,\triangle}{b\,.\,c}$$

wie wir schon früher 399, Z. 1 gefunden hatten. Man sieht auch hier wiederum, wie man oft auf ganz verschiedenen Wegen zu Resultaten gelangen kann, die vollkommen mit einander übereinstimmen, wie verschieden sie auch beim ersten Anblick zu sein scheinen. Mit den in diesem und dem vorigen Lehrsatze gefundenen Ausdrücken für den Inhalt eines Dreiecks vergleiche man 272, Z. 2, und 273, Z. 1 nebst Anm.

Anmerkung 3. Der für unsern Hauptsatz gegebene Beweis ist, bei aller Genauigkeit und Strenge, doch nicht im Geiste der Methode der Alten; wohl aber gilt dieß von dem Beweise, den Castillon in den Mem. de l'Acad. de Berlin 1766 mitgetheilt hat, und den wir wegen dieses seines Vorzuges hier beifügen:

Vorbereitung. Es sei BCA (Fig. 183) das in Rede stehende Dreieck;

1) man verlängere CA über beide Endpuncte hinaus
2) beschreibe aus C mit CB als Radius den Kreis GBH, und
3) eben so aus A mit AB den Kreis DBE
4) ziehe BG, BD, BH, BE, und
5) BF $\perp$ AC.

Alsdann ist

6) $GE = GC + CA + AE = CB + CA + AB = a + b + c = p$

7) $CE = CA + AE = CA + AB = b + c$

8) $CD = AB - AC = c - b$

9) $GE - DH = GD + HE = GC - CD + HE = CH + HE - CD = CE - CD = CA + AE - CD = CA + AD - CD = CA + CA = 2\,CA = 2b$

10) $DH = GE - 2\,CA = a + b + c - 2\,b = p - 2\,b$

11) $HE = GE - GH = GE - 2\,GC = GE - 2\,BC = p - 2\,a$

12) $DG = GE - DE = GE - 2\,AB = p - 2\,c$

Beweis. $\overline{BF}^2 = DF\,.\,FE = GF\,.\,FH$ (252), oder

13) $DF : BF = BF : FE$, und

14) $EF : GF = FH : DF$,

15) $EF + GF : FH + DF = GF : DF$, d. i.

16) $EG : DH = GF : DF$

17) $EF - FH : GF - FD = EF : GF$ d. i.

18) $EH : GD = EF : GF$

$EG - DH : GF - DF = DH : DF$ d. i.

19) $2\,CA : DH = GD : DF$ also

$2\,CA\,.\,DF = GD\,.\,DH$

$EG - DH : EG = GF - DF : GF$

20) $2\,CA : EG = GD : GF = EH : EF$ (18)

$2\,CA\,.\,EF = EG\,.\,EH$

21) $CA\,.\,EF : CA\,.\,BF = EF : BF = BF : FD$ (13)
$= CA\,.\,BF : CA\,.\,FD$

22) $\frac{EG\,.\,EH}{2} : CA\,.\,BF = CA\,.\,BF : \frac{GD\,.\,DH}{2}$

$\frac{EG\,.\,EH}{4} : \frac{CA\,.\,BF}{2} = \frac{CA\,.\,BF}{2} : \frac{GD\,.\,DH}{4}$ d. i.

23) $\frac{EG\,.\,(EG - 2\,BC)}{4} : \triangle ABC = \triangle ABC : \frac{(EG - 2\,CA)\,(EG - 2\,AB)}{4}$

woraus unser Satz sich von selbst ergiebt.

Zus. 2. Beschreibt man sowohl um als in ein Dreieck (Fig. 182) einen Kreis, so läßt sich der Halbmesser (R) des erstern und der (r) des letztern leicht bestimmen.

Beweis. Nach 273, Z. 1, ist

$$\triangle ABC = \frac{AB\,.\,AC\,.\,BC}{4\,R}, \text{ also}$$

$$R = \frac{a\,.\,b\,.\,c}{4\,\triangle}$$
$$= \frac{a\,b\,c}{\sqrt{p\,.\,(p - 2\,a)\,(p - 2\,b)\,(p - 2\,c)}}.$$

Ferner nach 272, Z. 3 ist

$$\triangle = (a + b + c)\,.\,\frac{r}{2}, \text{ also}$$

$$r = \frac{2\,\triangle}{a + b + c}$$
$$= \frac{2\sqrt{\tfrac{1}{2}\,p\,.\,(\tfrac{1}{2}\,p - a)\,(\tfrac{1}{2}\,p - b)\,(\tfrac{1}{2}\,p - c)}}{\sqrt{p^2}}$$

$$= 2 \sqrt{\left[\frac{p (p - 2 a) (p - 2 b) (p - 2 c)}{16 p^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(p - 2 a) (p - 2 b) (p - 2 c)}{p}\right]}$$

401. Lehrsatz. In jedem Dreiecke verhält sich der Sinus eines seiner Winkel zur Summe der Sinusse von allen drei Winkeln wie die Gegenseite jenes erstern Winkels zum Umfange des Dreiecks.

Bew. $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

$\sin A : \sin A + \sin B = a : a + b$

$\sin C : \sin A + \sin B = c : a + b$

$\sin C : \sin A + \sin B + \sin C = c : a + b + c.$

Dritter Abschnitt.

Von der Auflösung der Dreiecke in besondern Fällen, wenn nämlich nur zwei Seiten oder Winkel und außerdem Summe oder Unterschied zweier Winkel oder Seiten gegeben ist.

---

402. Wenn zwei Seiten und der Unterschied ihrer Gegenwinkel gegeben sind, das Dreieck aufzulösen.

Cagnoli §. 237.

Auflösung.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ eingeschloss. W.} = \frac{\text{cotg } \tfrac{1}{2} \text{ gegeb. Untersch.. Untersch. gegeb. Seiten}}{\text{Summe der gegebenen Seiten}}$$

woraus die übrigen Stücke leicht zu bestimmen sind.

Beweis. Aus 394, Z. 3.

403. Ein Dreieck aufzulösen, dessen Winkel nebst Summe oder Unterschied zweier Seiten gegeben sind.

Cagnoli §. 238.

Auflösung.

$$1. \text{ Untersch. d. gegeb. Seiten} = \frac{\text{Summe d. geg. S.. tang } \tfrac{1}{2} \text{ eingeschl. W.}}{\text{cotg } \tfrac{1}{2} \text{ Untersch. der beiden andern Wink.}}$$

$$2. \text{ Summe der gegeb. Seiten} = \frac{\text{Untersch. geg. S.. cotg } \tfrac{1}{2} \text{ eingeschl. W.}}{\text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ Untersch. der andern Winkel}}$$

Beweis. Aus 394, Z. 3.

Zus. 1. Ist das Dreieck (ABC) rechtwinkelig z. B. in A, und man kennt einen der spitzen Winkel — also alle Winkel — und außerdem Summe oder Unterschied von Hypotenuse und einer Cathete, so ist: $A - C = 90^\circ - C = B$, also

$$\text{tg } \tfrac{1}{2} (A - C) = \text{tg } \tfrac{1}{2} B$$

$$\text{cotg } \tfrac{1}{2} (A - C) = \text{cotg } \tfrac{1}{2} B,$$

man erhält also dann:

$$a - c = \frac{(a + c)\ tg\ \frac{1}{2} B}{cotg\ \frac{1}{2} B} = (a + c)\ tang^2\ \frac{1}{2} B$$

$$a + c = \frac{(a - c)\ cotg\ \frac{1}{2} B}{tang\ \frac{1}{2} B} = (a - c)\ cotg^2\ \frac{1}{2} B.$$

Beziehungen, die wir schon früher (390, Z. 4) auf anderm Wege gefunden hatten. Durch ihre Hülfe kann man, wenn Summe oder Unschied von Hypotenuse und Cathete gegeben, diese Seiten selbst finden; und daraus die andere Cathete b.

Anmerkung. Diese zweite Cathete könnte man auch unmittelbar so bestimmen: Für $A = 90^0$; verwandelt sich unser obiger Satz 390, Z. 4 in folgenden:

$$tg^2\ \frac{1}{2} B = \frac{a - c}{a + c},\ \text{also}$$

$$b^2\ .\ tg^2\ \frac{1}{2} B = \frac{a - c}{a + c}\ .\ b^2$$

$$= \frac{a - c}{a + c}\ .\ (a^2 - c^2) = \frac{a - c}{a + c}\ .\ (a + c)\ (a - c)$$

$$= (a - c)^2$$

also $\qquad b = \dfrac{a - c}{tg\ \frac{1}{2} B}$

und auf ähnlichem Wege findet man, daß

$$b = \frac{a + c}{cotg\ \frac{1}{2} B} = (a + c)\ tg\ \frac{1}{2} B.$$

Cagnoli §. 218.

Zus. 2. Ist das Dreieck nicht in A sondern in B rechtwinkelig, und man kennt, außer den Winkeln, Summe oder Unterschied beider Catheten, so ist $\frac{1}{2} B = 45^0$, also tang $\frac{1}{2} B$ = radius = 1, ferner $A = 90^0 - C$, also $A - C = 90^0 - 2 C$, und darum $\frac{1}{2} (A - C) = 45^0 - C$, woraus man die Auflösungen erhält:

$$a - c = \frac{a + c}{cotg\ (45^0 - C)}$$

$$a + c = \frac{a - c}{tg\ (45^0 - C)}.$$

Cagnoli §. 219.

404. Ein Dreieck aufzulösen, von welchem ein Winkel, seine Gegenseite, und die Summe oder der Unterschied der beiden andern gegeben ist.

Auflösung.

$$\sin \tfrac{1}{2}\ \text{Untersch. gesucht. Wink.} = \frac{\text{Untersch. Seit.} \ldots \cos \frac{1}{2}\ \text{gegeb. Wink.}}{\text{gegeb. Seite}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\ \text{Untersch. gesucht. Wink.} = \frac{\text{Summe d. Seit.} \ldots \sin \frac{1}{2}\ \text{gegeb. Wink.}}{\text{gegeb. Seite.}}$$

Cagnoli §. 219.

Bew. $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$$a - b : c = \sin A - \sin B : \sin C$$

$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} (A - B) \cos \tfrac{1}{2} (A + B) : 2 \sin \tfrac{1}{2} C\ .\ \cos \tfrac{1}{2} C$$

(378, F. 34 und 95)

$$= \sin \tfrac{1}{2} (A - B) \sin \tfrac{1}{2} C : \sin \tfrac{1}{2} C\ .\ \cos \tfrac{1}{2} C$$

$$= \sin \tfrac{1}{2} (A - B) : \cos \tfrac{1}{2} C,$$

also $\sin \frac{1}{2}(A-B) = \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2} C}{c}$.

Und auf ähnliche Weise erhält man:

$$a+b:c = \sin A + \sin B : \sin C$$
$$= 2 \sin \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}(A-B) : 2 \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$= \cos \tfrac{1}{2}(A-B) : \sin \tfrac{1}{2} C$$

also $\cos \frac{1}{2}(A-B) = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{c}$.

Zus. Wäre der gegebene Winkel $C = 90^0$, so hätte man $\sin \frac{1}{2} C = \cos \frac{1}{2} C = \sin 45^0 = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (für $r=1$); ferner $A = 90^0 - B$, also $A - B = 90^0 - 2B$, und $\frac{1}{2}(A-B) = 45^0 - B$, also $\cos. \frac{1}{2}(A-B) = \sin.$ compl. $(45^0 - B)$

$$= \sin (90^0 - 45^0 + B)$$
$$= \sin (45^0 + B)$$

Sind also in einem rechtwinkeligen Dreiecke Hypotenuse (c) und Summe $(a+b)$ oder Unterschied $(a-b)$ der Catheten gegeben, so hat man:

$$c : a - b = 1 : \sin (45^0 - B) . \sqrt{2}$$
$$c : a + b = 1 : \sin (45^0 + B) . \sqrt{2}.$$

405. Ein Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind: ein Winkel (C), eine der anliegenden Seiten (b), und die Summe der beiden andern $(a+c)$.

Auflösung. cotg $\frac{1}{2}$ des an die gegeb. S. angränz. Winkels $=$ $\frac{\text{gegeb. Summe} + \text{gegeb. Seite}}{\text{gegeb. Summe} - \text{gegeb. Seite}}$. tg $\frac{1}{2}$ gegeb. Winkel.

Cagnoli §. 240.

Vorbereitung. Es sei (Fig. 180) $BE = AB = c$, also $CE = CB + AB = a + c$; daher auch W. $CAE - CEA = CAE - EAB = CAB = A$, gegeben, daher nach der ersten Auflösung des dritten Falles in 398,

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(CAE - AEC) = \frac{(a+c) - b}{(a+c) + b} \text{ cotg } \tfrac{1}{2} C$$

oder $$\text{cotg } \tfrac{1}{2} A = \frac{(a+c)+b}{(a+c)-b} . \text{tg } \tfrac{1}{2} C$$

406. Ein Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind: ein Winkel (C), eine der angränzenden Seiten (b) und der Unterschied $(a-c)$ der beiden andern.

Auflösung: tang $\frac{1}{2}$ Winkel, der an die gegebene Seite gränzt $=$ $\frac{\text{gegeb. Seite} + \text{gegeb. Unterschied}}{\text{gegeb. Seite} - \text{gegeb. Unterschied}}$. tang $\frac{1}{2}$ gegebener Winkel.

Cagnoli §. 241.

Vorber. Es sei (Fig. 180) $BD = BA$, also 1) $CD = CB - BA = a - c$, und 2) W. $DAB = ADB$, 3) W. $CDA - CAD = 180^0 - ADB - CAD = 180^0 - (DAB + CAD) = 180^0 - CAB$, also $\frac{1}{2}(CDA - CAD) = 90^0 - \frac{1}{2} CAB =$ compl. $\frac{1}{2}$ CAB.

Beweis. Für Dreieck CAD ist nun nach der ersten Auflösung des dritten Falles in 398

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{CDA} - \text{CAD}) = \text{cotg}\ \tfrac{1}{2}\ \text{CAB}$$

$$= \text{cotg}\ \tfrac{1}{2}\ \text{C} \cdot \frac{\text{CA} - \text{CD}}{\text{CA} + \text{CD}}$$

$$= \text{cotg}\ \tfrac{1}{2}\ \text{C} \cdot \frac{\text{CA} - (\text{CB} - \text{AB})}{\text{CA} + (\text{CB} - \text{AB})}$$

folglich $\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ \text{A} = \frac{b + (a - c)}{b - (a - c)} \cdot \text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ \text{C}.$

407. **Wenn die Winkel eines Dreiecks und eine der Seiten gegeben sind, die Stücke der letztern zu bestimmen, welche durch das zu ihr gehörige Höhenperpendikel gebildet werden.**

Cagnoli §. 243.

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Untersch.}\\ \text{oder}\\ \text{Summe}\end{array}\right\}\ \text{der Stücke} = \frac{\text{gegeb. Seite . sin . Untersch. der anlieg. Wink.}}{\text{sin . Gegenwinkel.}}$$

Vorbereitung. Theile (Fig. 181[a]) CA in zwei gleiche Theile in E; ziehe die Senkrechten EF und BD, und endlich CF, so ist CF = AF, und daher W. BCF = BCA — BAC = C — A.

Beweis. $\sin \text{FCB} : \sin \text{CBF} = \text{BF} : \text{FC}$

$$\sin (\text{C} - \text{A}) : \sin \text{B} = \text{BF} : \text{FA} = \text{DE} : \text{EA}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ b \mp \text{DC} : \tfrac{1}{2}\ b$$

$$= b \mp 2\ \text{DC} : b$$

$$= \text{AD} \mp \text{DC} : b$$

also $\text{AD} \mp \text{DC} = \frac{b \cdot \sin (\text{C} - \text{A})}{\sin \text{B}.}$

Anmerkung 1. Das obere Vorzeichen gilt, wenn beide Winkel an der gegebenen Seite spitz, das untere, wenn einer derselben stumpf.

Zus. 1. Ist der Gegenwinkel der gegebenen Seite ein Rechter, so wird der Unterschied der Hypotenusenstücke gleich dem Product aus der Hypotenuse und dem Sinus des Unterschiedes ihrer anliegenden Winkel; also

$$\text{AD} - \text{CD} = b \cdot \sin (\text{C} - \text{A}).$$

Aber, da C + A = 90°, so ist C — A = 90° — 2 A = compl. 2 A, also $\text{DA} - \text{DC} = b \cdot \cos 2\ \text{A}.$

Nun ist $\text{DA} = \tfrac{1}{2}(\text{AC} + \text{DA} - \text{DC}) = \tfrac{1}{2}(b + b \cos 2\ \text{A})$

$$= \tfrac{1}{2}\ b\ (1 + \cos 2\ \text{A})$$

und $\text{DC} = \tfrac{1}{2}(\text{AC} - \text{DA} + \text{DC}) = \tfrac{1}{2}\ b\ (1 - \cos 2\ \text{A})$

also $\text{DA} : \text{DC} = \tfrac{1}{2}\ b\ (1 + \cos 2\ \text{A}) : \tfrac{1}{2}\ b\ (1 - \cos 2\ \text{A})$

$= \cos^2 \text{A} : \sin^2 \text{A}$ (378, Fig. 96 und 113)

$$= 1 : \text{tang}^2\ \text{A}.$$

Cagnoli §. 221.

Anmerkung 2. Der Fall, wo man die Abschnitte einer Dreiecksseite (die auf ihr durch das zugehörige Höhenperpendikel gebildet werden) bestimmen soll aus den Dr[...]

seiten, als den gegebenen Stücken, fällt zusammen mit der ersten Auflösung von Fall IV in 398.

408. Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in einem Dreieck gegeben sind, die Winkel zu bestimmen, welche das aus der Spitze des gegebenen Winkels auslaufende Höhenperpendikel mit den beiden gegebenen Seiten bildet.

Auflösung.

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{oder}\\ \text{Untersch.}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{der ge-}\\ \text{suchten}\\ \text{Winkel}\end{matrix} = \frac{\text{Untersch. gegeb. Seit.}}{\text{Summe gegeb. Seit.}} \cdot \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\,\text{gegeb. Wink.}$$

Cagnoli §. 245.

Beweis. Es ist (Fig. 66)

$$AB : BC = \sin BCA : \sin BAC$$
$$= \sin BCD : \sin BAD$$
$$= \cos CBD : \cos ABD.$$

also $AB + BC : AB - BC = \cos CBD + \cos ABD : \cos CBD - \cos ABD$

oder $$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\cos CBD + \cos ABD}{\cos CBD - \cos ABD}$$
$$= \frac{\text{cotg}\,\frac{1}{2}(ABD + CBD)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(ABD - CBD)} \quad (378,\ \text{Fig. } 82)$$

also, wenn $C < 90^0$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(ABD - CBD) = \frac{c-a}{c+a} \cdot \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}B$$

und wenn $C > 90^0$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\text{cotg}\,\frac{1}{2}(ABD - CBD)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(ABD + CBD)}$$

und daraus

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(ABD + CBD) = \frac{c-a}{c+a} \cdot \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}B.$$

Zus. Ist $B = 90^0$, so wird $\text{cotg}\,\frac{1}{2}B = 1$, also

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(ABD - CBD) = \frac{c-a}{c+a}.$$

409. Die Stücke zu finden, in welche die Seite (AB Fig. 67) eines Dreiecks (ACB) durch die ihren Gegenwinkel (C) halbirende Gerade (CH) getheilt wird, wenn man entweder die Winkel des Dreiecks und die getheilte Seite, oder alle Seiten kennt.

Auflösung.

1. $\text{Untersch. d. Stücke} = \dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{Untersch. anlieg. Wink.}}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{Summe dieser beiden W.}} \cdot \text{getheilte Seite}$

2. $\text{Untersch. d. Stücke} = \dfrac{\text{Untersch. der beid. and. Seiten}}{\text{Summe dieser beiden Seiten}} \cdot \text{getheilte Seite.}$

Cagnoli §. 244.

Bew. $BH : CH = \sin BCH : \sin B$

$CH : AH = \sin A : \sin ACH$

$BH : AH = \sin A : \sin B$

$BH + AH : BH - AH = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B$

$= tg \tfrac{1}{2}(A+B) : tg \tfrac{1}{2}(A-B)$ (378, F. 81)

$= a + b : a - b$ (394)

woraus unsere beiden Auflösungen sich sofort ergeben.

Zus. 1. Ist das Dreieck in C rechtwinkelig, so ist, weil $A + B = 90^\circ$, also $\tfrac{1}{2}(A+B) = 45^\circ$, $\tfrac{1}{2}(A-B) = 45^\circ - B$; ferner $BH = \tfrac{1}{2} AB + \tfrac{1}{2}(BH - AH)$

$AH = \tfrac{1}{2} AB - \tfrac{1}{2}(BH - AH)$, also

$$BH : AH = \tfrac{1}{2} AB \left(1 + \frac{BH - AH}{AB}\right) : \tfrac{1}{2} AB \left(1 - \frac{BH - AH}{AB}\right)$$

$$= 1 + \frac{tg \tfrac{1}{2}(A-B)}{tg \tfrac{1}{2}(A+B)} : 1 - \frac{tg \tfrac{1}{2}(A-B)}{tg \tfrac{1}{2}(A+B)}$$

$$= tg \tfrac{1}{2}(A+B) + tg \tfrac{1}{2}(A-B) : tg \tfrac{1}{2}(A+B) - tg \tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$= tg\, 45^\circ + tg\,(45^\circ - B) : tg\, 45^\circ - tg\,(45^\circ - B)$$

$$= 1 + \frac{1 - tg B}{1 + tg B} : 1 - \frac{1 - tg B}{1 + tg B} \quad (378,\ F.\ 64)$$

$$= 1 + tg B + 1 - tg B : 1 + tg B - 1 + tg B$$

$$= 2 : 2\, tg B = 1 : tg B.$$

Cagnoli §. 222.

Zus. 2. Ist das Dreieck gleichschenkelig, namentlich $AC = BC$ so ist $BH - AH = 0$, oder $AH = BH$ was man schon aus frühern Sätzen (51) wußte.

410. Wenn von einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, die Stücke zu bestimmen, in welche dieser Winkel durch die von seinem Scheitel nach dem Halbirungspuncte der Gegenseite gehende gerade Linie getheilt wird.

Auflösung.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ Untersch. der Winkelstücke} = \frac{\text{Untersch. d. Seiten}}{\text{Summe d. Seiten}} \cdot tg \tfrac{1}{2} \text{ geg. W.}$$

Cagnoli §. 246.

Bew. $BC : BH = \sin BHC : \sin BCH$ (Fig. 67)

$AH : AC = \sin ACH : \sin AHC$

$a : b = \sin ACH : \sin BCH$

$a + b : a - b = \sin ACH + \sin BCH : \sin ACH - \sin BCH$

$= tg \tfrac{1}{2} C : tg \tfrac{1}{2}(ACH - BCH)$ (378, F. 81)

woraus die Richtigkeit unserer Auflösung hervorleuchtet. —

Vierter Abschnitt.

Bemerkungen über einzelne Fälle der practischen Anwendung der Trigonometrie.

411. Zu practischen Messungen werden gute winkelmessende Instrumente erfordert, und genaue Maßstäbe, um mittelst derselben Längen auf einem gegebenen Terrain bestimmen zu können — eine Arbeit, die, soll ihr nicht erforderliche Genauigkeit abgehen, viel Umsicht und Aufmerksamkeit nöthig macht. Doch das Weitere hierüber gehört nicht hieher; es sollen vielmehr jetzt nur noch einige allgemeine Anmerkungen folgen, über die verschiedenen Fälle, die in der Praxis vorkommen können.

Man mißt Höhen, oder Entfernungen, oder ein ganzes Terrain.

1. Soll man die Höhe BC (Fig. 97^a) bestimmen, und man kennt oder hat gemessen den horizontalen (also W. BCA = 90°) Abstand CA, so ist nun nichts weiter mehr nöthig als den Winkel BAC zu messen; denn man hat:

$$r : \text{tang. } BAC = CA : BC,$$

welche letztere also dadurch gefunden ist.

2. Ist die Entfernung CA unbekannt und vielleicht gar für eine Messung unzugänglich, so mißt man zuerst eine Standlinie AE die mit BC in derselben Ebne liegt, darauf die Winkel BEC und BAC, kennt also auch des letztern Supplement BAE, und darum auch den dritten Winkel ABE des Dreiecks ABE. Da nun (393)
$\sin ABE : \sin AEB = AE : AB$, so findet man hieraus AB, und endlich mittelst der Proportion

$$r : \sin BAC = AB : BC$$

die gesuchte Höhe BC.

3. Die Auflösung schiefwinkeliger Dreiecke ist bei practischen Messungen ganz unentbehrlich. Der erste hieher gehörige Fall ist der, wo man bestimmen soll, in welcher Entfernung CA oder CB (Fig. 184) man sich von einem unzugänglichen Gegenstande C befindet, wenn man von zwei Puncten einer zu diesem Behufe ausdrücklich gemessenen Standlinie AB aus, die Größe der Winkel bestimmen kann, welche der in Rede stehende Gegenstand von diesen Puncten aus gesehen mit der Standlinie bildet; also die Winkel CAB und CBA. Denn dadurch ist auch W. ACB bekannt, und aus den Proportionen: $\sin ACB : \sin CAB : \sin CBA = AB : CB : CA$ findet man die gesuchten Entfernungen CB und CA.

4. Ein anderer Fall ist, wenn man die gegenseitige Entfernung CD (Fig. 184) zweier unzugänglicher Gegenstände C und D bestimmen soll, unter der Voraussetzung, daß man die Winkel kenne, welche sie von den Endpuncten A und B einer gemessenen Standlinie AB aus gesehen mit derselben bilden; also die Winkel CAB, DAB und CBA, DBA. Dadurch kennt man in jedem der beiden Dreiecke ACB und

ADB alle Winkel und eine Seite (AB) kann also durch Anwendung von S. 393 sowohl AC und BC als auch AD und BD finden. In jedem der beiden Dreiecke ACD und BCD kennt man daher zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, denn W. CAD = CAB — DAB und W. CBD = DBA — CBA, also jeder gleich dem Unterschiede zweier bekannten Winkel, man kann also das eine oder das andere dieser Dreiecke benutzen, um nach Anleitung von 394, Zus. 1 die gesuchte Länge von CD zu berechnen.

5. Wären außer dem einen Gegenstande C noch mehrere vorhanden z. B. E, D und F (Fig. 184), so würde man durch die Messung aller der Winkel, CAB, EAB, FAB, DAB ꝛc., welche diese Gegenstände, von den beiden Endpuncten der Standlinie aus gesehen, mit dieser bilden, von jedem der Dreiecke ACB, AEB, AFB, ADB alle Winkel kennen lernen, also aus ihnen und der bekannten Seite die Länge der Linien AC, AE, AF, AD, BC, BE, BF, BD (393) berechnen können; dadurch kennte man nun in den Dreiecken ACE, ACF, ACD, AEF, AED, AFD zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, könnte also (394, Z. 1) die dritten Seiten derselben, CE, CF, CD, EF, ED, FD bestimmen, hätte also die Entfernungen der Objecte C, E, F, D nicht nur von den Endpuncten der Standlinie, sondern auch von einander gefunden.

6. Man kennt aber dadurch auch noch die Winkel, unter denen je zwei der in Rede stehenden Gegenstände von jedem der übrigen aus gesehen erscheinen, denn man kann, wie wir gesehen haben, die Dreiecke ACE und ACD auflösen, also auch die Winkel ACE und ACD bestimmen, kennt mithin auch den Unterschied derselben d. i. den Winkel ECD; und auf ähnliche Weise verhält es sich, wie man leicht sieht, mit den übrigen hieher gehörigen Winkeln.

7. Der oben bei der Auflösung schiefwinkeliger Dreiecke unter Nro. 4 aufgeführte Fall ist es, der zur Anwendung kömmt, wenn man aus den bekannten gegenseitigen Entfernungen mehrerer Gegenstände die Winkel bestimmen soll, unter denen je zwei dieser Objecte, von einem der übrigen aus gesehen, erscheinen. Kennte man z. B. (Fig. 191) die gegenseitigen Entfernungen der Gegenstände A, J und C, so käme es darauf an, in dem Dreieck AJC, die Winkel AJC, ACJ, und CAJ aus den Seiten, als den gegebenen Stücken zu finden; was wir eben oben 398, IV gelehrt haben.

8. Hat man einmal eine Standlinie gemessen, so bedarf es dann nur noch des Messens von Winkeln um ein ganzes Land aufzunehmen, und eine Charte von ihm zu entwerfen. Um den Flächenraum eines solchen Landes oder eines Theiles davon in einem bestimmten Maaße auszudrücken, pflegt man sich der bekannten Einheiten: Quadratfuß, Quadratruthe, Quadratmorgen, Quadratmeile zu bedienen. Man stützt sich dabei auf das, was im zweiten Buche (118) gelehrt worden, und bedient sich der Ausdrücke, welche das vierte Buch (203, Z. 6) an die Hand giebt.

Hätte man z. B. zur Vermessung des Stück Landes ABCDE (Fig. 186) die Standlinie AB, und die Winkel ABC, BCD, CAB,

CAD, DAE und AED gemessen, so könnte man die Länge der Diagonalen AC und AD aus den Dreiecken ABC, ACD und ADE, in denen man eine hinreichende Anzahl bestimmender Stücke kennt, bestimmen; und dann die Höhenperpendikel BF, DG, EH berechnen, welche man zur Bestimmung des Inhaltes der drei, die ganze in Rede stehende Fläche ausmachenden, Dreiecke gebraucht. Man würde auf diese Weise als Ausdruck für die zu vermessende Fläche erhalten:

$$\frac{AC \cdot (BF + DG) + AD \cdot HE}{2}$$

Aber freilich alle diese Berechnungen machen die Arbeit umständlich und weitläuftig. Man kann sich dieselbe dadurch etwas abkürzen, daß man durch Anwendung von S. 399 den Gebrauch der Höhenperpendikel, deren Berechnung lästig ist, vermeidet. Nach dem genannten Satze nämlich kann der Flächenraum eines Dreiecks ABC ausgedrückt werden durch

$$\frac{AB \cdot AC \cdot \sin BAC}{2}$$

und man erhält daher als Ausdruck für die ganze zu vermessende Fläche:

$$\frac{AB \cdot AC \cdot \sin BAC + AC \cdot AD \cdot \sin CAD + DA \cdot AE \cdot \sin DAE}{2}$$

9. Bei der Vermessung eines ganzen Landes oder doch eines größern Theiles desselben würde man sicher Gefahr laufen in grobe Fehler zu verfallen, wollte man nicht alle Vorsicht anwenden, um das Aufhäufen der Fehler, die mit allen Beobachtungen unzertrennlich verbunden sind, zu verhindern. Viel kömmt dabei auf die Genauigkeit und Güte der Instrumente, so wie auf die Sorgfalt und Geschicklichkeit derer an, die sie gebrauchen. Bei ausgedehnteren Vermessungen darf man es nie unterlassen, wenigstens bei den wichtigeren Dreiecken, alle drei Winkel zu messen. Entfernt sich die Summe der so gefundenen Werthe dieser Winkel um ein verhältnißmäßig nur Geringes von 180°, so verbessert man die Beobachtungen dadurch, daß man den gefundenen Gesammtfehler auf alle drei Winkel gleichmäßig vertheilt, wenn nicht besondere Gründe vorhanden sind, die den Beobachter bestimmen, bei dem einen Winkel eine stärkere Correction anzubringen, als bei dem andern. Mißt man dagegen nur zwei Winkel eines Dreiecks und bestimmt den dritten aus den beiden erstern durch Rechnung, so muß dieser offenbar um die Summe der beiden Fehler, denen die gemessenen Winkel unterliegen, unrichtig werden, und darf man sich daher diese Abkürzung der Arbeit niemals da erlauben, wo größere Genauigkeit erreicht werden soll.

10. In den Fällen, wo die gemessenen Winkel eine solche gegenseitige Lage haben, daß die Schenkel einiger die Seiten eines Vielecks bilden, innerhalb dessen der gemeinschaftliche Scheitel (Z Fig. 185) der übrigen fällt, kann die Güte der Messungen geprüft werden durch folgenden:

412. **Lehrsatz.** Verbindet man einen beliebigen Punct (Z) innerhalb eines Vielecks (Fig. 185) mit dessen Ecken durch gerade Linien, so daß das Vieleck in Dreiecke zerlegt wird, so

1) ist die Summe aller derjenigen Dreieckswinkel, die ihren gemeinschaftlichen Scheitel in dem genannten Puncte haben, gleich 360°;
2) sind die übrigen Dreieckswinkel immer so beschaffen, daß das Product aus den Sinussen des ersten, dritten, fünften ꝛc. gleich dem Producte aus den Sinussen des zweiten, vierten, sechsten ꝛc. ist; also (Fig. 185) sin BAZ . sin CBZ . sin DCZ . sin EDZ . sin AEZ = sin ABZ . sin BCZ . sin CDZ . sin DEZ . sin EAZ.

Beweis. Erster Theil leicht. —

Zweiter Theil durch Anwendung des §. 393 auf die Dreiecke ABZ, BCZ, CDZ, DEZ, und EAZ.

Anmerkung 1. Dieses Mittels zur Prüfung der gemessenen Winkel hat sich unter andern der General Krayenhoff bei der von ihm geleiteten Vermessung Holland's bedient, wie man aus seinem Werke: „Précis historique des operations geodesiques etc.“ 1814. 4. ersehen kann.

Anmerkung 2. Alle diese Gegenstände konnten wir hier nur andeuten; das Ausführlichere darüber gehört in die Schriften über practische Geometrie, unter denen folgende genannt zu werden verdienen:

J. T. Mayer's gründlicher und ausführlicher Unterricht zur practischen Geometrie; 4te Aufl. Göttingen 1816 5 Thle. in 8.

Th. Bugge's Beschreibung der Ausmessungsmethode, welche bei den Dänischen geogr. Charten angewendet worden, aus dem Dänischen übersetzt von Aster. Dresden, 1787 in 4.

J. G. F. Bohnenberger's Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung; Göttingen 1795 in 8.

M. Delambre Base du Systéme metrique etc. Paris 1806 — 10. 4 Vol. in 4.

J. F. Benzenberg vollständiges Handbuch der angewandten Geometrie ꝛc. Düsseldorf 1813 in 8.

A. S. Montanus Systematisches Handbuch der gesammten Land- und Erd-Messung. Berlin 1819 2 Thle in 8.

Puissant Traité de Géodésie 2me ed. Paris 1819. 2 Vol. in 4.

Puissant Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement. 2me edit. Paris 1820 in 4.

11. Hat man bei einer Vermessung einmal die wichtigsten Puncte mit hinreichender Genauigkeit bestimmt, so wird es dann leichter auch die Lage anderer mit der erforderlichen Schärfe zu bestimmen. Es sind hierbei besonders zwei Fälle wichtig und beachtenswerth, die wir daher auch näher erörtern wollen.

Erster Fall.

413. **Aufgabe.** Wenn man von drei Puncten A, J, C (Fig. 187, 188, 189, 190, 191, 192) die Entfernungen je zweier von einander kennt, und ein vierter Punct B so gegeben ist, daß man von ihm aus, die Winkel messen kann, unter denen je zwei jener drei genannten Puncte, von B aus gesehen, erscheinen, den Abstand dieses vierten Punctes von jedem der drei erstern, also die Längen AB, BJ, BC zu bestimmen.

Snellius, Eratosthenes Batavus cap. X.

Erläuterung. Die drei erstern Puncte bestimmen das Dreieck AJC, dessen Seiten also gegeben sind.

Die Aufgabe wurde zuerst von Snellius aufgestellt, gelöst und angewandt, und hätte daher billig nach ihm sollen genannt werden *). Später hat man häufigen Gebrauch von ihr gemacht, und dadurch ihre Nützlichkeit und Wichtigkeit immer mehr hervorgehoben. Viele Mathematiker haben Auflösungen von ihr gegeben, unter andern, schon im J. 1671, Collins Philos. Transact. Vol. VI, Nro. 69; später, im J. 1755, Boscowich Voyage Astronomique, Liv. III, §. 17; dann im J. 1765. Lambert in seinen Beiträgen zum Gebrauch der Math. I, §§. 107—117; und in den neuesten Zeiten: Delambre in seinen beiden Werken: Methodes analytiques etc. und Base du systeme metrique; ferner L'Huilier in seinen Elemens d'Analyse geom. etc. §. 138. Wir wollen von unserer Aufgabe, bei der zwei Fälle zu unterscheiden sind, jenachdem der vierte Punct innerhalb oder außerhalb des von den drei erstern bestimmten Dreiecks fällt, drei Auflösungen mittheilen, eine graphische, die schon bei Snellius sich findet, eine trigonometrische und eine algebraische. —

Graphische Auflösung.

1. Beschreibe über AJ (Fig. 190 und 191) als Sehne einen Kreisabschnitt JBA in welchem jeder Winkel so groß ist als derjenige, unter welchem A und J, von B aus gesehen, erscheinen (Aufgg. V, 5).

2. Eben so über CJ als Sehne den Kreisabschnitt CBJ, in welchem jeder Winkel die Größe dessen hat, unter welchem C und J von B aus gesehen erscheinen.

Der Punct (B), von dem aus die Winkelmessungen gemacht wurden, muß sowohl auf dem einen als auf dem andern unserer beiden Kreisbogen liegen, ist also der eine ihrer Durchschnittspuncte, und demnach bestimmt.

Verzeichnet man also das Dreieck AJC aus seinen drei gegebenen Seiten, indem man die Längen derselben auf irgend einen verjüngten Maaßstab reducirt, und bestimmt dann den Punct nach der so eben angegebenen Construction, so kann man dann mit eben diesem Maaßstabe

*) Es ist dieß aber nicht geschehen. Man nennt sie vielmehr gewöhnlich die Pothenot'sche Aufgabe, nach dem Französischen Mathematiker Pothenot, der sich gegen das Ende des 17ten Jahrhunderts, also weit später als Snellius (dessen Eratosthenes Batavus erschien schon 1614) mit ihr beschäftigte. P.s hieher gehörige Abhandlung findet sich in den Mem. de l' Acad. de Paris A. 1692.

Den von unserm Verfasser gegebenen literarischen Notizen können noch folgende beigefügt werden: Ueber die Geschichte des Problems verdient nachgelesen zu werden, was Kästner in den geometrischen Sammlungen I, S. 393 ff., und Pfleiderer in seiner ebenen Trigonometrie (Tübingen 1802 in 8) S. 273 f. beibringen. Eine Auflösung unserer Aufgabe von Burkhardt findet sich in der Monatlichen Correspondenz IV, S. 359 f. Sie ist im wesentlichen die Lambert'sche, aber mit einer nicht unwesentlichen Vereinfachung.

Eine bequeme practische Auflösung hat Bohnenberger in der von ihm und von v. Lindenau heraus gegebenen Zeitschrift für Astronomie bekannt gemacht, im 6ten Bd., S. 121.

Eine besondere Schrift über die Aufgabe hat herausgegeben: J. J. J. Hoffmann; das Pothenotische Problem und seine Auflösung. Mainz 1826.

Unter der sehr großen Anzahl von Auflösungen, die es für unsere Aufgabe giebt, verdient, besonders in Beziehung auf höhere geodätische Operationen, vor allen ausgezeichnet zu werden, diejenige, welche Gauß im ersten Bande der von Schumacher herausgegebenen astronomischen Nachrichten S. 81 bis 86 mitgetheilt hat.

Anmerk. des Uebers.

auch die Entfernungen AB, BJ, BC messen, und hat so das Gesuchte gefunden mit einer freilich nicht großen, aber doch schon ziemlichen und in vielen Fällen hinreichenden Genauigkeit.

Trigonometrische Auflösung.

1. Da in dem Dreieck AJC (Fig. 187) die drei Seiten bekannt sind, so berechnet man seine drei Winkel JAC, AJC und JCA nach 398, IV.

2. Man beschreibe um das Dreieck ABC den Kreis BADC, ziehe BJ, welche den Umkreis zum zweitenmal in D schneidet, und DA, DC. Alsdann ist

a) W. DAC = DBC } also beide bekannt.
b) W. DCA = DBA }
c) Der Winkel JAD ist gleich der Summe oder dem Unterschiede der Winkel DAC und JAC; eben so ist
d) der Winkel JCD gleich der algebraischen Summe von DCA und JCA, und demnach sowohl der eine als der andere dieser beiden Winkel bekannt.

3. Im Dreiecke ADC kennt man zwei Winkel DAC, DCA, und die dazwischenliegende Seite AC, kann also 398, I, die Größe von AD und DC durch Rechnung finden, und kennt mithin

4. nun sowohl in dem Dr. JAD als in JDC zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, kann also Winkel ADJ und Winkel CDJ nach 398, III, durch Rechnung finden; und kennt daher auch W. AJB und BJC (38); dadurch endlich

5. kennt man nun in den Dreiecken AJB und BJC eine Seite und zwei Winkel, nämlich W. AJB; ABJ und AJ in dem einen, so wie W. BJC, CBJ und CJ in dem andern, kann also nach 398, I, AB, BJ, BC durch Rechnung finden, und hat so die Aufgabe gelöst.

Anmerkung. Die Auflösung ist freilich umständlich, da sie verlangt, daß man außer dem Dreieck AJC noch fünf andere auflöse. Snellius hat auch eine trigonometrische Auflösung aus seiner graphischen hergeleitet.

Erste trigonometrisch-algebraische Auflösung.

Der erste Punct, wenn man von der rechten Hand zu zählen anfängt, sei C, der zweite J, und der dritte oder der erste linker Hand A.

I. Befindet sich nun der Beobachter außerhalb des Dreiecks AJC (Fig. 189), so ist:

$$\text{tg. ACB} = \frac{-\text{AJ . sin ABC . sin (JBC} \mp \text{JAC)}}{\text{AJ . sin ABC . cos (JBC} \mp \text{JAC)} - \text{AC . sin ABJ}}$$

II. Ist dagegen der Beobachter innerhalb des Dreiecks AJC (Fig. 192), so ist:

$$\text{tg. ACB} = \frac{-\text{AJ . sin ABC . sin (JBC} \mp \text{JAC}}{\text{AJ . sin ABC . cos (JBC} \mp \text{JAC)} + \text{AC . sin ABJ.}}$$

Bestimmung. Ist der Zähler unseres den Werth von tang ACB darstellenden Bruches positiv, der Nenner aber negativ, also tang ACB selbst negativ, so ist ACB > 90°; daher muß man nicht den aus den

also $\sin \frac{1}{2}(A-B) = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{c}$.

Und auf ähnliche Weise erhält man:

$$a+b : c = \sin A + \sin B : \sin C$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B) : 2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}(A-B) \quad : \sin\tfrac{1}{2}C$$

also $\cos\frac{1}{2}(A-B) = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{c}$.

Zus. Wäre der gegebene Winkel $C = 90^\circ$, so hätte man $\sin\frac{1}{2}C = \cos\frac{1}{2}C = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (für $r=1$); ferner $A = 90^\circ - B$, also $A - B = 90^\circ - 2B$, und $\frac{1}{2}(A-B) = 45^\circ - B$, also $\cos.\ \frac{1}{2}(A-B) = \sin.\ \text{compl.}\ (45^\circ - B)$

$$= \sin(90^\circ - 45^\circ + B)$$
$$= \sin(45^\circ + B)$$

Sind also in einem rechtwinkeligen Dreiecke Hypotenuse (c) und Summe (a + b) oder Unterschied (a — b) der Catheten gegeben, so hat man:

$$c : a - b = 1 : \sin(45^\circ - B) \,.\, \sqrt{2}$$
$$c : a + b = 1 : \sin(45^\circ + B) \,.\, \sqrt{2}.$$

405. Ein Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind: ein Winkel (C), eine der anliegenden Seiten (b), und die Summe der beiden andern (a + c).

Auflösung. cotg ½ des an die gegeb. S. angränz. Winkels = $\frac{\text{gegeb. Summe} + \text{gegeb. Seite}}{\text{gegeb. Summe} - \text{gegeb. Seite}}$. tg ½ gegeb. Winkel.

Cagnoli §. 240.

Vorbereitung. Es sei (Fig. 180) BE = AB = c, also CE = CB + AB = a + c; daher auch W. CAE — CEA = CAE — EAB = CAB = A, gegeben, daher nach der ersten Auflösung des dritten Falles in 398,

$$\tan g\ \tfrac{1}{2}(CAE - AEC) = \frac{(a+c)-b}{(a+c)+b}\ \text{cotg}\ \tfrac{1}{2}C$$

oder $\text{cotg}\ \frac{1}{2}A = \frac{(a+c)+b}{(a+c)-b} \,.\, \text{tg}\ \frac{1}{2}C$

406. Ein Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind: ein Winkel (C), eine der angränzenden Seiten (b) und der Unterschied (a — c) der beiden andern.

Auflösung: tang ½ Winkel, der an die gegebene Seite gränzt = $\frac{\text{gegeb. Seite} + \text{gegeb. Unterschied}}{\text{gegeb. Seite} - \text{gegeb. Unterschied}}$. tang ½ gegebener Winkel.

Cagnoli §. 241.

Vorber. Es sei (Fig. 180) BD = BA, also 1) CD = CB — BA = a — c, und 2) W. DAB = ADB, 3) W. CDA — CAD = 180° — ADB — CAD = 180° — (DAB + CAD) = 180° — CAB, also ½ (CDA — CAD) = 90° — ½ CAB = compl. ½ CAB.

Beweis. Für Dreieck CAD ist nun nach der ersten Auflösung des dritten Falles in 398

$$\mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\ (CDA - CAD) = \mathrm{cotg}\ \tfrac{1}{2}\ CAB$$
$$= \mathrm{cotg}\ \tfrac{1}{2}\ C\ .\ \frac{CA - CD}{CA + CD}$$
$$= \mathrm{cotg}\ \tfrac{1}{2}\ C\ .\ \frac{CA - (CB - AB)}{CA + (CB - AB)}$$

folglich $\mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\ A = \dfrac{b + (a - c)}{b - (a - c)}\ .\ \mathrm{tg}\ \tfrac{1}{2}\ C.$

407. Wenn die Winkel eines Dreiecks und eine der Seiten gegeben sind, die Stücke der letztern zu bestimmen, welche durch das zu ihr gehörige Höhenperpendikel gebildet werden.
Cagnoli §. 243.

Auflösung.

Unterſch. oder Summe der Stücke $=$ $\dfrac{\text{gegeb. Seite . sin . Untersch. der anlieg. Wink.}}{\text{sin . Gegenwinkel.}}$

Vorbereitung. Theile (Fig. 181[a]) CA in zwei gleiche Theile in E; ziehe die Senkrechten EF und BD, und endlich CF, so ist $CF = AF$, und daher W. $BCF = BCA - BAC = C - A$.

Beweis. $\sin FCB : \sin CBF = BF : FC$

$$\sin (C - A) : \sin B = BF : FA = DE : EA$$
$$= \tfrac{1}{2}\ b \mp DC : \tfrac{1}{2}\ b$$
$$= b \mp 2\ DC : b$$
$$= AD \mp DC\ : b$$

also $AD \mp DC = \dfrac{b\ .\ \sin\ (C - A)}{\sin\ B.}$

Anmerkung 1. Das obere Vorzeichen gilt, wenn beide Winkel an der gegebenen Seite spitz, das untere, wenn einer derselben stumpf.

Zus. 1. Ist der Gegenwinkel der gegebenen Seite ein Rechter, so wird der Unterschied der Hypotenusenstücke gleich dem Product aus der Hypotenuse und dem Sinus des Unterschiedes ihrer anliegenden Winkel; also

$$AD - CD = b\ .\ \sin\ (C - A).$$

Aber, da $C + A = 90°$, so ist $C - A = 90° - 2\ A = \text{compl.}\ 2\ A$,
also $DA - DC = b\ .\ \cos\ 2\ A.$

Nun ist $DA = \tfrac{1}{2}\,(AC + DA - DC) = \tfrac{1}{2}\,(b + b\ \cos\ 2\ A)$
$= \tfrac{1}{2}\ b\ (1 + \cos\ 2\ A)$

und $DC = \tfrac{1}{2}\,(AC - DA + DC) = \tfrac{1}{2}\ b\ (1 - \cos\ 2\ A)$

also $DA : DC = \tfrac{1}{2}\ b\ (1 + \cos\ 2\ A) : \tfrac{1}{2}\ b\ (1 - \cos\ 2\ A)$
$= \cos^2\ A : \sin^2\ A$ (378, Fig. 96 und 113)
$= 1 : \tan^2\ A.$

Cagnoli §. 221.

Anmerkung 2. Der Fall, wo man die Abschnitte einer Dreiecksseite (die auf ihr durch das zugehörige Höhenperpendikel gebildet werden) bestimmen soll aus den Dreiecks-

seiten, als den gegebenen Stücken, fällt zusammen mit der ersten Auflösung von Fall IV in 398.

408. Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in einem Dreieck gegeben sind, die Winkel zu bestimmen, welche das aus der Spitze des gegebenen Winkels auslaufende Höhenperpendikel mit den beiden gegebenen Seiten bildet.

Auflösung.

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2} \left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{oder}\\ \text{Untersch.}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{der ge-}\\ \text{suchten}\\ \text{Winkel}\end{matrix} = \frac{\text{Untersch. gegeb. Seit.}}{\text{Summe gegeb. Seit.}} \cdot \text{cotg}\ \tfrac{1}{2}\ \text{gegeb. Wink.}$$

Cagnoli §. 245.

Beweis. Es ist (Fig. 66)

$$\begin{aligned} AB : BC &= \sin BCA : \sin BAC \\ &= \sin BCD : \sin BAD \\ &= \cos CBD : \cos ABD. \end{aligned}$$

also $AB + BC : AB - BC = \cos CBD + \cos ABD : \cos CBD - \cos ABD$

oder $$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\cos CBD + \cos ABD}{\cos CBD - \cos ABD}$$
$$= \frac{\text{cotg}\ \frac{1}{2}(ABD + CBD)}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(ABD - CBD)} \ (378,\ \text{Fig. } 82)$$

also, wenn $C < 90^0$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}(ABD - CBD) = \frac{c-a}{c+a} \cdot \text{cotg}\ \tfrac{1}{2} B$$

und wenn $C > 90^0$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\text{cotg}\ \frac{1}{2}(ABD - CBD)}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(ABD + CBD)}$$

und daraus

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}(ABD + CBD) = \frac{c-a}{c+a} \cdot \text{cotg}\ \tfrac{1}{2} B.$$

Zus. Ist $B = 90^0$, so wird $\text{cotg}\ \frac{1}{2} B = 1$, also

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}(ABD - CBD) = \frac{c-a}{c+a}.$$

409. Die Stücke zu finden, in welche die Seite (AB Fig. 67) eines Dreiecks (ACB) durch die ihren Gegenwinkel (C) halbirende Gerade (CH) getheilt wird, wenn man entweder die Winkel des Dreiecks und die getheilte Seite, oder alle Seiten kennt.

Auflösung.

1. $$\text{Untersch. d. Stücke} = \frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}\ \text{Untersch. anlieg. Wink.}}{\text{tang}\ \frac{1}{2}\ \text{Summe dieser beiden W.}} \cdot \text{getheilte Seite}$$

2. $$\text{Untersch. d. Stücke} = \frac{\text{Untersch. der beid. and. Seiten}}{\text{Summe dieser beiden Seiten}} \cdot \text{getheilte Seite.}$$

Cagnoli §. 244.

Bew. $BH : CH = \sin BCH : \sin B$

$CH : AH = \sin A : \sin ACH$

$BH : AH = \sin A : \sin B$

$BH + AH : BH - AH = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B$

$= tg \frac{1}{2}(A + B) : tg \frac{1}{2}(A - B)$ (378, F. 81)

$= a + b : a - b$ (394)

woraus unsere beiden Auflösungen sich sofort ergeben.

Zus. 1. Ist das Dreieck in C rechtwinkelig, so ist, weil

$A + B = 90^{\circ}$, also $\frac{1}{2}(A + B) = 45^{\circ}$, $\frac{1}{2}(A - B) = 45^{\circ} - B$;

ferner $BH = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2}(BH - AH)$

$AH = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2}(BH - AH)$, also

$$BH : AH = \frac{1}{2} AB \left(1 + \frac{BH - AH}{AB}\right) : \frac{1}{2} AB \left(1 - \frac{BH - AH}{AB}\right)$$

$$= 1 + \frac{tg \frac{1}{2}(A - B)}{tg \frac{1}{2}(A + B)} : 1 - \frac{tg \frac{1}{2}(A - B)}{tg \frac{1}{2}(A + B)}$$

$$= tg \tfrac{1}{2}(A + B) + tg \tfrac{1}{2}(A - B) : tg \tfrac{1}{2}(A + B) - tg \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$= tg\, 45^{\circ} + tg(45^{\circ} - B) : tg\, 45^{\circ} - tg(45^{\circ} - B)$$

$$= 1 + \frac{1 - tg B}{1 + tg B} : 1 - \frac{1 - tg B}{1 + tg B} \quad (378, F. 64)$$

$$= 1 + tg B + 1 - tg B : 1 + tg B - 1 + tg B$$

$$= 2 : 2\, tg B = 1 : tg B.$$

Cagnoli §. 222.

Zus. 2. Ist das Dreieck gleichschenkelig, namentlich $AC = BC$ so ist $BH - AH = 0$, oder $AH = BH$ was man schon aus frühern Sätzen (51) wußte.

410. Wenn von einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, die Stücke zu bestimmen, in welche dieser Winkel durch die von seinem Scheitel nach dem Halbirungspuncte der Gegenseite gehende gerade Linie getheilt wird.

Auflösung.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \text{ Untersch. der Winkelstücke} = \frac{\text{Untersch. d. Seiten}}{\text{Summe d. Seiten}} \cdot tg \tfrac{1}{2} \text{ geg. W.}$$

Cagnoli §. 246.

Bew. $BC : BH = \sin BHC : \sin BCH$ (Fig. 67)

$AH : AC = \sin ACH : \sin AHC$

$a : b = \sin ACH : \sin BCH$

$a + b : a - b = \sin ACH + \sin BCH : \sin ACH - \sin BCH$

$= tg \frac{1}{2} C : tg \frac{1}{2}(ACH - BCH)$ (378, F. 81)

woraus die Richtigkeit unserer Auflösung hervorleuchtet. —

Aus diesen bereits gefundenen Stücken werden alle noch übrige gesuchte leicht hergeleitet.

Zweite Auflösung.

Da $AD = \frac{\sin ABD}{\sin ADB} . AB$, und $AC = \frac{\sin ABC}{\sin ACB} . AB$, so ist auch

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sin ACB . \sin ABD}{\sin ABC . \sin ADB}$$

Also ist $\frac{AD}{AC}$ gleich einer bekannten Größe, da die auf der rechten Seite vorkommenden Winkel alle nach Voraussetzung bekannt sind. Bezeichnen wir daher diese bekannte Größe mit α, so ist:

$$\frac{AD}{AC} = \alpha$$

und mithin, der zweiten Auflösung des dritten Falles in 398 zufolge:

$$\cot g \tfrac{1}{2} (ADC - ACD) = tg \tfrac{1}{2} CAD . tg (45^0 + \alpha)$$

Durch Hülfe dieser Formel findet man also $\frac{1}{2}(ADC - ACD)$, also auch ADC und ACD selbst, und dann leicht auch die noch übrigen gesuchten Stücke.

Anmerkung. Bei der Bildung des halben Winkelunterschiedes, für dessen Cotangente man hier einen bekannten Werth findet, muß man mit einiger Vorsicht zu Werke gehen, und auf die Hülfsgleichung $\frac{AD}{AC} = \alpha$ achten, von der man ausgegangen ist. Jedenfalls nämlich muß derjenige Winkel Minuendus werden, welcher der Seite gegenüberliegt, die den Nenner unseres Bruches $\frac{AD}{AC}$ bildet, also hier ADC, und Subtrahendus der Gegenwinkel des Zählers, also ACD. Denn nur dadurch vermeidet man Widersprüche und Ungereimtheiten, in welche man außerdem leicht verfallen kann.

Anhang zum achten und neunten Buche.

---

678. Vorerinnerung. Zur Vermeidung möglicher Irrungen und zur Erleichterung des Verständnisses für Anfänger bemerken wir:

1) Allen goniometrischen und trigonometrischen Formeln dieses Anhanges liegt die Annahme zum Grunde, daß sin. 90° oder sin. tot. = 1 sei.

2) Bogen oder Winkel, die nicht nur von willkührlicher Größe, sondern auch ohne alle gegenseitige Beziehung sind, sollen durch die Buchstaben

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \varphi, \chi, \omega$$

dagegen

3) die Winkel eines Dreiecks durch A, B, C, und ihre Gegenseiten beziehungsweise durch a, b, c bezeichnet werden.

4) Den Halbmesser des Kreises, der sich um ein Dreieck beschreiben läßt, bezeichnen wir mit R, die Radien seiner vier Berührungskreise aber mit r, r^{I}, r^{II}, r^{III} und zwar mit r den Halbmesser des innern, mit r^{I} den Radius dessen, der die Seite a von außen berührt, ꝛc.

679. $$\frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\alpha + 1$$

680. $$\frac{\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2\cos\alpha -$$

681. $$\frac{\tang\frac{3}{2}\alpha}{\tang\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-2\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

682. $$\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(1+\tang\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

683. $$\frac{1+\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(1+\cotg\frac{\alpha}{2}\right)$$

684. $$\frac{1-\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(1-\tg\frac{\alpha}{2}\right)$$

685. $$\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(\cotg\frac{\alpha}{2}-1\right)^2$$

686. $$\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(1-\tg^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

687. $\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(\cot g^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$

688. $\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tang}\alpha \cdot \sec^2\frac{\alpha}{2}$

689. $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha + 1)(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$
$= (1 + \sin\alpha - \cos\alpha)(1 - \sin\alpha + \cos\alpha)$

690. $\cos 2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$

691. $\sec 2\alpha + \operatorname{tang} 2\alpha = \operatorname{tang}(45^\circ + \alpha)$

692. $\sec 2\alpha - \operatorname{tang} 2\alpha = \operatorname{tang}(45^\circ - \alpha)$

692a. $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = (\sec\alpha + \operatorname{tang}\alpha)^2$

693. $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = (\sec\alpha - \operatorname{tang}\alpha)^2$

694. $\operatorname{cosec} 2\alpha = 1 + \frac{\operatorname{tang}(45^\circ - \alpha)}{\operatorname{tang} 2\alpha}$

695. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

696. $(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta) = \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)$

697. $\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

698. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha - \sin\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$
$= (\cos\beta + \sin\alpha) \cdot (\cos\beta - \sin\alpha) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$

699. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$

700. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha-\beta)$

701. $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta}$

702. $\operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta}$

703. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$

704. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$

705. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi) + \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = \frac{2\sin\varphi}{\cos\varphi + \cos\psi}$

706. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi) - \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = \frac{2\sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi}$

707. $\sin\varphi = \sin\psi \cdot \cos(\varphi-\psi) + \cos\psi \cdot \sin(\varphi-\psi)$

708. $\cos\varphi = \sin\psi \cdot \sin(\varphi+\psi) + \cos\psi \cdot \cos(\varphi+\psi)$

709. $(\cos\delta + \cos\varepsilon)[1 - \cos(\delta+\varepsilon)] = (\sin\delta + \sin\varepsilon) \cdot \sin(\delta+\varepsilon)$

710. $\sin^2\delta \cdot \sin^2\varepsilon + \cos^2\delta \cdot \cos^2\varepsilon + \sin^2\delta \cdot \cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon \cdot \cos^2\delta = 1$

711. $$\begin{cases} \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \\ \cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \\ \sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \\ \cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{12}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \end{cases}$$

712. $\mathrm{tg}^2\,\alpha - \mathrm{tg}^2\,\beta = \mathrm{tg}^2\,\alpha \,.\, \sec^2\beta - \mathrm{tg}^2\,\beta \,.\, \sec^2\alpha$

713. $\mathrm{cotg}^2\,\alpha - \mathrm{cotg}^2\,\beta = \mathrm{cotg}^2\,\alpha\,\mathrm{cosec}^2\,\beta - \mathrm{cotg}^2\,\beta\,\mathrm{cosec}^2\,\alpha$

714. $(\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta)(\mathrm{cotg}^2\alpha - \mathrm{cotg}^2\beta) = (\sec^2\alpha - \sec^2\beta)(\mathrm{cosec}^2\alpha - \mathrm{cosec}^2\beta)$

715. $$\begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha} \\ \sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1-\sin\alpha} \end{cases}$$

716. $4\sin(60^\circ+\omega)\,.\,\sin(60^\circ-\omega) = 4\cos(30^\circ+\omega)\,.\,\cos(30^\circ-\omega)$
$= 2\cos 2\,\omega + 1 = 4\cos^2\omega - 1$

717. $4\cos(60^\circ+\omega)\,.\,\cos(60^\circ-\omega) = 4\sin(30^\circ+\omega)\,.\,\sin(30^\circ-\omega)$
$= 2\cos 2\,\omega - 1 = 1 - 4\sin^2\omega$

718. $\sin(54^\circ+\omega) - \sin(18^\circ+\omega) + \sin(54^\circ-\omega) - \sin(18^\circ-\omega) = \cos\omega$

719. $\cos(54^\circ-\omega) - \cos(18^\circ-\omega) - \cos(54^\circ+\omega) + \cos(18^\circ+\omega) = \sin\omega$

720. Wenn φ einen beliebigen Bogen bezeichnet, dessen Sinus nicht Null ist, und
$$\frac{\sin\omega}{\sin(\varphi-\omega)} = \frac{\sin\omega'}{\sin(\varphi-\omega')}$$
so ist
$$\omega = n\,.\,180^\circ + \omega'$$
wo n jede beliebige ganze positive Zahl, Null mit einbegriffen, bezeichnet.

721. Wenn, unter derselben Voraussetzung für φ,
$$\frac{\cos\omega}{\cos(\varphi-\omega)} = \frac{\cos\omega'}{\cos(\varphi-\omega')}$$
so ist
$$\omega = n\,.\,180^\circ + \omega'$$
wo n dieselben Werthe hat, wie im vorigen Satze.

722. Ist, unter eben dieser Voraussetzung,
$$\frac{\mathrm{tg}\,\omega}{\mathrm{tg}(\varphi-\omega)} = \frac{\mathrm{tg}\,\omega'}{\mathrm{tg}(\varphi-\omega')}$$
so ist, $\mathrm{tg}\,\omega' = \mathrm{cotg}(\omega-\varphi)$
und $\mathrm{tg}\,\omega = \mathrm{cotg}(\omega'-\varphi)$

723. Bezeichnen μ, ν, ρ drei beliebige Bogen, so ist:
$$4\sin\mu\,.\,\sin\nu\,.\,\sin\rho = -\sin(\mu+\nu+\rho) + \sin(-\mu+\nu+\rho) + \sin(\mu-\nu+\rho) + \sin(\mu+\nu-\rho)$$

Zus. 1. Daher ist für jedes Dreieck:
$$4\sin A\,.\,\sin B\,.\,\sin C = \sin(-A+B+C) + \sin(A-B+C) + \sin(A+B-C)$$

Zus. 2. In jedem Dreieck ist daher auch:
$$4\sin A\,.\,\sin B\,.\,\sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

724. $\sin\mu + \sin\nu + \sin\rho$
$= \sin(\mu+\nu+\rho) + 4\sin\frac{1}{2}(\mu+\nu)\,.\,\sin\frac{1}{2}(\mu+\rho)\,.\,\sin\frac{1}{2}(\nu+\rho)$

Zus. 1. Daher ist für jedes Dreieck:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \tfrac{1}{2} A \cdot \cos \tfrac{1}{2} B \cdot \cos \tfrac{1}{2} C$$

Zus. 2. $\sin 2 A + \sin 2 B + \sin 2 C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

725. $4 \cos \mu \cdot \cos \nu \cos \rho = \cos (\mu + \nu + \rho) + \cos (-\mu + \nu + \rho) + \cos (\mu - \nu + \rho) + \cos (\mu + \nu - \rho)$

Zus. 1. Ist also $\mu + \nu + \rho = (4 n \pm 1) 90^0$, so ist:

$$4 \cos \mu \cdot \cos \nu \cdot \cos \rho = \pm (\sin 2 \mu + \sin 2 \nu + \sin 2 \rho)$$

Zus. 2. Ist dagegen $\mu + \nu + \rho = 4 n \cdot 90^0$

so ist:

$$4 \cos \mu \cdot \cos \nu \cdot \cos \rho = 1 + \cos 2 \mu + \cos 2 \nu + \cos 2 \rho$$

Zus. 3. Ist $\mu + \nu + \rho = (4 n + 2) 90^0$,

so ist:

$$4 \cos \mu \cdot \cos \nu \cdot \cos \rho = -(1 + \cos 2 \mu + \cos 2 \nu + \cos 2 \rho)$$

In jedem Dreieck ist daher:

Zus. 4. $4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -(1 + \cos 2 A + \cos 2 B + \cos 2 C)$

Zus. 5. $4 \cos \tfrac{1}{2} A \cdot \cos \tfrac{1}{2} B \cdot \cos \tfrac{1}{2} C = \sin A + \sin B + \sin C$

726. $\cos \mu \cdot \cos \nu \cdot \cos \rho = \cos (\mu + \nu + \rho) + \sin \mu \cdot \sin \nu \cdot \cos \rho + \sin \mu \cdot \sin \rho \cdot \cos \nu + \sin \nu \cdot \sin \rho \cdot \cos \mu$

Zus. 1. In jedem Dreieck ist also:

$$1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos B + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos A$$

Zus. 2. $4 \sin \mu \cdot \sin \nu \cdot \cos \rho + 4 \sin \mu \cdot \sin \rho \cdot \cos \nu + 4 \sin \nu \cdot \sin \rho \cdot \cos \mu = \cos (-\mu + \nu + \rho) + \cos (\mu - \nu + \rho) + \cos (\mu + \nu - \rho) - 3 \cos (\mu + \nu + \rho)$

Zus. 3. In jedem Dreieck also ist:

$$4 (\sin A \cdot \sin B \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos B + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos A) = 3 - \cos 2 A - \cos 2 B - \cos 2 C$$

Zus. 4.

$$4 (\sin \tfrac{1}{2} A \cdot \sin \tfrac{1}{2} B \cdot \cos \tfrac{1}{2} C + \sin \tfrac{1}{2} A \cdot \sin \tfrac{1}{2} C \cdot \cos \tfrac{1}{2} B + \sin \tfrac{1}{2} B \cdot \sin \tfrac{1}{2} C \cdot \cos \tfrac{1}{2} A) = \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \tfrac{1}{2} A \cdot \cos \tfrac{1}{2} B \cdot \cos \tfrac{1}{2} C.$$

727. $\cos \mu + \cos \nu + \cos \rho = 4 \cos \tfrac{1}{2} (\mu + \nu) \cdot \cos \tfrac{1}{2} (\mu + \rho) \cos \tfrac{1}{2} (\nu + \rho) - \cos (\mu + \nu + \rho)$

Zus. 1. $\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \tfrac{1}{2} A \cdot \sin \tfrac{1}{2} B \cdot \sin \tfrac{1}{2} C + 1$

Zus. 2. $1 + 4 \cos A \cos B \cos C + \cos 2 A + \cos 2 B + \cos 2 C = 0$

728. $\operatorname{tg} \mu \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot \operatorname{tg} \rho = \operatorname{tg} \mu + \operatorname{tg} \nu + \operatorname{tg} \rho - \dfrac{\sin (\mu + \nu + \rho)}{\cos \mu \cdot \cos \nu \cdot \cos \rho}$

Zus. 1. $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$

Zus. 2. $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C + \sec \tfrac{1}{2} A \cdot \sec \tfrac{1}{2} B \cdot \sec \tfrac{1}{2} C = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C$

729. $\operatorname{cotg} \mu \cdot \operatorname{cotg} \nu \cdot \operatorname{cotg} \rho = \operatorname{cotg} \mu + \operatorname{cotg} \nu + \operatorname{cotg} \rho + \dfrac{\cos (\mu + \nu + \rho)}{\sin \mu \cdot \sin \nu \cdot \sin \rho}$

Zus. 1. $\operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C + \operatorname{cosec} A \cdot \operatorname{cosec} B \cdot \operatorname{cosec} C = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$

Zus. 2. $\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C$

730. $4 \sin \mu \cdot \cos \nu \cdot \cos \rho = \sin (\mu + \nu + \rho) - \sin (-\mu + \nu + \rho) + \sin (\mu - \nu + \rho) + \sin (\mu + \nu - \rho)$

Zus. 1. $4 \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\sin 2 A + \sin 2 B + \sin 2 C$

Zus. 2.

$$4 \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + 4 \sin B \cos A \cdot \cos C + 4 \sin C \cdot \cos A \cdot \cos B = \sin 2 A + \sin 2 B + \sin 2 C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

Zus. 3. $4 \sin\frac{1}{2} A . \cos\frac{1}{2} B . \cos\frac{1}{2} C + 4 \sin\frac{1}{2} B \cos\frac{1}{2} A \cos\frac{1}{2} C$
$+ 4 \sin\frac{1}{2} C . \cos\frac{1}{2} A . \cos\frac{1}{2} B = 3 + \cos A + \cos B + \cos C$

731. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma$
$= 4 \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) . \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$

Zus. 1. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin\frac{1}{2} A . \sin\frac{1}{2} B . \cos\frac{1}{2} C$

Zus. 2. $\sin A + \sin B + \sin C =$
$4 \sin\frac{1}{2} A . \sin\frac{1}{2} B . \cos\frac{1}{2} C + 4 \sin\frac{1}{2} A . \sin\frac{1}{2} C . \cos\frac{1}{2} B + 4 \sin\frac{1}{2} B . \sin\frac{1}{2} C . \cos\frac{1}{2} A$
$= 4 \cos\frac{1}{2} A . \cos\frac{1}{2} B . \cos\frac{1}{2} C$

Zus. 3. $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \sin C . \cos A . \cos B$

Zus. 4. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C =$
$4 \sin A \cos B \cos C + 4 \sin B \cos A \cos C + 4 \sin C . \cos A . \cos B =$
$4 \sin A . \sin B . \sin C$

732. $8 \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) . \sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) . \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) .$
$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) =$
$4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma - 1 =$
$2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$

Zus. 1. $1 + 4 \cos A \cos B \cos C + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0$

Zus. 2. $1 - 2 \cos A . \cos B \cos C = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

733. $-8 \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) . \cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) .$
$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) =$
$4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 =$
$2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$

734. $8 \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) . \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) .$
$\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) =$
$1 + \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma + 4 \cos\alpha . \sin\beta \sin\gamma$

Zus. 1. $4 \cos A . \sin B . \sin C = 1 + \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C$

Zus. 2. $4 [\cos A . \sin B . \sin C + \cos B . \sin A . \sin C + \cos C . \sin A . \sin B] =$
$3 - \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C$

735. $-8 \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) . \cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) . \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) .$
$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) =$
$1 + \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma - 4 \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma$

736. $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) . \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) + \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) . \cos\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) . \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) . \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma$

737. $\sin 2\alpha . \sin 2\beta \cos^2\gamma + \sin 2\alpha . \sin 2\gamma \cos^2\beta + \sin 2\beta . \sin 2\gamma \cos^2\alpha = 4 \cos^2\alpha \cos^2\beta \cos^2\gamma - 4 \cos\alpha . \cos\beta \cos\gamma \cos(\alpha+\beta+\gamma)$
A. 726.

Zus. $\sin A . \sin B \cos^2\frac{C}{2} + \sin A . \sin C . \cos^2\frac{B}{2} +$
$\sin B . \sin C . \cos^2\frac{A}{2} = 4 \cos^2\frac{A}{2} . \cos^2\frac{B}{2} . \cos^2\frac{C}{2}$

738. $8 \sin\mu . \sin\nu . \sin\rho . \sin\omega = \cos(\mu+\nu+\rho+\omega) - \cos(-\mu+\nu+\rho+\omega) - \cos(\mu-\nu+\rho+\omega) - \cos(\mu+\nu-\rho+\omega) - \cos(\mu+\nu+\rho-\omega) + \cos(\mu+\nu-\rho-\omega) + \cos(\mu-\nu-\rho+\omega) + \cos(-\mu+\nu-\rho+\omega)$

739. $8 \cos\mu . \cos\nu . \cos\rho . \cos\omega = \cos(\mu+\nu+\rho+\omega) + \cos(-\mu+\nu+\rho+\omega) + \cos(\mu-\nu+\rho+\omega) + \cos(\mu+\nu-\rho+\omega) + \cos(\mu+\nu+\rho-\omega) + \cos(\mu+\nu-\rho-\omega) + \cos(\mu-\nu+\rho-\omega) + \cos(\mu-\nu-\rho+\omega)$

Zus. 1. $4 \sin\mu \,.\, \sin\nu \,.\, \sin\rho \,.\, \sin\omega + 4 \cos\mu \,.\, \cos\nu \,.\, \cos\rho \,.\, \cos\omega$
$= \cos(\mu+\nu+\rho+\omega) + \cos(\mu+\nu-\rho-\omega) + \cos(\mu-\nu+\rho-\omega)$
$+ \cos(\mu-\nu-\rho+\omega)$

Zus. 2. $4 \cos\mu \,.\, \cos\nu \,.\, \cos\rho \,.\, \cos\omega - 4 \sin\mu \,.\, \sin\nu \,.\, \sin\rho \,.\, \sin\omega$
$= \cos(-\mu+\nu+\rho+\omega) + \cos(\mu-\nu+\rho+\omega) + \cos(\mu+\nu-\rho+\omega)$
$+ \cos(\mu+\nu+\rho-\omega)$

740. $\cos\mu + \cos\nu + \cos\rho + \cos\omega = \cos\frac{1}{2}(\mu+\nu+\rho+\omega)$
$+ \cos\frac{1}{2}(\mu+\nu-\rho-\omega) + \cos\frac{1}{2}(\mu-\nu+\rho-\omega) + \cos\frac{1}{2}(\mu-\nu-\rho+\omega)$
$- 8 \sin\frac{1}{4}(-\mu+\nu+\rho+\omega) \,.\, \sin\frac{1}{4}(\mu-\nu+\rho+\omega) \,.\, \sin\frac{1}{4}(\mu+\nu-\rho+\omega)$
$\sin\frac{1}{4}(\mu+\nu+\rho-\omega) = 8 \cos\frac{1}{4}(-\mu+\nu+\rho+\omega) \,.\, \cos\frac{1}{4}(\mu-\nu+\rho+\omega)$
$.\, \cos\frac{1}{4}(\mu+\nu-\rho+\omega) \,.\, \cos\frac{1}{4}(\mu+\nu+\rho-\omega) - \cos\frac{1}{2}(\mu+\nu+\rho+\omega)$
$- \cos\frac{1}{2}(\mu+\nu-\rho-\omega) - \cos\frac{1}{2}(\mu-\nu+\rho-\omega) - \cos\frac{1}{2}(\mu-\nu-\rho+\omega)$

741. Sind A, B, C, D die Winkel eines beliebigen Vierecks, so ist:
$$1 + \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C \,.\, \sin D - \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C \,.\, \cos D = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 D}{2}$$

742. Unter eben dieser Voraussetzung ist:
$$1 - \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C \,.\, \sin D + \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C \,.\, \cos D = \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D}{2}$$

743. $\sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta+\gamma) \,.\, \sin(\beta-\gamma)$
$+ \sin(\gamma+\alpha) \,.\, \sin(\gamma-\alpha) = 0$

744. $\cos(\alpha+\beta) \,.\, \cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta+\gamma) \,.\, \cos(\beta-\gamma) +$
$\cos(\gamma+\alpha) \,.\, \cos(\gamma-\alpha) = 0$

745. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \psi, \omega$ beliebige Bogen, so ist:
$\sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta+\gamma) \,.\, \sin(\beta-\gamma) \ldots$
$+ \sin(\psi+\omega) \,.\, \sin(\psi-\omega) + \sin(\omega+\alpha) \,.\, \sin(\omega-\alpha) = 0$

746. $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma) + \ldots +$
$\cos(\psi+\omega)\sin(\psi-\omega) + \cos(\omega+\alpha)\sin(\omega-\alpha) = 0$

747. $$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta} + \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma} + \frac{\sin(\gamma-\delta)}{\sin\gamma \,.\, \sin\delta} + \ldots + \frac{\sin(\psi-\omega)}{\sin\psi \,.\, \sin\omega} + \frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega \,.\, \sin\alpha} = 0$$

748. $$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta \,.\, \cos\gamma} + \frac{\sin(\gamma-\delta)}{\cos\gamma\cos\delta} + \ldots \frac{\sin(\psi-\omega)}{\cos\psi\cos\omega} + \frac{\sin(\omega-\alpha)}{\cos\omega \,.\, \cos\alpha} = 0$$

749. $\sin\alpha \,.\, \sin(\beta-\gamma) + \sin\beta \,.\, \sin(\gamma-\alpha) + \sin\gamma \,.\, \sin(\alpha-\beta) = 0$

750. $\cos\alpha \,.\, \sin(\beta-\gamma) + \cos\beta \,.\, \sin(\gamma-\alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0$

751. $\sin\alpha \,.\, \sin(\beta-\gamma-\delta) + \sin\beta \,.\, \sin(\gamma+\delta-\alpha) + \sin\gamma \,.\, \sin(\delta+\alpha-\beta)$
$+ \sin\delta\sin(\alpha-\beta-\gamma) = 0$

752. $\sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \sin(\gamma-\delta) + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \sin(\delta-\alpha)$
$+ \sin\gamma \,.\, \sin\delta \,.\, \sin(\alpha-\beta) + \sin\delta \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin(\beta-\gamma) = 0$

753. $\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \sin(\gamma-\delta) + \cos\beta \,.\, \cos\gamma \,.\, \sin(\delta-\alpha)$
$+ \cos\gamma \,.\, \cos\delta \,.\, \sin(\alpha-\beta) + \cos\delta \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin(\beta-\gamma) = 0$

754. $\frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta} + \frac{\sin(\beta+\gamma) \cdot \sin(\beta-\gamma)}{\cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma} + \ldots\ldots\ldots$
$+ \frac{\sin(\psi+\omega) \cdot \sin(\psi-\omega)}{\cos^2 \psi \cdot \cos^2 \omega} + \frac{\sin(\omega+\alpha) \cdot \sin(\omega-\alpha)}{\cos^2 \omega \cdot \cos^2 \alpha} = 0$

755. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}(\beta-\gamma)(1+\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma) + \ldots\ldots$
$+ \operatorname{tg}(\psi-\omega)(1+\operatorname{tg}\psi \cdot \operatorname{tg}\omega) + \operatorname{tg}(\omega-\alpha)(1+\operatorname{tg}\omega \cdot \operatorname{tg}\alpha) = 0$

756. $\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha$
$$= \frac{\sin(n+1)\alpha \cdot \sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}$$
A. 745.

757. $\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha$
$$= \frac{\cos(n+1)\alpha \cdot \cos(n-1)\alpha}{\sin\alpha}$$
A. 746.

758. $\operatorname{cosec}\alpha \cdot \operatorname{cosec} 2\alpha + \operatorname{cosec} 2\alpha \operatorname{cosec} 3\alpha + \operatorname{cosec} 3\alpha \operatorname{cosec} 4\alpha + \ldots + \operatorname{cosec}(n-1)\alpha \operatorname{cosec} n\alpha = \sin(n-1)\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha \cdot \operatorname{cosec} n\alpha$
A. 747.

759. $\sec\alpha \cdot \sec 2\alpha + \sec 2\alpha \cdot \sec 3\alpha + \sec 3\alpha \cdot \sec 4\alpha + \ldots\ldots + \sec(n-1)\alpha \cdot \sec n\alpha = \sin(n-1)\alpha \cdot \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha \cdot \sec n\alpha$
A. 748.

760. $$\begin{cases} \sin 3\alpha = 2\cos\alpha \sin 2\alpha - \sin\alpha \\ \sin 4\alpha = 2\cos\alpha \cdot \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \\ \sin 5\alpha = 2\cos\alpha \cdot \sin 4\alpha - \sin 3\alpha \\ \vdots \\ \sin n\alpha = 2\cos\alpha \cdot \sin(n-1)\alpha - \sin(n-2)\alpha \end{cases}$$

761. $$\begin{cases} \cos 3\alpha = 2\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos\alpha \\ \cos 4\alpha = 2\cos\alpha \cdot \cos 3\alpha - \cos 2\alpha \\ \cos 5\alpha = 2\cos\alpha \cdot \cos 4\alpha - \cos 3\alpha \\ \vdots \\ \cos n\alpha = 2\cos\alpha \cdot \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha \end{cases}$$

762. $\sin a + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(n-1)\alpha =$
$$\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha \cdot \sin\frac{n-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
A. 760.

763. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots \cos(n-1)\alpha =$
$$\frac{\cos\frac{n}{2}\alpha \cdot \sin\frac{n-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
A. 761.

764. $$\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha} = \operatorname{tang}\frac{n+1}{2}\alpha$$

765.
$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = 2\cos\beta\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha+2\beta) = 2\cos\beta\,.\,\sin(\alpha+\beta) - \sin a \\ \sin(\alpha+3\beta) = 2\cos\beta\,.\,\sin(\alpha+2\beta) - \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+4\beta) = 2\cos\beta\,.\,\sin(\alpha+3\beta) - \sin(\alpha+2\beta) \\ \vdots \\ \sin(\alpha+n\beta) = 2\cos\beta\,.\,\sin[\alpha+(n-1)\beta] - \sin[\alpha+(n-2)\beta] \end{cases}$$

766.
$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha + \sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha+2\beta) = 2\sin\beta\,.\,\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha \\ \sin(\alpha+3\beta) = 2\sin\beta\,.\,\cos(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+\beta) \\ \vdots \\ \sin(\alpha+n\beta) = 2\sin\beta\cos[\alpha+(n-1)\beta] + \sin[\alpha+(n-2)\beta] \end{cases}$$

767.
$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\beta) \\ \vdots \\ \cos(\alpha+n\beta) = 2\cos\beta\cos[\alpha+(n-1)\beta] - \cos[\alpha+(n-2)\beta] \end{cases}$$

768.
$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\,.\,\sin\beta \\ \vdots \\ \cos(\alpha+n\beta) = \cos[\alpha+(n-2)\beta] - 2\sin\beta\sin[\alpha+(n-1)\beta] \end{cases}$$

769. $\sin\alpha + \sin)\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+3\beta) + \ldots$

$$+ \sin(\alpha+n\beta) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\,.\,\sin(\alpha+\frac{n}{2}\beta)}{\sin\frac{1}{2}\beta}$$
$$= \frac{\cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta) - \cos[\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta]}{2\sin\frac{1}{2}\beta}$$

A. 768.

770. $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cos(\alpha+3\beta) + \ldots$

$$+ \cos(\alpha+n\beta) = \frac{\cos(\alpha+\frac{n}{2}\beta\,.\,\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}$$
$$= \frac{\sin[\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta] - \sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\beta}.$$

A. 765.

Frage: Wie könnte man leicht aus den beiden letzten Formeln (769 und 770) die frühern in 762 und 763 herleiten?

Zus. $\frac{\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots \sin(\alpha+n\beta)}{\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots \cos(\alpha+n\beta)}$

$$= \operatorname{tg}(\alpha+\frac{n}{2}\beta)$$

771. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin(2n+1)\alpha$

$$= \frac{\sin^2(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

A. 769.

772. $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots \cos(2n+1)\alpha$

$$= \frac{\sin 2(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$$

A. 770.

Zus. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin(2n+1)\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots \cos(2n+1)\alpha} = \text{tang}\,(n+1)\,\alpha$

773. Sind $\varphi^{I}, \varphi^{II}, \varphi^{III} \ldots\ldots \varphi^{(n)}$ beliebige Bogen, deren Tangenten wir der Kürze halber beziehungsweise mit $t^{I}, t^{II}, t^{III} \ldots\ldots t^{(n)}$ bezeichnen, so ist:

$$\text{tg}\,(\varphi^{I} + \varphi^{II} + \varphi^{III}) = \frac{t^{I} + t^{II} + t^{III} - t^{I} \,.\, t^{II} \,.\, t^{III}}{1 - t^{I}t^{II} - t^{I} \,.\, t^{III} - t^{II}t^{III}}$$

Zus. 1. Bezeichnet daher, wie gewöhnlich, π den halben Umkreis, so ist, wenn

$$\varphi^{I} + \varphi^{II} + \varphi^{III} = n\,\pi,$$

$$t^{I} + t^{II} + t^{III} = t^{I} \,.\, t^{II} \,.\, t^{III}$$

Zus. 2. In jedem Dreieck ist daher:

$\text{tg}\,A + \text{tg}\,B + \text{tg}\,C = \text{tg}\,A \,.\, \text{tg}\,B \,.\, \text{tg}\,C$; und

Zus. 3. $\text{cotg}\,\tfrac{1}{2}A + \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}B + \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}C = \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}A \,.\, \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}B \,.\, \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}C.$

Zus. 4. Ist dagegen $\varphi^{I} + \varphi^{II} + \varphi^{III} = (2\,n + 1)\,\frac{\pi}{2}$, so ist:

$$t^{I}t^{II} + t^{I}\,t^{III} + t^{II}t^{III} = 1$$

Zus. 5. In jedem Dreieck ist daher:

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}A \,.\, \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B + \text{tg}\,\tfrac{1}{2}A \,.\, \text{tg}\,\tfrac{1}{2}C + \text{tg}\,\tfrac{1}{2}B \,.\, \text{tg}\,\tfrac{1}{2}C = 1$$

Zus. 6. In jedem Dreieck ist auch:

$$\text{cotg}\,A \,.\, \text{cotg}\,B + \text{cotg}\,A \,.\, \text{cotg}\,C + \text{cotg}\,B \,.\, \text{cotg}\,C = 1$$

774. Unter eben dieser Voraussetzung ist: $\text{tg}\,(\varphi^{I} + \varphi^{II} + \varphi^{III} + \varphi^{IV}) =$

$$\frac{t^{I} + t^{II} + t^{III} + t^{IV} - t^{I}t^{II}t^{III} - t^{I}\,t^{II}t^{IV} \ldots\ldots - t^{II}t^{III}t^{IV}}{1 - t^{I}t^{II} - t^{I}t^{III} - t^{I}t^{IV} - \ldots\ldots + t^{I}t^{II}t^{III}t^{IV}}$$

Zus. 1. Ist also $\varphi^{I} + \varphi^{II} + \varphi^{III} + \varphi^{IV} = n\,\pi$, so ist:

$$t^{I} + t^{II} + t^{III} + t^{IV} = t^{I}t^{II}t^{III} + t^{I}t^{II}\,t^{IV} + t^{I}t^{III}t^{IV} + t^{II}t^{III}t^{IV}$$

Zus. 3. Ist dagegen $\varphi^{I} + \varphi^{II} + \varphi^{III} + \varphi^{IV} = (2\,n + 1)\,\frac{\pi}{2}$, so ist:

$$t^{I}t^{II} + t^{I}t^{III} + t^{I}t^{IV} + t^{II}t^{III} + t^{II}t^{IV} + t^{III}t^{IV} = 1 + t^{I}t^{II}t^{III}t^{IV}$$

775. Setzt man der Kürze halber:

$$\overset{(1)}{\Sigma}_{(n)}t = t^{I} + t^{II} + t^{III} + \ldots\ldots + t^{(n-1)} + t^{(n)}$$

$$\overset{(2)}{\Sigma}_{(n)}t = t^{I}t^{II} + t^{I}t^{III} + \ldots\ldots + t^{(n-1)} \,.\, t^{(n)}$$

$$\vdots$$

$$\overset{(n-1)}{\Sigma}_{n}t = t^{I}t^{II}t^{III} \ldots t^{(n-1)} + \ldots\ldots t^{II}t^{III}t^{IV} \ldots\ldots t^{(n-1)}t^{n}$$

$$\overset{(n)}{\Sigma}_{n}t = t^{I}t^{II}t^{III} \ldots\ldots t^{(n-1)} \,.\, t^{(n)}$$

so ist allgemein:

$\text{tang}\,[\varphi^{I} + \varphi^{II} + \ldots\ldots \varphi^{(2n)}]$

$$= \frac{\overset{(1)}{\Sigma}_{(2n)}t - \overset{(3)}{\Sigma}_{(2n)}t + \overset{(5)}{\Sigma}_{(2n)}t - \ldots\ldots \pm \overset{(2n-1)}{\Sigma}_{(2n)}t}{1 - \overset{(2)}{\Sigma}_{(2n)}t + \overset{(4)}{\Sigma}_{(2n)}t - \ldots\ldots \mp \overset{(2n)}{\Sigma}_{(2n)}t}$$

Frage: In welchem Falle gelten die obern Vorzeichen der letzten Glieder im Zähler und Nenner unseres Ausdrucks, und in welchem die untern?

776. Unter denselben Voraussetzungen, wie in der vorigen Nummer, ist:

$$\tan\left[\varphi^{I} + \varphi^{II} + \ldots \varphi^{(2n+1)}\right] = \frac{\overset{(1)}{\Sigma}_{(2n+1)} t - \overset{(3)}{\Sigma}_{(2n+1)} t + \ldots \pm \overset{(2n+1)}{\Sigma}_{(2n+1)} t}{1 - \overset{(2)}{\Sigma}_{(2n+1)} t + \overset{(4)}{\Sigma}_{(2n+1)} t - \ldots \pm \overset{(2n)}{\Sigma}_{(2n+1)} t}$$

Frage: Wovon hängt es ab, ob für die letzten Glieder die obern oder die untern Vorzeichen gelten sollen?

777. Theilt man einen Bogen von der Größe: $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$, in eine beliebige Anzahl beliebiger Stücke, so ist die Summe aller 4nionen Produkte, die man aus den Tangenten derselben bildet, stets um die Einheit größer als die Summe aller $(4n + 2)$ionen Produkte eben dieser Tangenten.

778.

$$\begin{cases} \sec(\varphi^{I} + \varphi^{II}) = \dfrac{\sec\varphi^{I} \cdot \varphi^{II}}{1 - \operatorname{tg}\varphi^{I} \cdot \varphi^{II}} \\ \sec(\varphi^{I} + \varphi^{II} + \varphi^{III}) = \dfrac{\sec\varphi^{I} \cdot \sec\varphi^{II} \cdot \sec\varphi^{III}}{1 - \operatorname{tg}\varphi^{I}\operatorname{tg}\varphi^{II} - \operatorname{tg}\varphi^{I} \cdot \operatorname{tg}\varphi^{III} - \operatorname{tg}\varphi^{II} \cdot \operatorname{tg}\varphi^{III}} \\ \sec(\varphi^{I} + \varphi^{II} + \varphi^{III} + \varphi^{IV}) = \\ \dfrac{\sec\varphi^{I} \cdot \sec\varphi^{II} \cdot \sec\varphi^{III} \cdot \sec\varphi^{IV}}{1 - \operatorname{tg}\varphi^{I} \cdot \operatorname{tg}\varphi^{II} - \operatorname{tg}\varphi^{I} \cdot \operatorname{tg}\varphi^{III} \ldots - \operatorname{tg}\varphi^{III} \cdot \operatorname{tg}\varphi^{IV} + \operatorname{tg}\varphi^{I} \cdot \operatorname{tg}\varphi^{II} \cdot \operatorname{tg}\varphi^{III} \cdot \operatorname{tg}\varphi^{IV}} \end{cases}$$

779. Setzt man der Kürze halber: $\sec\varphi^{I} = s^{I}$ rc., und wie vorher: $\tan\varphi^{I} = t^{I}$ rc., so ist allgemein:

$$\sec.\left[\varphi^{I} + \varphi^{II} + \ldots \varphi^{(2n)}\right] = \frac{s^{I} \cdot s^{II} \cdot s^{III} \ldots s^{(2n-1)} \cdot s^{2n}}{1 - \overset{(2)}{\Sigma}_{(2n)} t + \overset{(4)}{\Sigma}_{(2n)} t - \ldots \pm \overset{(2n)}{\Sigma}_{(2n)} t}$$

und

$$\sec\left[\varphi^{I} + \varphi^{II} + \ldots \varphi^{(2n+1)}\right] = \frac{s^{I} \cdot s^{II} \cdot s^{III} \ldots s^{(2n)} \cdot s^{(2n+1)}}{1 - \overset{(2)}{\Sigma}_{(2n+1)} t + \overset{(4)}{\Sigma}_{(2n+1)} t - \ldots \pm \overset{(2n)}{\Sigma}_{(2n+1)} t}$$

780. In jedem Vielecke von gerader Seitenzahl ist das Produkt aus den Secanten aller Winkel um die Einheit größer als der Ueberschuß, welchen die Summe der 4nionen Producte der Tangenten dieser Winkel über die Summe der $(4n + 2)$ionen Produkte dieser Tangenten hat.

781. In jedem Vielecke von ungerader Seitenzahl dagegen ist das Produkt aus den Secanten aller Winkel um die Einheit kleiner als der Ueberschuß der Summe aller $(4n + 2)$ionen Produkte der Tangenten über die Summe aller 4nionen Produkte derselben.

782.

$$\sin\left[\varphi^{I} + \varphi^{II} + \varphi^{III} \ldots \varphi^{(2n)}\right] = \frac{\overset{(1)}{\Sigma}_{(2n)} t - \overset{(3)}{\Sigma}_{(2n)} t + \ldots \pm \overset{(2n-1)}{\Sigma}_{(2n)} t}{\sec\varphi^{I} \cdot \sec\varphi^{II} \ldots \sec\varphi^{(2n)}}$$

783. Wenn drei Bogen α, β, γ in solcher gegenseitigen Beziehung stehen, daß

$$\sin\alpha = \frac{(1 + \cos\gamma)\sin\beta \cdot \cos\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma}}$$

so ist stets:

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\beta - \cos\gamma \cdot \sin^2\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\beta \cdot \sin^2\gamma}}$$

und umgekehrt.

784.

$$\begin{cases} \sin\alpha \cdot \sin\gamma + \sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\gamma + \beta) \\ \sin\alpha \cdot \sin\gamma - \sin\beta \cdot \sin(\alpha - \beta + \gamma) = \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\gamma - \beta) \end{cases}$$

785. In jedem Dreieck ist:

$$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$
$$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C$$
$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$$

und daher auch:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$$

786. In jedem Dreiecke ist, der oben (A. 687) angegebenen Bezeichnung zufolge:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$
$$= \frac{a+b}{2(\sin A + \sin B)} = \frac{a+c}{2(\sin A + \sin C)} = \frac{b+c}{2(\sin B + \sin C)}$$
$$= \frac{a+b+c}{2(\sin A + \sin B + \sin C)}$$
$$= \frac{a-b}{2(\sin A - \sin B)} = \frac{a-c}{2(\sin A - \sin C)} = \frac{b-c}{2(\sin B - \sin C)}$$
$$= \frac{a+b-c}{2(\sin A + \sin B - \sin C)} = \frac{a-b+c}{2(\sin A - \sin B + \sin C)} = \frac{-a+b+c}{2(-\sin A + \sin B + \sin C)}$$
$$= \frac{abc}{4\,\Delta}$$

787. $$r = \frac{a}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} B + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C} = \frac{b}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C}$$
$$= \frac{c}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B}$$
$$= \frac{a \sin \frac{1}{2} B . \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{b \cdot \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} B}$$
$$= \frac{c \cdot \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C}$$
$$= \frac{2 R \cdot \sin A \cdot \sin \frac{1}{2} B \cdot \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{2 R \sin B \cdot \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} B}$$
$$= \frac{2 R \sin C \cdot \sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C}$$
$$= 4 R \sin \tfrac{1}{2} A \cdot \sin \tfrac{1}{2} B \cdot \sin \tfrac{1}{2} C$$

788. $$r^{I} = \frac{a}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B + \operatorname{tg} \frac{1}{2} C} = \frac{a \cdot \cos \frac{1}{2} B \cdot \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A}$$
$$= 4 R \cdot \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$r^{II} = \frac{b}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} C} = \frac{b \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} B}$$
$$= 4 R \sin \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$r^{III} = \frac{c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} B} = \frac{c \cdot \cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C}$$
$$= 4 R \sin \tfrac{1}{2} C \cdot \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B$$

789. $$r^{I} + r^{II} + r^{III} = R(3 + \cos A + \cos B + \cos C)$$
A. 730, Zus. 3.

790. $r^{I} + r^{II} + r^{III} = r + 4R$ d. h. die Summe der Halbmesser der drei äußern Berührungskreise jedes Dreiecks ist gleich der Summe des Radius vom innern Berührungskreise und des doppelten Durchmessers von dem um das Dreieck beschriebenen Kreis.

A. 789. — A. 727, Zus. 1. — A. 787.

791. In jedem Dreiecke ist:

$$a \cos B \cos C + b \cos A \cos C + c \cos A \cos B = \tfrac{1}{2} (a \cos A + b \cos B + c \,.\, \cos C)$$

792. Sind D, E, F die Fußpuncte der Höhenperpendikel eines Dreiecks, so daß diese letztern selbst durch AD, BE, CF dargestellt werden, und bezeichnet man den Höhendurchschnitt mit H, so ist:

1) $AD = 2R \sin B \,.\, \sin C$
2) $BE = 2R \,.\, \sin A \,.\, \sin C$
3) $CF = 2R \sin A \,.\, \sin B$
4) $AH = 2R \cos A$
5) $BH = 2R \cos B$
6) $CH = 2R \cos C$
7) $DH = 2R \cos B \,.\, \cos C$
8) $EH = 2R \cos A \,.\, \cos C$
9) $FH = 2R \cos A \,.\, \cos B$
10) $DE = 2R \sin C \,.\, \cos C = c \,.\, \cos C = R \sin 2C$
11) $DF = 2R \sin B \cos B = b \,.\, \cos B = R \,.\, \sin 2B$
11) $EF = 2R \,.\, \sin A \,.\, \cos A = a \,.\, \cos A = R \,.\, \sin 2A$

793. Für jedes Dreieck ist:

$$2R^2 \,.\, \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C = \triangle = 4 Rr \cos \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos \tfrac{1}{2} B \,.\, \cos \tfrac{1}{2} C$$

794. Bleibt dieselbe Bezeichnung wie in 792, so ist:

$$\begin{aligned} R \,.\, (DE + DF + EF) &= R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \\ &= 4R^2 \,.\, \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C \\ &= 2 \triangle \end{aligned}$$

d. h. der doppelte Flächenraum jedes spitzwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus dem Umfange des Dreiecks, das durch die Fußpuncte der drei Höhenperpendikel bestimmt wird, und aus dem Halbmesser des um das Urdreieck beschriebenen Kreises.

Zus. Daher ist auch:

$$R = \frac{2\triangle}{a \cos A + b \cos B + c \,.\, \cos C}$$

795. Beschreibt man um das Dreieck DEF, welches durch die Fußpuncte der Höhenperpendikel bestimmt wird, einen Kreis, so ist dessen Radius:

$$\frac{EF}{2 \sin EDF} = \frac{R \sin 2A}{2 \sin 2A} = \frac{R}{2}$$

d. h. er ist halb so groß, als der Halbmesser des um das Urdreieck beschriebenen Kreises.

796. Beschreibt man dagegen einen Kreis in das genannte Dreieck DEF, und bezeichnet seinen Radius mit ρ, so ist:

$$\rho = \frac{DE}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = 2R \,.\, \cos A \cos B \cos C.$$

797. Für jedes Dreieck ist:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \frac{\rho}{R}$$

A. 732, Zus. 2. — A. 796.

798. Für jedes Dreieck ist:

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 + 2 \sin \tfrac{1}{2} A \,.\, \sin \tfrac{1}{2} B \,.\, \sin \tfrac{1}{2} C$$

A. 727, Zus. 1.

Zus. Daher ist auch stets:

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 + \frac{r}{2R}$$

$$= \frac{r^{I} + r^{II} + r^{III}}{2R}$$

A. 790.

799. Für jedes Dreieck ist:

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin\tfrac{1}{2}A \cdot \sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}C$$

800. Für jedes Dreieck ist:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R + r}{R}$$

A. 727, Zus. 1.

801. In jedem Dreiecke ist:

$$\sec A \cdot \sec B + \sec A \sec C + \sec B \cdot \sec C = 2\,\frac{R + r}{\rho}$$

802. $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,\Delta}$

803. $\dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{r\,(a + b + c)}$

804. $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$

805. $a + b : c = \cos\tfrac{1}{2}(A - B) : \sin \dfrac{C}{2}$

806. $a - b : c = \sin\tfrac{1}{2}(A - B) : \cos \dfrac{C}{2}$

807. Zieht man in einem Dreieck ABC das aus der Ecke A auslaufende Höhenperpendikel, bezeichnet die Segmente der Gegenseite a zwischen dem Fußpuncte der Senkrechten und den Ecken B und C beziehungsweise mit a^{I} und a^{II}, so ist:

$$a : a^{II} - a^{I} = \sin A : \sin (B - C)$$

Frage: Wie ändert sich unser Satz, wenn einer der beiden Winkel B, oder C ein stumpfer ist und mithin das zur Seite a gehörige Höhenperpendikel nicht diese selbst, sondern deren Verlängerung trifft?

808. Unter derselben Voraussetzung ist auch:

$$b + c : a^{II} - a^{I} = \cos\tfrac{1}{2}A : \sin\tfrac{1}{2}(B - C)$$

und $b - c : a^{II} - a^{I} = \sin\tfrac{1}{2}A : \cos\tfrac{1}{2}(B - C)$

Frage: Erleiden unsere beiden Sätze wesentliche Veränderungen, wenn einer der beiden Winkel B, C stumpf ist?

809. $(\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2 = 4 \sin^2 \dfrac{C}{2}$

810. $\left(\dfrac{a + b + c}{2}\right)^2 = ab \cdot \cos^2 \dfrac{C}{2} + ac \cdot \cos^2 \dfrac{B}{2} + bc \cdot \cos^2 \dfrac{A}{2}$

811. Für jedes nicht gleichseitige Dreieck ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}A \cdot \sin\tfrac{1}{2}B \cdot \sin\tfrac{1}{2}C < \frac{1}{8}$$

A. 787.

812. Für jedes nicht gleichseitige Dreieck ist:

$$\cos A + \cos B + \cos C < \frac{3}{2}$$

A. 800.

813. Für jedes nicht gleichseitige Dreieck ist:

$$\sin A + \sin B + \sin C > \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

A. 811.

814. Verbindet man den Halbirungspunct D der Seite a eines Dreiecks ABC mit ihrer Gegenecke A, und bezeichnet W. BAD mit A^{I}, W. CAD aber mit A^{II}, so ist:

$$\tan \tfrac{1}{2}(A^{I} - A^{II}) = \frac{b - c}{b + c} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A$$

Frage: Wie folgt aus diesem Satze, daß in einem gleichschenkeligen Dreiecke, der Winkel an der Spitze durch die nach dem Halbirungspuncte der Grundlinie gezogene Gerade halbirt wird?

Zus. Daher ist auch:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A^{I} - A^{II}) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B - C) \cdot \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} A.$$

815. Unter eben dieser Voraussetzung ist auch:

$$\cot A^{I} - \cot A^{II} = \cot B - \cot C$$

Zus. Verbindet man daher in einem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck den Halbirungspunct eines der Schenkel mit der Spitze des Gegenwinkels, so wird letzterer in zwei solche Stücke getheilt, daß die Cotangente des kleinern um den Radius größer ist als die Cotangente des andern.

816. Verbindet man die Halbirungspuncte aller drei Seiten mit ihren Gegenecken, so werden die Winkel dadurch so getheilt, daß die Summe der Cotangenten von drei solchen, die keinen gemeinschaftlichen Schenkel haben, gleich der Summe der Cotangenten der drei übrigen ist, also:

$$\cot A^{I} + \cot B^{I} + \cot C^{I} = \cot A^{II} + \cot B^{II} + \cot C^{II} = 3(\cot A + \cot B + \cot C)$$

817. Es ist ferner:

$$\cot A^{I} - \cot A^{II} = \cot B^{I} - \cot C^{II}$$
$$\cot B^{I} - \cot B^{II} = \cot C^{I} - \cot A^{II}$$
$$\cot C^{I} - \cot C^{II} = \cot A^{I} - \cot B^{II}$$

818. $\cot A^{I} + \cot C^{II} = \cot B^{I} + \cot A^{II} = \cot C^{I} + \cot B^{II} = \tfrac{2}{3}(\cot A^{I} + \cot B^{I} + \cot C^{I}) = 2(\cot A + \cot B + \cot C)$

819. Die Halbirungspuncte der Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC seien beziehungsweise D, E, F, der gemeinschaftliche Durchschnittspunct aber der ihnen zugehörigen Transversalen G; alsdann ist:

$$\cot BGD - \cot CGD = \cot B - \cot C$$
$$\cot CGE - \cot AGF = \cot C - \cot A$$
$$\cot AGF - \cot BGF = \cot A - \cot B$$

820. Unter eben diesen Voraussetzungen ist:

$$\cot ADB - \cot ADC = \cot C - \cot B$$
$$\cot BEC - \cot BEA = \cot A - \cot C$$
$$\cot CFA - \cot CFB = \cot B - \cot A$$

821. Die vier vorhergehenden, in 815, 817, 819 und 820 enthaltenen, Sätze lassen sich in folgenden allgemeinern Lehrsatz zusammenfassen:

Zieht man in einem Dreieck diejenigen Transversalen, welche die Dreiecksseiten halbiren, so sind je fünf derjenigen Winkelpaare, welche bildet:

a) eine der Transversalen mit den beiden Dreiecksseiten, von deren gemeinschaftlichem Endpuncte sie ausläuft,

b) eben diese Transversale mit der dritten Dreiecksseite,

c) eben diese Transversale mit den beiden andern Transversalen,

d) die Seite, nach welcher die in Rede stehende Transversale gezogen ist, mit den beiden andern Seiten,

e) eben diese Seite mit den beiden andern Transversalen

von solcher Beschaffenheit, daß die Unterschiede der Cotangenten je zweier zu demselben Paare gehöriger Winkel gleich sind.

Zus. Bezeichnet man also die Seiten eines Dreiecks mit 1, 2, 3, die nach ihren Halbirungspuncten gezogenen Transversalen aber beziehungsweise mit 1′, 2′, 3′, den Winkel endlich, den irgend zwei dieser sechs Linien bilden z. B. die Linien 1 und 1′ mit (1, 1′) und auf ähnliche Weise alle übrigen, so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cot(1', 2) - \cot(1', 3) &= \cot(1, 1') - \cot[180^\circ - (1, 1')] \\ &= \cot(1', 3') - \cot(1', 2') \\ &= \cot(1, 2) - \cot(1, 3) \\ &= \cot(1, 3') - \cot(1, 2')\end{aligned}$$

und ähnliche Gleichungen für die zehn übrigen Winkelpaare.

822. Eine noch weitere Verallgemeinerung des Vorhergehenden bildet folgender Lehrsatz. Zieht man durch den Halbirungspunct einer gegebenen begränzten Geraden unter einem beliebigen Winkel eine andere unbegränzte Gerade, schneidet auf letzterer von dem Halbirungspuncte der erstern aus Stücke ab, die in Rücksicht ihrer Länge eine geometrische Progression mit dem Exponenten 3 bilden, und verbindet alle diese Durchschnittspuncte mit beiden Endpuncten der begränzten Geraden, so haben die Winkel, welche jedes dieser Linienpaare sowohl mit der begränzten, als unbegränzten Geraden bildet, die Eigenschaft, daß der Unterschied ihrer Cotangenten eine constante Größe ist, nämlich doppelt so groß als die Cotangente des Winkels, unter welchem die beiden in Rede stehenden Geraden sich schneiden.

823. Verbindet man die Halbirungspuncte zweier Dreiecksseiten mit ihren Gegenecken, so ist die Cotangente des Winkels, unter welchem sich diese beiden Transversalen schneiden, dreimal so klein als der Ueberschuß, welchen die doppelte Summe der Cotangenten von den beiden Winkeln, nach deren Spitzen die Transversalen gezogen sind, über die Cotangente des dritten Winkels hat; also nach der in 819 angenommenen Bezeichnung:

$$\cot AGF = \frac{2 \cot A + 2 \cot C - \cot B}{3}$$

$$\cot BGD = \frac{2 \cot A + 2 \cot B - \cot C}{3}$$

$$\cot CGE = \frac{2 \cot B + 2 \cot C - \cot A}{3}$$

Zus. $\cot CGD + \cot BGD = \frac{1}{3} (\cot A' + \cot A'')$

824. Zieht man von der Ecke A aus in einem Dreieck ABC die beiden Transversalen, von denen eine diesen Winkel und die andere seine Gegenseite halbirt, und nennt den Winkel, den beide mit einander bilden, z, so ist:

$$\tan z = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (B - C) \,.\, \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}$$

825. $4 \triangle = (a + b + c)^2 \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} C$

826. $$\frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\cot \frac{1}{2} A + \cot \frac{1}{2} B + \cot \frac{1}{2} C}{\cot A + \cot B + \cot C} = \frac{\cot \frac{1}{2} A \,.\, \cot \frac{1}{2} B \,.\, \cot \frac{1}{2} C}{\cot A + \cot B + \cot C}$$

Bezeichnet J den Mittelpunct des innern Berührungskreises eines Dreiecks ABC, J^I, J^{II}, J^{III} aber die Mittelpuncte der drei äußern Berührungskreise, deren Radien beziehungsweise r^I, r^{II}, r^{III} sind (vergleiche N. 678), so ist:

827. $$\begin{cases} AJ = 4 R \sin \frac{1}{2} B \,.\, \sin \frac{1}{2} C \\ BJ = 4 R \sin \frac{1}{2} A \,.\, \sin \frac{1}{2} C \\ CJ = 4 R \sin \frac{1}{2} A \,.\, \sin \frac{1}{2} B \end{cases}$$

828. $AJ \,.\, BJ \,.\, CJ = 4 R r^2$

829. $$\begin{cases} AJ^I = 4 R \,.\, \cos \frac{1}{2} B \,.\, \cos \frac{1}{2} C \\ BJ^{II} = 4 R \,.\, \cos \frac{1}{2} A \,.\, \cos \frac{1}{2} C \\ CJ^{III} = 4 R \,.\, \cos \frac{1}{2} A \,.\, \cos \frac{1}{2} B \end{cases}$$

830. $AJ^I \,.\, BJ^{II} \,.\, CJ^{III} = (a + b + c)^2 \,.\, R$

831. $\begin{cases} JJ^{I} = 4\,R\,.\,\sin\frac{1}{2}\,A \\ JJ^{II} = 4\,R\,.\,\sin\frac{1}{2}\,B \\ JJ^{III} = 4\,R\,.\,\sin\frac{1}{2}\,C \end{cases}$

832. $JJ^{I}\,.\,JJ^{II}\,.\,JJ^{III} = 16\,R^2\,r$

833. $AJ\,.\,BJ\,.\,CJ = JJ^{I}\,.\,JJ^{II}\,.\,JJ^{III}\,.\,\sin\frac{1}{2}\,A\,.\,\sin\frac{1}{2}\,B\,.\,\sin\frac{1}{2}\,C$

834. $\begin{cases} AJ^{III} = 4\,R\,\sin\frac{1}{2}\,C\,.\,\cos\frac{1}{2}\,B \\ BJ^{I} = 4\,R\,\sin\frac{1}{2}\,A\,.\,\cos\frac{1}{2}\,C \\ CJ^{II} = 4\,R\,\sin\frac{1}{2}\,B\,.\,\cos\frac{1}{2}\,A \\ AJ^{II} = 4\,R\,.\,\sin\frac{1}{2}\,B\,\cos\frac{1}{2}\,C \\ BJ^{III} = 4\,R\,.\,\sin\frac{1}{2}\,C\,\cos\frac{1}{2}\,A \\ CJ^{I} = 4\,R\,.\,\sin\frac{1}{2}\,A\,.\,\cos\frac{1}{2}\,B \end{cases}$

835. $AJ^{II}\,.\,BJ^{III}\,.\,CJ^{I} = AJ^{III}\,.\,BJ^{I}\,.\,CJ^{II} = 4\,R\,.\,\Delta = abc$

836. $\begin{cases} J^{I}J^{II} = 4\,R\,.\,\cos\frac{1}{2}\,C \\ J^{I}J^{III} = 4\,R\,.\,\cos\frac{1}{2}\,B \\ J^{II}J^{III} = 4\,R\,.\,\cos\frac{1}{2}\,A \end{cases}$

837. $J^{I}J^{II}\,.\,J^{I}J^{III}\,.\,J^{II}J^{III} = 8\,(a + b + c)\,R^2$

838. $r^{I}\,.\,r^{II}\,.\,r^{III} = \frac{1}{2}\,(a + b + c)\,.\,\Delta$

A. 788.

839. $r\,.\,r^{I}\,.\,r^{II}\,.\,r^{III} = \Delta^2$

840. $r\,(\sin A + \sin B + \sin C) = r^{I}\,(-\sin A + \sin B + \sin C)$
$= r^{II}\,(\sin A - \sin B + \sin C)$
$= r^{III}\,(\sin A + \sin B - \sin C)$

841. Beschreibt man die vier Berührungskreise eines Dreiecks, verbindet die Berührungspuncte eines jeden unter sich durch gerade Linien, und bezeichnet die vier so erhaltenen Dreiecke mit δ, δ^{I}, δ^{II}, δ^{III}, nämlich mit δ das dem innern Berührungskreis zugehörige, mit δ^{I} aber dasjenige, um welches der erste äußere Berührungskreis, dessen Radius wir bisher mit r^{I} bezeichneten, beschrieben ist ꝛc., so ist:

$$\delta = \frac{r}{2\,R}\,.\,\Delta,\quad \delta^{I} = \frac{r^{I}}{2\,R}\,.\,\Delta,\quad \delta^{II} = \frac{r^{II}}{2\,R}\,\Delta,\quad \delta^{III} = \frac{r^{III}}{2\,R}\,\Delta$$

A. 840.

842. Für jedes Dreieck ist daher:

$$\delta^{I} + \delta^{II} + \delta^{III} = \delta + 2\,\Delta$$

A. 790.

843. $\begin{cases} r^{I} + r^{II} = 4\,R\,\cos^2\frac{C}{2} \\ r^{I} + r^{III} = 4\,R\,.\,\cos^2\frac{B}{2} \\ r^{II} + r^{III} = 4\,R\,.\,\cos^2\frac{A}{2} \end{cases}$

Zus. $r^{I} + r^{II} + r^{III} = r + 4\,R$

A. 798.

Anmerkung. Man vergleiche den früher in A. 789 angedeuteten Beweis desselben bemerkenswerthen Satzes.

844. Für ein in A rechtwinkeliges Dreieck hat man:

a) $r^{II} + r^{III} = 2\,R$, also
auch $r^{I} + r^{II} + r^{III} = r^{I} + 2\,R = r + 4\,R$, oder

b) $r^{I} = r + 2\,R$, und deshalb

c) $r^{I} = r + r^{II} + r^{III}$

A. 843.

Anmerkung. Man vergleiche A. 122.

845. Ist der Winkel A eines Dreiecks ABC ein Rechter, und der Winkel B doppelt so groß als C, so ist:

$$r^{II} + r^{III} = 2\ R$$
$$r^{I} + r^{III} = 3\ R$$
$$r^{I} = r^{II} + R = r + 2\ R$$
$$r^{II} = R + r$$
$$r^{III} = R - r$$

846. Sind D, E, F die Fußpuncte der Höhenperpendikel eines spitzwinkeligen Dreiecks, so ist:

$$\triangle\ DEF = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \triangle$$

A. 793. — A. 795.

Frage: Wie folgt aus unserm Satze, daß in einem gleichseitigen Dreieck:

$$\triangle = 4 \cdot \triangle\ DEF?$$

Zus. Daher ist auch:

$$\triangle : \triangle\ DEF = R : \rho$$

A. 796.

847. Nimmt man auf jeder der Seiten eines Dreiecks ABC, oder auf ihrer Verlängerung einen beliebigen Punct, verbindet denselben mit der Gegenecke und bezeichnet die eine Ternion der getrennten Seitenstücke (A. 354) mit a^I, b^I, c^I, die andere mit a^{II}, b^{II}, c^{II}, ihre Gegenwinkel aber beziehungsweise mit A^I, B^I, C^I, und A^{II}, B^{II}, C^{II}, so ist:

$$a^I \cdot b^I \cdot c^I : a^{II} \cdot b^{II} \cdot c^{II} = \sin A^I \cdot \sin B^I \cdot \sin C^{II} = \sin A^{II} \cdot \sin B^{II} \cdot C^{II}$$

Zus. 1. Daher ist für den Fall, wo die drei Transversalen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, $\sin A^I \cdot \sin B^I \cdot \sin C^I = \sin A^{II} \cdot \sin B^{II} \cdot \sin C^{II}$

Zus. 2. Umgekehrt, zieht man in einem Dreieck drei Transversalen so, daß

$$\sin A^I \cdot \sin B^I \cdot \sin C^I = \sin A^{II} \cdot \sin B^{II} \cdot \sin C^{II}$$

so haben dieselben bei hinreichender Verlängerung einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Zus. 3. Einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct in jedem Dreieck haben daher:

a) die drei Geraden, welche die innern Winkel halbiren,
b) je drei solche Gerade, von denen zwei zwei Außenwinkel halbiren, die dritte den nicht anliegenden innern Winkel;
c) die Höhenperpendikel jedes Dreiecks.

848. Zieht man in einem Dreieck drei Transversalen so, daß sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben und zugleich $A^I = B^I = C^I$, oder $A^{II} = B^{II} = C^{II}$ (A. 546), so hat der Winkel A^I im erstern Fall dieselbe Größe, wie A^{II} im zweiten Fall; es ist nämlich

$$\cot g\ A^I = \cot g\ A^{II} = \cot g\ A + \cot g\ B + \cot g C$$

A. 198, Zus. 1. — A. 802.

Zus. Unter dieser Voraussetzung ist daher auch:

$$\operatorname{cosec}^2 A^I = \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C$$

849. Zieht man außer einer der beiden im vorigen Satze genannten Ternionen von Scheitellinien noch eine zweite, und zwar so, daß je zwei von derselben Ecke auslaufende Transversalen einen Winkel (φ) von derselben Größe mit einander bilden, so ist, wenn man die gegenseitigen Durchschnittspuncte dieser zweiten Ternion mit G, H, J, den Winkel A^I, B^I, C^I der ersten aber mit α, bezeichnet:

$$\triangle\ GHJ = \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}\right)^2 \cdot \triangle$$

850. Zieht man außer der im vorvorigen Satze näher bezeichneten Ternion noch zwei andere, von denen die zu der einen gehörigen Linien einzeln senkrecht auf den zur ersten gehörigen stehen, die der dritten aber senkrecht auf den Seiten des Urdreiecks, und jede Ternion bis zum gegenseitigen Durchschnitt verlängert, so ist das von der zweiten gebildete Dreieck um das Urdreieck größer, als das von der dritten gebildete.

A. 849.

851. Zieht man in einem Dreieck drei Transversalen so, daß jede mit dem von

eben dieser Ecke auslaufenden Höhenperpendikel einen Winkel von derselben Größe (ω) bildet, und bezeichnet die Durchschnittspuncte je zweier dieser Transversalen mit G, H, J, so ist:

$$\triangle\ GHJ = 4\ \sin^2 \varphi\ .\ \triangle$$

Zus. Diejenigen Transversalen eines Dreiecks daher, welche die Gegenseiten der Ecken, von denen sie auslaufen, unter Winkeln von 60° schneiden, bilden ein Dreieck, welches dem Urdreieck congruent ist.

852. In jedem Viereck wird durch das Product zweier zugeordneten Seiten und des Sinus von dem Winkel, unter welchem sie sich (verlängert) schneiden, der doppelte Flächenunterschied der beiden Dreiecke dargestellt, welche die beiden andern Paare zugeordneter Seiten bilden.

A. 229.

Zus. 1. Daher wird der Flächenraum eines jeden Vierecks dargestellt durch die Hälfte des Productes aus seinen Diagonalen und dem Sinus des Winkels, unter welchem sie sich schneiden.

Zus. 2. Jedes Parallelogramm wird durch die beiden Diagonalen in vier gleichflächige Dreiecke zerlegt.

853. Zieht man von jeder Ecke eines Dreiecks aus zwei Gerade so, daß sie mit den von eben dieser Ecke auslaufenden Dreiecksseiten gleiche Winkel bilden (CAJ = BAK, ACJ = BCH, CBH = KBA Fig. 156), verlängert je zwei von den Endpuncten derselben Dreiecksseite ausgehende Gerade bis zum gegenseitigen Durchschnitt, und verbindet diese Puncte mit den ihnen gegenüberstehenden Ecken des Urdreiecks, so haben diese drei Verbindenden stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, und außerdem ist:

$$AJ\ .\ BK\ .\ CH = AK\ .\ BH\ .\ CJ.$$

854. Erklärung. Die Winkel, welche die Seiten eines Vielecks mit einer in dessen Ebene gezogenen festen Axe bilden, kann man offenbar dadurch erhalten, daß man durch sämmtliche Spitzen des Vielecks Parallelen mit dieser Axe zieht. Aber jede dieser Parallelen schneidet in der Spitze, durch welche sie gezogen ist, zwei Vielecksseiten und bildet mit jeder derselben vier im Allgemeinen an Größe verschiedene Winkel (wenn man nämlich die außerstumpfen und außerspitzen Winkel mit in Betracht zieht). Mit Recht entsteht daher die Frage, welcher von den acht an jeder Vielecksspitze gebildeten Winkeln ist es, dem man den Vorzug vor den übrigen geben muß, wenn man zuletzt soll behaupten dürfen, man sei bei der Bestimmung der Winkel, welche die Vielecksseiten mit der festen Axe bilden, mit vollkommener und durchgängiger Gleichförmigkeit zu Werke gegangen? Zu diesem Ende muß man zuvörderst unterscheiden den Anfangspunct und den Endpunct jeder Seite. Hätte man z. B. das beliebige Vieleck ABC .... MN, in welchem die auf einander folgenden Seiten AB, BC, CD ..., MN, NA sind, und betrachtete A als den Anfangspunct der Seite AB, so wäre B der Endpunct eben dieser Seite, aber zugleich auch der Anfangspunct der nächst folgenden BC, u. s. f., so daß A, B, C, D .... M, N die respectiven Anfangspuncte der ersten, zweiten, dritten ...... letzten Seite, dagegen B, C, D .... M, N, A die Endpuncte eben dieser Seiten sind. Die Gleichmäßigkeit fordert es nun offenbar, daß man die Parallelen mit der Axe für sämmtliche Seiten zugleich entweder durch ihre Anfangspuncte oder durch ihre Endpuncte zieht; demnach gehört jede Parallele nur zu einer der beiden Vielecksseiten, die sie in der Spitze, durch welche sie geht, schneidet; und der gesuchte Winkel kann natürlich auch nur einer der vier sein, welche diese beiden Geraden mit einander bilden. Erklärt man ferner mit von Münchow (Trigonometrie S. 12) Winkel zweier Geraden, als die Größe derjenigen Drehung, wodurch eine durch den Scheitel nach der einen Seite begränzte Gerade in der Ebene des Winkels von der Lage des einen Winkelschenkels zur Lage des andern stets vorschreitend gelangen kann, so ist zur Erlangung vollkommener Gleichmäßigkeit auch das nothwendig, daß die die Größe der einzelnen Winkel bestimmende Drehung bei allen auf ganz gleiche Weise geschehe, indem man den mit der Axe parallelen und also für alle Winkel seiner Lage nach constanten Schenkel und zwar nach derselben Richtung z. B. aufwärts von der linken zur rechten Hand sich drehen läßt, bis er zur Lage des andern Schenkels (der Vielecksseite) gelangt. Die auf diese gleichmäßige Weise bestimmten Winkel zwischen den Seiten eines Vielecks und einer in seiner Ebene gegebenen festen Axe wollen wir der Kürze halber Axenwinkel des Vielecks nennen, und sie in Axenwinkel erster und zweiter Classe theilen, je nachdem die Anfangspuncte der Vielecksseiten oder deren Endpuncte ihre Scheitel sind. Ein Beispiel mag das Gesagte verdeutlichen. Hat man z. B. das Dreieck ABC und

die feste Axe MN (Fig. 154), so sind unter den vorher gemachten Voraussetzungen die drei Axenwinkel erster Classe, der spitze DAB, der stumpfe FBC, und der außerspitze HCA; die zweiter Classe dagegen: der außerstumpfe FBA, der außerspitze HCB, und der stumpfe DAC. Hätte man festgesetzt, daß die die Größe der Winkel bestimmende Drehung des mit der Axe parallelen Schenkels zwar wie vorher auch von der linken zur rechten, aber nicht aufwärts, sondern niederwärts erfolgen solle, so würden die Axenwinkel erster Classe gewesen sein: der außerspitze DAB, der außerstumpfe FBC und der spitze HCA; die Axenwinkel zweiter Classe aber: der stumpfe FBA, der spitze HCB, und der außerstumpfe DAC. Der Anfänger wird nun leicht zu bestimmen im Stande sein, welche von den in unserer Figur vorhandenen Winkeln die Axenwinkel der einen und andern Classe gebildet hätten, wenn man der Drehung der mit der Axe parallelen Schenkel die Richtung von der rechten zur linken Hand und zwar entweder aufwärts oder unterwärts vorgeschrieben hätte.

Anmerkung. Viele Untersuchungen über Axenwinkel verlieren an Allgemeinheit gar nichts, wenn man sich dabei blos auf eine Classe z. B. die erste beschränkt; denn die Art, wie jeder Axenwinkel der einen Classe von seinem entsprechenden der andern abhängt, ist so einfach, daß man in den meisten Fällen Ausdrücke, welche Eigenschaften von Winkeln der einen Classe darstellen, mit der größten Leichtigkeit so umformen kann, daß sie für die Axenwinkel der andern Classe gelten. Ist nämlich in unserer Fig. 154 W. DAB Axenwinkel erster Classe für die Seite AB, so ist der zweiter Classe für eben diese Seite der außerstumpfe FBA, also, bezeichnen wir den erstern mit α, den andern mit β, $\beta = 2\,R + \alpha$; wenn dagegen α = dem außerspitzen DAB, so wäre $\beta = FBA = -(2\,R - \alpha)$, wäre $\alpha = BAE$, so hätte man β = dem außerspitzen $GBA = 2\,R + \alpha$, und wenn endlich α = dem außerstumpfen EAB, so ist β = dem spitzen $GBA = -(2\,R - \alpha)$, also in allen vier Fällen $\sin\alpha = -\sin\beta$, und $\cos\alpha = -\cos\beta$. Dasselbe läßt sich auf dieselbe Weise für die übrigen Seiten beweisen. Also nichts weiter als eine Umkehrung der Vorzeichen der einzelnen Glieder ist nöthig, um Ausdrücke, in denen die Sinusse und Cosinusse von Axenwinkeln der einen Classe vorkommen, in die entsprechenden für die Axenwinkel der andern Classe geltenden zu verwandeln. Es wird daher auch in den folgenden Sätzen immer nur von den Axenwinkeln der ersten Classe die Rede sein, wie wir außerdem die anfänglich gemachte Voraussetzung beibehalten, nach welcher diese Winkel als durch eine Drehung der mit der Axe parallelen Schenkel von der linken zur rechten Hand hin aufwärts entstanden betrachten werden

855. In jedem Dreieck ist die Summe der Producte, von denen jedes eine Seite und den Sinus des zugehörigen Axenwinkels (erster Classe) zu Factoren hat, gleich Null, also wenn die Seiten durch a_1, a_2, a_3, die zugehörigen Axenwinkel respective durch α_1, α_2, α_3 bezeichnet werden, so ist immer:

$$a_1 \,.\, \sin\alpha_1 + a_2 \,.\, \sin\alpha_2 + a_3 \,.\, \sin\alpha_3 = 0$$

Beweis. Fälle aus den Endpuncten der Seiten Senkrechte auf die durch ihre Anfangspuncte mit der Axe gezogenen Parallelen, hier BK, CL, AO; nun ist offenbar:

$$AO = BK + CL$$
$$a_3 \,.\, \sin ACO = a_1 \sin BAK + a_2 \sin CBL$$
$$-a_3 \sin\alpha_3 = a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2$$
$$\text{also } a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 = 0$$

Zus. 1. Sind β_1, β_2, β_3 die den Seiten a_1, a_2, a_3 zugehörigen Axenwinkel zweiter Classe, so ist: $a_1 \sin\beta_1 + a_2 \sin\beta_2 + a_3 \sin\beta_3 = 0$.

Zus. 2. Steht eine der Dreiecksseiten z. B. a_1 senkrecht auf der Axe, so wird sie durch das zu ihr gehörige Höhenperpendikel in zwei Segmente getheilt, von denen das eine, an a_2 angränzende $= -a_2 \sin\alpha_2$, und das andere $= -a_3 \sin\alpha_3$ ist.

856. In jedem Dreieck ist die Summe der Producte, von denen jedes eine der Seiten und den Cosinus des zugehörigen Axenwinkels zu Factoren hat, gleich Null, also, nach der vorher eingeführten Bezeichnung:

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 = 0.$$

Beweis. Zieht man auf die gegebene Axe eine zweite senkrecht, und bezeichnet die zu ihr gehörigen Axenwinkel der Dreiecksseiten mit γ_1, γ_2, γ_3, so ist:

$a_1 \sin\gamma_1 + a_2 \sin\gamma_2 + a_3 \sin\gamma_3 = 0$, aber es ist nun immer entweder $\gamma_1 = \alpha_1 \pm 90^0$ oder $\gamma_1 = \alpha_1 \mp 270^0$, und dasselbe gilt von γ_2 und γ_3, also jedenfalls

$$\sin\gamma_1 = \pm\cos\alpha_1,\ \sin\gamma_2 = \pm\cos\alpha_2,\ \sin\gamma_3 = \pm\cos\alpha_3,$$

so daß in allen drei Gleichungen zugleich entweder die obern oder die untern Vorzeichen gelten, also auch:

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 = 0.$$

Zus. In jedem Dreieck ist daher:

$a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 = a_1 \sin\beta_1 + a_2 \sin\beta_2 + a_3 \sin\beta_3 =$
$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 = a_1 \cos\beta_1 + a_2 \cos\beta_2 + a_3 \cos\beta_3$

857. In jedem neck ist die Summe der Producte, von denen jedes eine der n Seiten und den Sinus des zugehörigen Axenwinkels zu Factoren hat, gleich Null, also:

$$a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 + \ldots\ldots + a_n \sin\alpha_n = 0$$

Anleitung zum Beweise. Das gegebene neck sei ABC .... MN; durch die Diagonalen AC, AD, AE, ... AM zerlege man es in Dreiecke, wende auf jedes den in 855 erwiesenen Satz an, und addire die sämmtlichen so erhaltenen Gleichungen. Bei dieser Addition heben sich alle diejenigen Glieder, in denen die Diagonalen als Factoren erscheinen, gegenseitig auf; denn jede Diagonale gehört zwei Dreiecken als Seite an, und zwar der eine ihrer Gränzpuncte als Seitenanfangspunct dem einen und der andere dem andern Dreieck; jede Diagonale erscheint also zweimal unter jenen Factoren, und zwar das einemal multiplicirt in den Sinus ihres Axenwinkels erster Classe, das zweitemal in den Sinus des Axenwinkels zweiter Classe; die Sinusse von je zwei solchen Winkeln sind nun gleich aber entgegengesetzt (854, Anm.) rc.

858. In jedem neck ist:

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 + \ldots\ldots + a_n \cos\alpha_n = 0$$

Beweis. Wird eben so aus 856 hergeleitet, wie der Beweis des vorigen Satzes aus 855.

859. Bezeichnet man jeden der Winkel, welche eine der Seiten eines beliebigen Vielecks gleichmäßig mit allen übrigen bildet, durch die beiden den betreffenden Seiten zugehörigen Stellenzeiger, so daß z. B. der Winkel, welchen a_n und a_r mit einander bilden, durch (n,r) dargestellt wird, so ist:

$$a_1 = a_2 \cos(1,2) + a_3 \cos(1,3) + a_4 \cdot \cos(1,4) + \ldots\ldots + a_n \cos(1,n)$$
$$a_2 = a_1 \cos(1,2) + a_3 \cos(2,3) + a_4 \cos(2,4) + \ldots\ldots + a_n \cos(2,n)$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 \cos(1,n) + a_2 \cos(2,n) + \ldots\ldots + a_{n-1} \cos(n-1,n)$$

Beweis. Betrachten wir AB (Fig. 155) als Axe, so ist:

$$a_1 \cos 0 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 + a_4 \cos\alpha_4 + a_5 \cos\alpha_5 + a_6 \cos\alpha_6 = 0$$

Ist nun W. ABC = (1,2), so verlangt es die Gleichmäßigkeit, daß W. DCO = (1,3), der außerspitze QDE = (1,4), der außerspitze REF = (1,5) und der außerstumpfe SFA = (1,6), also $\alpha_2 = 180^\circ - (1,2)$, $\alpha_3 = 180^\circ - (1,3)$, $\alpha_4 = 540^\circ - (1,4)$, $\alpha_5 = 540^\circ - (1,5)$ und $\alpha_6 = 540^\circ - (1,6)$, also $\cos\alpha_2 = -\cos(1,2)$, $\cos\alpha_3 = -\cos(1,3)$, $\cos\alpha_4 = -\cos(1,4)$ u. s. w., mithin

$$a_1 = a_2 \cos(1,2) + a_3 \cos(1,3) + a_4 \cos(1,4) + a_5 \cos(1,5) + a_6 \cos(1,6)$$

und so bei jedem andern Vieleck.

860. In jedem Vieleck ist:

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 - 2a_2a_3 \cos(2,3) - 2a_2a_4 \cos(2,4) - \ldots\ldots$$
$$- 2a_{n-1}a_n \cos(n-1, n)$$

Anleitung zum Beweise. Multiplicire die n Gleichungen des vorigen Satzes respective durch $a_1, a_2, \ldots a_n$, und ziehe von der ersten die Summe der übrigen ab.

861. Bildet man aus sämmtlichen Seiten eines Vielecks die Binionenproducte, und multiplicirt jedes derselben durch den Cosinus des von den beiden Factoren gebildeten Winkels, so ist die Summe der so entstandenen Producte halb so groß als die Quadratsumme aller Seiten.

A. 860.

862. Wird jede Seite eines necks über ihren Anfangspunct hinaus verlängert, und werden die dadurch entstandenen Außenwinkel beziehungsweise durch $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots\ldots \omega_n$ bezeichnet, so daß also α_1 und ω_1 die Vielecksspitze A zum gemeinschaftlichen Scheitel u. s. w. haben, so ist stets:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \omega_2 + \alpha_1$$
$$\alpha_3 = \omega_3 + \alpha_2$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_n = \omega_n + \alpha_{n-1}$$

Zus. 1. Nimmt man eine der Vielecksseiten selbst z. B. a_n zur Axe, so wird offenbar $\alpha_1 = \omega_1$, also:

$$\alpha_1 = \omega_1$$
$$\alpha_2 = \omega_2 + \alpha_1 = \omega_2 + \omega_1$$
$$\alpha_3 = \omega_3 + \alpha_2 = \omega_3 + \omega_2 + \omega_1$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot$$
$$\alpha_n = \omega_n + \alpha_{n-1} = \omega_n + \omega_{n-1} + \omega_{n-2} + \ldots \omega_2 + \omega_1 = 360^0$$

Zus. 2. In jedem neck ist daher:

$$a_1 \sin \omega_1 + a_2 \sin(\omega_1 + \omega_2) + a_3 \sin(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + \ldots + a_{n-1} \sin(\omega_1 + \ldots + \omega_{n-1}) = 0$$
$$a_2 \sin \omega_2 + a_3 \sin(\omega_2 + \omega_3) + a_4 \sin(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4) + \ldots + a_n \sin(\omega_2 + \ldots \omega_n) = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_n \sin \omega_n + a_1 \sin(\omega_n + \omega_1) + a_2 \sin(\omega_n + \omega_1 + \omega_2) + \ldots + a_{n-2} \sin(\omega_n + \ldots \omega_{n-2}) = 0$$

Zus. 3. Eben so ist in jedem neck:

$$a_1 \cos \omega_1 + a_2 \cos(\omega_1 + \omega_2) + \ldots\ldots + a_{n-1} \cos(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}) + a_n = 0$$
$$a_2 \cos \omega_2 + a_3 \cos(\omega_2 + \omega_3) + \ldots\ldots + a_n . \cos(\omega_2 + \ldots\ldots \omega_n) + a_1 = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_n \cos \omega_n + a_1 \cos(\omega_n + \omega_1) + \ldots\ldots + a_{n-2} \cos(\omega_n + \omega_1 + \ldots\ldots \omega_{n-2}) + a_{n-1} = 0$$

Anmerkung. Die beiden in den zwei letzten Zusätzen enthaltenen bemerkenswerthen Sätze, welche man als die Grundlage der gesammten Polygonometrie ansehen kann, wurden fast gleichzeitig von Andreas Lexell in Petersburg und von Simon L'Huilier in Genf gefunden; jener machte, und zwar etwas früher als L'Huilier die gefundenen Resultate in zwei Abhandlungen bekannt, die sich unter dem Titel „de resolutione polygonorum rectilineorum" im 19ten und 20ten Bde der Novi Commentarii etc. befinden; L'Huilier gab ein selbstständiges Buch über den Gegenstand heraus, nämlich: „Polygonometrie ou de la mesure des figures rectilignes etc. Gen. et Par. 1789 in 4.

863. Bezeichnet F den Flächenraum eines Vierecks, und bleibt im Uebrigen die Bezeichnung ganz dieselbe, wie in den frühern Sätzen, so ist:

$$2\,F = a_4 \,.\, a_1 \sin \omega_1 + a_4 a_2 \,.\, \sin(\omega_1 + \omega_2) + a_1 a_2 \sin \omega_2$$
$$= a_1 a_2 \sin \omega_2 + a_1 a_3 \,.\, \sin(\omega_2 + \omega_3) + a_2 a_3 \sin \omega_3$$
$$= a_2 a_3 \,.\, \sin \omega_3 + a_2 a_4 \,.\, \sin(\omega_3 + \omega_4) + a_3 a_4 \sin \omega_4$$
$$= a_3 a_4 \sin \omega_4 + a_3 a_1 \,.\, \sin(\omega_4 + \omega_1) + a_4 \,.\, a_1 \,.\, \sin \omega_1$$

Anleitung zum Beweise. Es sei ABCD das Viereck; ziehe die Diagonale AC, so ist $2\,F = a_1 a_2 \sin \omega_2 + a_3 a_4 \,.\, \sin \omega_4$.

Es ist aber auch (A. 862, Zus. 2)

$$a_1 \sin \omega_1 + a_2 \sin(\omega_1 + \omega_2) + a_3 \sin(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) =$$
$$a_1 \sin \omega_1 + a_2 \sin(\omega_1 + \omega_2) - a_3 \sin \omega_4 = 0, \text{ also}$$
$$a_3 \,.\, \sin \omega_4 = a_1 \sin \omega_1 + a_2 \sin(\omega_1 + \omega_2)$$
$$a_3 a_4 \sin \omega_4 = a_4 \,.\, a_1 \sin \omega_1 + a_4 a_2 \sin(\omega_1 + \omega_2)$$
$$a_1 a_2 \sin \omega_1 + a_3 a_4 \sin \omega_4 = 2\,F = a_4 a_1 \sin \omega_1 + a_4 a_2 \sin(\omega_1 + \omega_2) + a_1 a_2 \sin \omega_2$$

Frage: Von welchem bekannten Dreieckssatze kann der vorstehende als Erweiterung angesehen werden?

864. Bezeichnet F den Flächenraum eines beliebigen Fünfecks, so ist:

$$2\,F = a_1a_2 \sin\omega_2 + a_1a_3 \sin(\omega_2+\omega_3) + a_1a_4 \sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)$$
$$+ a_2a_3 \sin\omega_3 + a_2a_4 \sin(\omega_3+\omega_4)$$
$$+ a_3a_4 \sin\omega_4$$
$$= a_2a_3 \sin\omega_3 + a_2a_4 \sin(\omega_3+\omega_4) + a_2a_5 \sin(\omega_3+\omega_4+\omega_5)$$
$$+ a_3a_4 \sin\omega_4 + a_3a_5 \sin(\omega_4+\omega_5)$$
$$+ a_4a_5 \sin\omega_5$$

etc.

Anleitung zum Beweise. Dem vorigen Satze zufolge ist offenbar:

$$2\,F = a_1a_2 \sin\omega_2 + a_1a_3 \sin(\omega_2+\omega_3) + a_2a_3 \sin\omega_3 + a_4a_5 \sin\omega_5$$

Es ist aber auch (862, Zus. 1)

$$a_5 \sin\omega_5 + a_1 \sin(\omega_5+\omega_1) + a_2 \sin(\omega_5+\omega_1+\omega_2) + a_3 \sin(\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3) =$$
$$a_5 \sin\omega_5 - a_1 \sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4) - a_2 \sin(\omega_3+\omega_4) - a_3 \sin\omega_4 = 0,$$

also:

$$a_4a_5 \sin\omega_5 = a_1a_4 \sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4) + a_2a_4 \sin(\omega_3+\omega_4) + a_3a_4 \sin\omega_4,$$

mithin:

$$2\,F = a_1a_2 \sin\omega_2 + a_1a_3 \sin(\omega_2+\omega_3) + a_1a_4 \sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)$$
$$+ a_2a_3 \sin\omega_3 + a_2a_4 \sin(\omega_3+\omega_4)$$
$$+ a_3a_4 \sin\omega_4$$

865. Allgemein, bezeichnet F den Flächenraum eines beliebigen necks, so ist:

$$2F = a_1a_2 \sin\omega_2 + a_1a_3 \sin(\omega_2+\omega_3) + \ldots + a_1a_{n-1} \sin(\omega_2+\ldots\omega_{n-1})$$
$$+ a_2a_3 \sin\omega_3 + a_2a_4 \sin(\omega_3+\omega_4) + \ldots + a_2a_{n-1} \sin(\omega_3+\ldots\omega_{n-1})$$
$$+ a_3a_4 \sin\omega_4 + \ldots\ldots\ldots + a_3a_{n-1} \cdot \sin(\omega_4+\ldots\omega_{n-1})$$
$$\vdots$$
$$+ a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot \sin\omega_{n-1}$$

Anleitung zum Beweise. Es ist ein sogenannter $(n+1)$ Beweis, durch welchen man die Richtigkeit dieses allgemeinen Satzes darthut, d. h. man zeigt, daß der Lehrsatz für ein $(n+1)$eck richtig bleibt, wenn er für ein neck richtig ist.

Zu diesem Ende ziehe man in dem $(n+1)$eck diejenige Diagonale, welche die Anfangspuncte der ersten und nten Seite verbindet; dadurch wird das Vieleck zerlegt in ein neck und in ein Dreieck; die $(n-1)$ ersten Seiten von jenem sind a_1, a_2, ... a_{n-1}, zwei Seiten des letztern a_n und a_{n+1}. Angenommen also, unser in Rede stehender Lehrsatz sei für ein neck richtig, so hat man sofort:

$$2\,F = a_1a_2 \sin\omega_2 + \ldots\ldots + a_1a_{n-1} \sin(\omega_2+\ldots\omega_{n-1})$$
$$a_2a_3 \sin\omega_3 + \ldots$$
$$+ a_{n-1}\,a_n \sin\omega_n$$
$$+ a_n\,a_{n+1} \cdot \sin\omega_{n+1}$$

Es ist nun aber (862, Zus. 1)

$$a_{n+1} \cdot \sin\omega_{n+1} + a_1 \sin(\omega_{n+1}+\omega_1) + a_2 \sin(\omega_{n+1}+\omega_1+\omega_2) + \ldots\ldots$$
$$+ a_{n-1} \sin(\omega_{n+1}+\omega_1+\omega_2+\ldots\omega_{n-1}) =$$
$$a_{n+1} \cdot \sin\omega_{n+1} - a_1 \sin(\omega_2+\omega_3+\ldots\omega_n) - a_2 \cdot \sin(\omega_3+\ldots\omega_n) - \ldots\ldots$$
$$- a_{n-1} \cdot \sin\omega_n,$$

also auch:

$$a_n a_{n+1} \cdot \sin \omega_{n+1} = a_1 a_n \cdot \sin(\omega_2 + \omega_3 \ldots \omega_n) + a_2 a_n \sin(\omega_3 + \ldots \omega_n) + \ldots + a_{n-1} a_n \cdot \sin \omega_n$$

und mithin:

$$\begin{aligned} 2F = {} & a_1 a_2 \cdot \sin \omega_2 + a_1 a_3 \sin(\omega_1 + \omega_2) + \ldots + a_1 a_n \cdot \sin(\omega_2 + \ldots \omega_n) \\ & + a_2 a_3 \sin \omega_3 + \ldots + a_2 a_n \sin(\omega_3 + \ldots \omega_n) \\ & + a_3 a_4 \sin \omega_4 + \ldots + a_3 a_n \sin(\omega_4 + \ldots \omega_n) \\ & \quad \vdots \\ & + a_{n-1} a_n \cdot \sin \omega_n \end{aligned}$$

Anmerkung 1. Von diesem Satze geht L'Huilier in seiner Polygonometrie aus und leitet aus ihm die beiden Sätze her, die in den beiden Zusätzen zu 862 mitgetheilt worden sind.

Anmerkung 2. Für sämmtliche im Vorhergehenden entwickelte Sätze, in denen die Außenwinkel von Vielecken in Betracht kommen, muß ausdrücklich bemerkt werden, daß unter Außenwinkeln solche verstanden werden, von denen jeder den ihm anliegenden (innern) Vieleckswinkel zu zwei Rechten ergänzt; für jeden Vieleckswinkel also, der größer als zwei Rechte ist, ist der zugehörige Außenwinkel negativ.

Zehntes Buch.

Von den Ebenen, besonders von der gegenseitigen Lage und den Durchschnittslinien derselben.

---

414. Erklärung. Eine Gerade (FE Fig. 193) heißt senkrecht auf einer Ebene (RS), wenn sie senkrecht ist auf allen Geraden, die in der genannten Ebene liegen und sich in dem Puncte schneiden, in welchem die Gerade der Ebene begegnet.

Eucl. XI, Erkl. 3. — L. G. V, Erkl. 1.

Anmerkung. Man erinnere sich der früheren in 3 und 15 aufgestellten Erklärungen von gerader Linie und Ebene. Aus ihnen folgt unmittelbar, daß jede Gerade ganz in einer und derselben Ebene liegt. In vielen Lehrbüchern finden sich noch besondere Beweise für die Richtigkeit dieses Satzes.

Eucl. XI, 1. — L. G. V, 1.

415. Erklärung. Wenn eine Ebene (AV Figg. 194 und 195) auf einer andern (PQ) steht, oder dieselbe schneidet, so wird die gerade Linie (UV), welche beide Ebenen gemein haben, ihre Durchschnittslinie genannt.

Eucl. XI, 3.

Anmerkung. Diese Erklärung nimmt ohne Weiteres an, daß die Durchschnittslinie zweier Ebenen keine andere als eine Gerade sein kann, weil dieß augenscheinlich und unmittelbar aus unserer Erklärung von Ebene folgt. Andere beweisen dieß noch besonders.

Eucl. XI, 3.

416. Erklärung. Eine Ebene (AV Fig. 194) steht senkrecht auf einer andern (PQ), wenn die Geraden, welche in der einen Ebene liegen und senkrecht auf der Durchschnittslinie stehen, zugleich auch senkrecht auf der andern Ebene sind.

Eucl. XI, Erkl. 4. — L. G. V, Erkl. 5.

417. Erklärung. Die Neigung einer Geraden (FC Fig. 196) gegen eine Ebene (PQ) ist derjenige Winkel (FCE), welchen diese Gerade selbst mit derjenigen (EC) bildet, welche man in der Ebene von dem Puncte (C), wo ihr die Gerade begegnet, nach dem Fußpuncte (E) der Senkrechten (FE) zieht, die von dem andern Endpuncte (F) der in Rede stehenden Geraden auf die Ebene gefällt wird.

Eucl. XI, Erkl. 5. — L. G. V, 17.

418. Erklärung. Der Neigungswinkel zweier Ebenen AV und PQ (Fig. 195) ist der Winkel (BEF), welchen zwei Gerade mit einander bilden, die in der einen und andern Ebene liegen und deren Durchschnittslinie in demselben Puncte und unter rechten Winkeln schneiden.

Eucl. XI, Erkl. 6.

419. Erklärung. Zwei Ebenen heißen parallel, wenn sie nach allen Seiten unbegränzt erweitert werden können ohne sich jemals zu begegnen, eben so heißt eine gerade Linie einer Ebene und diese jener parallel, wenn beide niemals zusammentreffen.

Eucl. XI, 8. — L. G. V, Erkl. 3.

420. Lehrsatz: Jedes Dreieck liegt stets mit seinen sämmtlichen Seiten und Ecken in derselben Ebene.

Eucl. XI, 2.

Beweis. Wird daraus hergeleitet, daß sich durch jede Gerade unendlich viele Ebenen legen lassen.

Zus. 1. Durch drei ganz beliebig im Raume angenommene Puncte kann man stets eine Ebene legen, und die Lage dieser Ebene ist, sofern die drei Puncte nicht in gerader Linie liegen, vollkommen bestimmt.

Zus. 2. Zwei Gerade, die sich schneiden, liegen stets in derselben Ebene.

Eucl. XI, 2 — L. G. V, 2.

Zus. 3. Durch die Lage zweier sich schneidenden Linien ist auch zugleich die Lage einer Ebene bestimmt.

L. G. V, 2.

421. Lehrsatz. Steht auf jeder von zwei sich schneidenden Geraden (AB, CD Fig. 193) in ihrem Durchschnittspuncte (E) eine dritte (FE) senkrecht, so ist diese letztere senkrecht auf der ganzen durch die beiden erstern bestimmten Ebene.

Eucl. XI, 4. — L. G. V, 4.

Vorbereitung zum Beweise. Nimm AE = EB, DE = EC, verbinde A mit D und B mit C, ziehe in der Ebene RS durch den Punct E die beliebige Gerade PQ, und zeige, daß auch auf ihr FE senkrecht ist.

Bew. 1. $\triangle AEF \cong \triangle BEF$, $\triangle DEF \cong \triangle CEF$, und $\triangle AED \cong \triangle BEC$

2. $\triangle AFD \cong \triangle BFC$ und $\triangle AEP \cong \triangle EBQ$

3. $\triangle AFP \cong \triangle BFQ$

4. $\triangle PEF \cong \triangle QEF$.

Zus. 1. Durch einen und denselben Punct, mag er in einer Ebene oder außerhalb derselben liegen, läßt sich nur eine einzige Gerade ziehen, welche senkrecht auf der Ebene steht.

Eucl. XI, 13. — L. G. V, 4, Zus. 2.

Zus. 2. Unter allen Geraden, die sich von einem Puncte (F) außerhalb einer Ebene nach derselben ziehen lassen, ist die Senkrechte (FE) die kürzeste.

L. G. V, 4, Zus. 1.

Zus. 3. Unter den nicht Senkrechten dieser Linien (wie FA, FB Fig. 193) sind diejenigen von gleicher Länge, welche der Ebene in Puncten begegnen, die gleiche Entfernung vom Fußpuncte der Senkrechten haben, und welche daher auch mit der Senkrechten selbst gleiche Winkel bilden. Der geometrische Ort für die Fußpuncte aller solchen gleich langen Geraden, die von demselben Puncte außerhalb einer Ebene gezogen werden, ist daher die Peripherie eines in dieser Ebene von dem Fußpuncte der Senkrechten als Mittelpunct beschriebenen Kreises, und

umgekehrt. — Von zwei nicht senkrechten und ungleichen solcher Geraden ist diejenige die kürzere, deren Fußpunct die kleinere Entfernung vom Fußpunct der Senkrechten hat, und die daher auch mit dieser letztern selbst einen kleinern Winkel bildet und umgekehrt.

L. G. V, 5.

Zus. 4. Jede Ebene ist senkrecht auf einer andern, wenn sie durch eine Gerade gelegt ist, die auf dieser zweiten Ebene senkrecht steht.

Eucl. XI, 18. — L. G. V, 18.

Zus. 5. Fällt man aus einem Puncte (B Fig. 194) einer Ebene (AV), die auf einer andern (PQ) senkrecht steht, auf diese letztere eine Senkrechte (BD), so liegt deren Fußpunct (D) stets auf der Durchschnittslinie (UV) beider Ebenen; und umgekehrt, fällt man in einer von zwei auf einander senkrechten Ebenen ein Perpendikel auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie, so ist dieses senkrecht auf der ganzen andern Ebene; so wie jede Senkrechte, in einem beliebigen Puncte der Durchschnittslinie auf der einen Ebene errichtet, ganz in der andern Ebene liegen muß.

Eucl. XI, 38.

Zus. 6. Stehen zwei sich schneidende Ebenen (AB, CD Fig. 198) zugleich senkrecht auf derselben dritten (PQ), so ist auch ihre Durchschnittslinie senkrecht auf der letztern Ebene.

Eucl. XI, 19. — L. G. V, 19.

Zus. 7. Wenn man von einem Puncte (F Fig. 196) außerhalb einer Ebene auf diese ein Perpendikel (FE) fällt, aus dem Fußpuncte desselben eine zweite Senkrechte (CF) auf eine beliebig in der Ebene angenommene Gerade (DJ) zieht, und den Fußpunct (C) dieser zweiten mit dem Puncte außerhalb verbindet, so bildet auch diese Verbindende (FC) mit der in der Ebene genommenen Geraden rechte Winkel, und umgekehrt.

422. Lehrsatz. Haben drei Gerade (EA, EG, EC Fig. 199) einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct und steht in demselben auf ihnen allen zugleich eine vierte Gerade (EF) senkrecht, so liegen die drei genannten Linien in derselben Ebene.

Beweis. Indirect. — Läge EA nicht in der durch EC und EG bestimmten Ebene, sondern würde letztere von der durch FE und EA gelegten Ebene in EO geschnitten, so entstände die offenbare Ungereimtheit, daß W. FEA = FEO sein müßte.

423. Lehrsatz. Zwei Gerade (AB, CD Fig. 200) sind parallel, wenn sie auf derselben Ebene senkrecht stehen; und umgekehrt, steht eine von zwei Parallelen auf einer Ebene senkrecht, so ist dieß auch eben so mit der andern.

Eucl. XI, 6, 8. — L. G. V, 7 und 7, Zus. 1.

Beweis. Nach 421, Zus. 5 müssen zwei solche Senkrechte stets in derselben Ebene liegen; man denke sich diese Ebene durch sie gelegt, und wende nun 421 und 26, Zus. an. Die Richtigkeit der Umkehrung folgt aus 421, Zus. 4 und Zus. 5; verbunden mit 25, Zus.

Anmerkung. Um also eine Senkrechte auf einer Ebene in einem gegebenen Puncte zu errichten, kann man so verfahren, daß man von einem beliebigen Puncte außerhalb der Ebene eine Senkrechte auf dieselbe fällt, und mit dieser durch den gegebenen Punct eine Parallele zieht.

424. Lehrsatz. Zwei Gerade (AB, CD Fig. 201), die beide zugleich einer und derselben dritten (EF) parallel sind, sind, wenn diese letztere auch nicht mit ihnen in derselben Ebene liegt, unter einander parallel.

Eucl. XI, 9.

Vorbereitung. Man lege sowohl durch AB und EF, als durch CD und EF Ebenen, fälle von einem beliebigen Puncte G der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie Senkrechte GH und GK auf AB und CD, ziehe HK, und lege durch HKG eine Ebene.

Beweis. Aus 423.

425. Lehrsatz. Zwei Ebenen (PQ, RS Fig. 204) sind parallel, wenn beide auf derselben Geraden (EF) senkrecht stehen.

Eucl. XI, 14. — L. G. VI, 11.

Indirecter Beweis.

Zus. 1. Alle zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltenen Stücke von solchen Geraden, die auf diesen Ebenen senkrecht stehen, sind von gleicher Größe.

Zus. 2. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Eucl. XI, 16.

Zus. 3. Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind von gleicher Länge.

426. Lehrsatz. Wenn bei zwei in verschiedenen Ebenen liegenden Winkeln ABC, DEF (Fig. 203) beide Schenkelpaare beziehungsweise parallel sind und beide Paare zugleich entweder nach derselben oder nach entgegengesetzten Seiten vom Scheitel aus fortgehen, so sind die Winkel gleich und die durch sie bestimmten Ebenen parallel.

Eucl. XI, 10 und 15. — L. G. V, 13.

Vorbereitung. Nimm AB = DE, BC = EF, ziehe AD, BE, CF, AC und DF.

Beweis. Erster Theil. Aus 54 — 424 — 50.

Zweiter Theil. Indirect durch Hülfe von 425, Z. 3.*)

427. Lehrsatz. Werden zwei Gerade (AB, CD Fig. 202) von parallelen Ebenen (GH, KL, MN) geschnitten, so haben je zwei entsprechende d. h. zwischen je denselben Ebenen liegende Stücke dasselbe Verhältniß zu einander.

Eucl. XI, 17. — L. G. V, 15.

Beweis. Aus 425, Zus. 2.

*) Sowohl bei diesem Satze als bei dem vorhergehenden und bei der Erklärung von parallelen Ebenen (419) habe ich mir einige Abänderungen erlaubt, da sie nöthig zu sein schienen. Anm. des Uebers.

Eilftes Buch.

Von ebenflächigen d. i. durch ebene Flächen begränzten Körpern oder Polyedern.

Erster Abschnitt.

Von körperlichen Ecken oder Raumecken.

---

428. **Erklärung.** Ein geometrischer Körper ist diejenige Raumgröße, an der sich alle drei Dimensionen des allgemeinen Raumes wahrnehmen lassen, deren Gränzen daher Flächen sind.

Eucl. XI, Erkl. 1 und 2.

Anmerkung. Die Flächen sind entweder eben oder krumm; in diesem Buche betrachten wir nur solche Körper, die von ebenen Flächen begränzt werden, die übrigen bleiben dem zwölften Buche vorbehalten. Je zwei der verschiedenen ein Polyeder begränzenden Ebenen haben eine bestimmte Neigung zu einander, bilden also einen Winkel, den wir künftig Flächenwinkel nennen wollen. Diese Flächenwinkel sind natürlich verschieden von ebenen Winkeln, obschon letztere als Maaße für erstere dienen.

429. **Erklärung.** Körperwinkel oder körperliche Ecke oder Raumecke ist ein Winkel, der von drei oder mehrern ebenen Winkeln dann gebildet wird, wenn diese in verschiedenen Ebenen liegen aber einen gemeinschaftlichen Scheitel haben.

Eucl. XI, Erkl. 11. — L. G. V, Erkl. 6.

Anmerkung 1. In Fig. 205 besteht die Raumecke A aus drei ebnen Winkeln CAB, CAD, BAD; in Fig. 206 dagegen aus nicht weniger als fünf, GVJ, JVD, DVE, EVF, FVG. Daß wenigstens drei ebene Winkel zur Bildung einer Raumecke erfordert werden, fällt von selbst in die Augen.

Zus. 1. Die Spitzen aller ebenen zu einer Raumecke gehörigen Winkel fallen also in demselben Puncte zusammen; und einer der beiden Schenkel jedes dieser Winkel ist zugleich auch Schenkel eines der an demselben anliegenden Winkel. Diese Schenkel der ebenen Winkel heißen die Kanten*) der Raumecke, die zwischen ihnen enthaltenen Ebenen aber die Seiten oder Flächen der Ecke. So sind in Fig. 205 AB, AC, AD die Kanten, und BAC, CAD, DAB die Flächen der Ecke A.

Zus. 2. Legt man durch einen Punct auf einer der Kanten eine Ebene so, daß sie die sämmtlichen Flächen der Ecke schneidet, so bilden

---

*) Daher werden die ebenen Winkel selbst künftig auch Kantenwinkel genannt werden. Anm. des Uebers.

diese Durchschnittslinien ein Vieleck von so viel Seiten als die Ecke Flächen hat; also ein Dreieck, Viereck, Fünfeck ꝛc. je nachdem die Ecke dreiflächig, vierflächig, oder fünfflächig ꝛc. ist.

Anmerkung 2. Dieser Satz ist es, der, nach meinem Dafürhalten, im Wesentlichen den Inhalt vom 22ten Satze im eilften Buche des Euclides ausmacht, wenigstens in so weit, als er von Euclides beim nächstfolgenden 23ten Satze gebraucht wird.

Zus. 3. Zwei Raumecken werden daher vollkommen gleich und übereinstimmend sein, wenn sie sich in eine solche gegenseitige Lage bringen, daß nicht nur ihre Scheitel zusammenfallen, sondern auch ihre Flächen paarweise sich decken. Die ebenen Winkel, welche zwei vollkommen gleiche Raumecken bilden sollen, müssen also gleich sein an Zahl, paarweise gleich an Größe, und gleich in Absicht auf ihre gegenseitige Lage d. h. die zu der einen Ecke gehörigen müssen sich in derselben Ordnung und nach derselben Seite hin folgen, wie die ihnen entsprechenden Winkel der andern Ecke.

Anmerkung 3. Die ebenen Winkel, welche zwei Raumecken bilden, könnten paarweise gleich sein, und die Raumecken würden sich doch nicht gegenseitig decken, wenn nicht die gegenseitige Lage der ebenen Winkel in beiden Ecken vollkommen dieselbe wäre. Man vergleiche L. G. V, 23, Anmerk.

Anmerkung 4. Die zu einer Raumecke gehörigen ebenen Winkel können entweder alle ausspringende oder zum Theil auch einspringende sein d. h. entweder jeder < 2 R, oder einige auch > 2 R. Man muß beide Fälle wohl von einander unterscheiden, wie man aus der Anmerk. zu 431 sehen wird.

430. **Lehrsatz.** Wird eine Raumecke (A Fig. 205) aus drei ebenen Winkeln gebildet, so ist die Summe zweier immer größer als der dritte.

Eucl. XI, 20. — L. G. V, 21.

Vorbereitung. BAC sei der größte dieser Winkel; in seiner Ebene ziehe man AE so, daß W. BAE $=$ BAD, und AE $=$ AD; ziehe BEC, CD und DB.

Beweis. BE $=$ BD, also CE $<$ CD, und darum W. EAC $<$ CAD, also auch W. BAD $+$ CAD $<$ BAC.

431. **Lehrsatz.** Alle die eine Raumecke bildenden ebenen Winkel zusammen sind kleiner als vier Rechte.

Eucl. XI, 20.

Vorbereitung. Nimm (Fig. 205) auf den drei Kanten die drei beliebigen Puncte B, C, D und lege durch sie eine Ebene, so bildet diese mit den Flächen der Ecke A drei neue dreiflächige Raumecken in den Puncten B, C und D.

Bew. $ABC + ABD + ACB + ACD + ADB + ADC > CBD + BCD + CDB > 2$ R,

also $BAC + CAD + DAB < 4$ R.

Anmerkung 1. Unser Beweis gilt zwar zunächst nur für eine dreiflächige Ecke, läßt sich aber leicht auf jede mehrflächige ausdehnen. Inzwischen ist folgender Beweis von Clavius allgemeiner.

Es sei (Fig. 206) V der Scheitel einer beliebigen nflächigen Raumecke; man lege durch sämmtliche Flächen eine schneidende Ebene, so ist dieser Durchschnitt GFEDJ ein neck, dessen Winkelsumme also $= 2$ n R $- 4$ R; in den n Dreiecken FVE, EVD ꝛc. ist nun die gesammte Winkelsumme $= 2$ n R, mithin, da die Summe der sämmtlichen Winkel an den Grundlinien unserer Dreiecke VFE $+$ VEF $+$ VED ꝛc. größer ist als die Winkelsumme des necks FEDJG (428), also größer als 2 n R $-$ 4 R, so ist die Summe der sämmtlichen ebenen Winkel an der Spitze < 4 R.

Anmerkung 2. Unser Satz gilt nur so lange, als unter den sämmtlichen Kanten-

winkeln, die zur Raumecke gehören, sich keiner findet, der > 2 R ist, wie dieß schon Le Sage bemerkt hat s. Hist. de l'Acad. de Paris 1756 p. 77.

432. Lehrsatz. Nimmt man auf den Kanten einer dreiflächigen oder dreikantigen Raumecke drei Puncte (B, C, D Fig. 207) so, daß sie gleiche Entfernung vom Scheitel (A) haben, legt durch sie eine Ebene und fällt auf sie aus dem Scheitel eine Senkrechte (AP), so ist der Fußpunct (P) derselben der Mittelpunct des Kreises, der durch die auf den Kanten genommenen Puncte geht.

Vorbereitung. Ziehe BP, CP, DP und zeige, daß sie gleich sind.

Beweis. Aus der Congruenz der Dreiecke ABP, ACP, ADP.

Zus. 1. $AP_q = AC_q - CP_q$.

Zus. 2. Aus unserm Satze ergiebt sich ein Verfahren, eine dreiflächige körperliche Raumecke zu construiren, wenn die drei zugehörigen ebenen Winkel gegeben sind. Es ist folgendes: Schneide auf den Schenkeln der drei gegebenen Winkel von den Scheiteln aus Stücke ab, die alle sechs von gleicher Länge sind, verbinde je zwei zusammengehörige, construire aus diesen Verbindenden als Seiten ein Dreieck, errichte auf seiner Ebene im Mittelpuncte seines äußern Kreises eine Senkrechte, verlängere sie so weit, daß ihr Quadrat gleich dem Ueberschuß des Quadrates von der auf den Schenkeln genommenen Länge über das Quadrat des Halbmessers von dem um das erhaltene Dreieck beschriebenen Kreise, so ist der so gefundene Endpunct dieser Senkrechten der Scheitel und die von ihm nach den Spitzen des Dreiecks gezogenen Geraden die Kanten der gesuchten Raumecke.

Eucl. XI, 23. — L. G. V, 24.

Anmerkung. Dieses Verfahren ist für Raumecken von mehr als drei Flächen nicht mehr anwendbar; darum weil die auf den Kanten, in gleicher Entfernung vom Scheitel genommenen, Puncte (D, E, F, G, J Fig. 206) nicht nothwendig in derselben Eben liegen, was bei drei Puncten jederzeit Statt finden muß. Erfüllen sie aber diese Bedingung, so stimmt eine solche vielflächige Raumecke in Absicht auf unsern Satz auch ganz mit einer dreiflächigen überein.

L. G. V, 28, Anm.

433. Lehrsatz. Wenn in zwei dreiflächigen Raumecken (A und F Fig. 208) die ebenen Winkel paarweise gleich sind (BAC = GFH, GFE = BAD, CAD = HFE), so sind auch je zwei entsprechende Flächenwinkel d. h. die Neigungswinkel je zwei solcher Ebenen, die durch zwei Paare gleicher ebener Winkel bestimmt werden, von gleicher Größe.

L. G. V, 23.

Vorbereitung. Nimm auf zwei entsprechenden Kanten, AC, FH, zwei Puncte in gleicher Entfernung vom Scheitel, errichte in diesen Puncten auf den genanntenn Kanten und in den Ebenen, deren Durchschnitte sie bilden, die Senkrechten, JK, JL, MN, MO, und ziehe die KL und NO.

Beweis. $\triangle$ AJK $\cong$ $\triangle$ FMN, $\triangle$ AJL $\cong$ $\triangle$ FMO, $\triangle$ AKL $\cong$ $\triangle$ FNO, $\triangle$ KJL $\cong$ $\triangle$ NMO 2c.

434. Lehrsatz. Zwei dreikantige Raumecken (A und F Fig. 209) sind vollkommen gleich, wenn ein Paar Kantenwinkel (GFH, MAD) nicht nur unter sich gleich sind, sondern auch ihre Ebenen gleiche Neigung gegen die dritten Kanten haben (W. CAE = JFL) und wenn die beiden Ebenen, welche durch diese dritten Kanten so gelegt werden, daß

sie senkrecht auf den Ebenen der gleichen Kantenwinkel stehen, diese letztern Winkel nach demselben Verhältniß theilen (MAE : EAD = GFL : LFH.)

Vorbereitung zum Beweise. Nimm AC = FJ und AM = FG; fälle aus den Puncten C und J auf die Ebenen der gleichen Kantenwinkel die Senkrechten CE, JL; ziehe GL und ME, verlängere sie bis zum Durchschnitt mit den andern Schenkeln in H und D, ziehe endlich CD, CM, JG, JH, AE, FL. Die Winkel CAE und JFL sind die Neigungswinkel der Kanten AC, FJ gegen die Ebenen MAD und GFH.

Beweis. 1. △ FLJ ≌ △ AEC (46)

2. MAE = GFL und LFH = DAE, da gleiche Größen nach gleichem Verhältniß getheilt worden.

3. △ AEM ≌ △ FGL und △ AED ≌ △ FLH

4. △ MEC ≌ △ GLJ und △ CED ≌ △ HLJ

5. △ FGJ ≌ △ AMC und △ FJG ≌ △ ACD

Also GFJ = MAC und JFH = CAD, und mithin die beiden Raumecken vollkommen gleich (429, Zus. 3).

Zus. 1. Ist also in einer Ebene eine Gerade MA gegeben, an deren einem Endpunct A als Scheitel eine dreikantige Raumecke construirt werden soll, die mit einer gegebenen (F) vollkommen gleich ist, so fälle aus einem beliebigen Puncte (J) einer Kante (FJ) der gegebenen Ecke (F) eine Senkrechte (JL) auf die durch die beiden andern Kanten bestimmten Ebenen, ziehe in derselben durch den Fußpunct (L) der Senkrechten eine beliebige die beiden Kanten schneidende Gerade (GLH); alsdann nimm W. MAD = GFH, AM = FG, AD = FH, ziehe MD, mache W. MAE = GFL, errichte auf der Ebene MAD in E die Senkrechte (EC), und verlängere sie so weit, daß EC = JL wird, und ziehe endlich CA, so sind AM, AD, AC die drei Kanten der gesuchten Raumecke.

Eucl. XI, 26. — L. G. V, 24.

Zus. 2. Die Umkehrung unseres Satzes, deren Richtigkeit von selbst einleuchtet, giebt den 35ten Satz im eilften Buche des Euclides; nämlich: Wenn zwei ebene Winkel (GFH, MAD) von gleicher Größe sind und von ihren Spitzen (F, A) aus zwei Gerade (FJ, AC) gezogen werden, die nicht in der Ebene der Winkel liegen, aber mit ihren Schenkeln Winkel von beziehungsweise gleicher Größe bilden (GFJ = MAC, JFH = CAD), so haben diese Geraden gleiche Neigung gegen die Ebenen.

Zweiter Abschnitt.

Von den ebenflächigen Körpern oder Polyedern.

435. Erklärung. Ebenflächige Körper oder Polyeder heißen alle diejenigen geometrischen Körper, deren sämmtliche Gränzflächen Ebenen sind.

L. G. VI, Erkl. 1.

Anmerkung 1. Ein Polyeder, das nicht sonst schon einen besondern und bekannten Namen führt, wird nach der Anzahl seiner Gränzflächen benannt, so daß man von vierflächigen, fünfflächigen ꝛc. Polyedern spricht. Daß es kein Polyeder von weniger als vier Gränzflächen geben kann, leuchtet daraus hervor, daß jede Raumecke wenigstens drei Flächen erfordert, und zu diesen erst eine vierte sie schneidende hinzukommen muß, um sie zu einer geschlossenen Figur zu verbinden.

Anmerkung 2. Polyeder von gleichviel Gränzflächen können noch sehr verschieden sein, nach der verschiedenen Beschaffenheit dieser Gränzflächen; und der davon abhängigen Verschiedenheit der Zahl und Größe der Kantenwinkel, die sich zur Bildung einer Raumecke vereinigen, Größe der Flächenwinkel ꝛc.

436. Erklärung. Bezeichnet man eine der Gränzflächen eines Polyeders als Grundfläche, so heißt Höhe des Polyeders die Senkrechte, welche aus der Spitze desselben d. h. aus der von der Grundfläche entferntesten Ecke auf letztere gefällt wird. Hat die Grundfläche eine Gegenfläche, die mit ihr parallel, so ist die Entfernung dieser beiden Gränzflächen von einander, das Maaß für die Höhe des Körpers.

L. G. VI, Erkl. 6, 12.

Anmerkung. Was also für ebene geradlinige Figuren Grundlinie ist, wird für ebenflächige Körper Grundfläche.

437. Erklärung. Inhalt eines geometrischen Körpers ist der von seinen Gränzflächen umschlossene Raum. Inhaltsgleich sind also zwei Körper, deren Gränzflächen gleiche Räume umschließen.

Anmerkung 1. Manche Schriftsteller bestimmen den Begriff der Inhaltsgleichheit der Körper folgendermaßen: Zwei Körper, sagen sie, sind an Inhalt gleich, wenn je zwei mit der Grundfläche parallele und in gleichen Höhen genommene Durchschnitte gleich sind. Sie betrachten dabei diese Durchschnitte als die erzeugenden Theile, aus denen die Körper gebildet werden, und machen dabei den Schluß: Wenn die erzeugenden Theile zweier Körper in dem Grade einander gleich sind, daß ihre Anzahl für beide Körper dieselbe, alle Theile des einen Körpers nicht nur einzeln gleich denen des andern, sondern in dem einen auch ganz auf dieselbe Weise wie in dem andern unter einander verbunden, so sind die aus ihnen gebildeten Körper selbst gleich — ein Schluß, dessen Richtigkeit sich wohl nicht bezweifeln läßt; aber mit Recht fragt man, sind denn in unserm Falle, die erzeugenden Theile beider Körper auch wirklich gleich? Die Schriftsteller, von denen wir hier reden, gelangen zu dieser Gleichheit der erzeugenden Theile dadurch, daß sie die Anzahl derselben unendlich groß annehmen, um die parallelen Durchschnitte selbst als diese erzeugenden Theile betrachten zu können; sie sehen also die Körper offenbar als aus dem Uebereinanderlegen unendlich vieler Ebenen entstanden an, — eine Vorstellung, die mindestens ungenau, und mit geometrischer Schärfe und Strenge unvereinbar ist.

Anmerkung 2. Der Mathematiker berücksichtigt bei dem Begriffe, den er sich von einem geometrischen Körper bildet, nur die Merkmale, die sich auf seine Größe und Gestalt beziehen. Von allen übrigen Eigenschaften, selbst von den allgemeinsten, ohne welche wir uns streng genommen Körper gar nicht denken können, wie z. B. Undurchdringlichkeit, wird dabei ganz abgesehen. Oft wird daher die Annahme gemacht, daß zwei oder mehrere Körper auf derselben Grundfläche stehen sollen.

438. Erklärung. Zwei Körper heißen ähnlich, wenn die Anzahl ihrer Gränzflächen gleich groß, je zwei derselben ähnlich sind, und gegen die übrigen Flächen in beiden Körpern genau dieselbe Lage haben.

Eucl. XI, Erkl. 9.

Anmerkung. In ähnlichen Körpern sind also je zwei entsprechende Raumecken gleich, die sie bildenden Gränzflächen ähnlich, also die Kantenwinkel paarweise gleich, und die Kanten selbst proportionirt.

439. Erklärung. Zwei Körper sind gleich und ähnlich, wenn

beide gleichviel Gränzflächen haben, von denen je zwei sich wechselseitig entsprechende congruent sind *).

Eucl. XI, Erkl. 10.

Anmerkung. Man muß bei Körpern wie bei ebenen Figuren wohl unterscheiden zwischen der vollendeteren Gleichheit, welche Uebereinstimmung sowohl in Absicht auf Inhalt als auf Gestalt in sich schließt, und zwischen der unvollendeteren der bloßen Inhaltsgleichheit. Erstere findet nur dann Statt, wenn je zwei bestimmende Stücke in beiden Körpern nicht nur einzeln gleich sind, sondern auch genau dieselbe Lage haben und sich in derselben Ordnung einander folgen. Bloße Inhaltsgleichheit zweier Körper kann natürlich mit der größten Verschiedenheit ihrer Gestalt verbunden sein.

440. Erklärung. Ein Prisma ist dasjenige Polyeder, in welchem ein Paar Gränzflächen selbst einander parallel, von allen übrigen aber je zwei Kanten oder Durchschnittslinien parallel sind **).

---

*) Es ist in der That zu verwundern, daß unser Verfasser, bei seinem unverkennbaren Streben nach Gründlichkeit und Genauigkeit, diese Erklärung aus Euclid's Elementen in sein Buch aufgenommen hat, ohne auch nur zu erwähnen die Bedenken und Einwendungen, die man dagegen erhoben hat, und die ihm eben so wenig unbekannt sein als unerheblich erscheinen konnten. Denn wenn auch diejenigen wohl zu weit gehen, die behaupten, daß diese angebliche Erklärung unmöglich von Euclides, sondern nur von einem seiner unwissenden Abschreiber herrühren könne, so ist doch so viel gewiß, daß sie nicht das ist, wofür sie sich ausgiebt; nicht eine Erklärung bilden jene Worte, sondern einen Lehrsatz, einen eben so unbestreitbaren Lehrsatz als der von Euclides selbst im ersten Buche aufgestellte und bewiesene ist, nämlich daß zwei Dreiecke gleich und ähnlich sind, wenn die sie begränzenden Seiten paarweise gleich sind. Noch schlimmer ist zweitens der Umstand, daß der Satz, wenigstens in der Allgemeinheit, wie ihn Euclides und nach ihm unser Verf. ausspricht, nicht einmal unbedingt richtig ist, sondern man kann vielmehr, wenn einspringende Ecken gestattet werden, Polyeder construiren, die bei völliger Uebereinstimmung ihrer Gränzflächen, doch weder an Größe noch an Gestalt gleich sind. Aber wahr ist der Satz, wenn man, wie dieß ohne Zweifel Euclides that, unter Polyedern keine andern versteht, als solche, deren Ecken sämmtlich ausspringende sind. Erst in neuerer Zeit ist der Beweis für die Richtigkeit des so beschränkten Lehrsatzes von dem französischen Mathematiker Cauchy geführt worden, und man könnte durch die eben nicht ganz nahe liegenden Betrachtungen, auf die er sich stützt, zu der Vermuthung geleitet werden, daß Euclides, diesen Satz als Lehrsatz erkennend, einen Beweis für ihn gesucht, aber nicht gefunden, und ihn daher aus der Reihe der übrigen ausgeschieden habe, nicht als einen, der keines Beweises bedürfe, sondern für welchen noch kein Beweis gefunden. Vielleicht verhält es sich auf ähnliche Weise mit dem berüchtigten eilften Grundsatz des ersten Buches. Unser Verf. hätte übrigens an dieser Stelle auch nicht unterlassen sollen, einen nicht unwichtigen Unterschied noch mehr hervorzuheben, der zwischen Figuren im Raume und zwischen Figuren in derselben Ebene, also auch zwischen Polyedern und Vielecken Statt findet. Ebene Figuren nämlich, die gleich und ähnlich sind, müssen nothwendig und immer auch congruent sein. Nicht so ist es mit den Raumfiguren. Vielmehr giebt es unzählige Gebilde dieser Art, die, obschon gleich und ähnlich, doch nicht congruent d. h. so beschaffen sind, daß sie sich zwischen dieselben Gränzen bringen lassen. Vertical-Raumecken, sphärische Gegendreiecke u. a. bieten einfache Beispiele für die Bestätigung des Gesagten dar. Hat man ein beliebiges Polyeder, nimmt eine seiner Gränzflächen zur Grundfläche, fällt auf dieselbe oder ihre Erweiterung aus allen Ecken Senkrechte, verlängert jede derselben um ihre eigne Länge über die Grundfläche hinaus und construirt nun ein zweites Polyeder, welches dieselbe Grundfläche und zu seinen übrigen Ecken die Endpuncte der genannten Verlängerungen hat, so ist dieses zweite Polyeder dem ersten gleich und ähnlich, aber nicht congruent. Betrachtet man beide Polyeder als Hälften desselben Ganzen, so findet offenbar ein vollkommenes Ebenmaaß der Theile in Rücksicht ihrer Lage gegen die Ebene der gemeinschaftlichen Grundfläche Statt. Daher nennt man solche Körper symmetrisch gleich (egales par symmetrie) oder auch schlechthin symmetrisch. Daß zwei solche Raumgebilde trotz dieses oder vielmehr gerade wegen dieses vollkommenen Gleichmaaßes der Theile sich nicht zwischen dieselben Gränzen bringen lassen, und eben darum nicht congruent sind, ist leicht zu sehen. Denn schon ebene symmetrische Figuren wie z. B. die Vierecke GHNE und GFJE (Fig. 151) lassen sich nur dadurch zwischen dieselben Gränzen bringen, daß man die eine umklappt d. h. rechts in links oder oben in unten und umgekehrt verwandelt. Aber auch nur ebene Figuren haben die Eigenschaft, daß durch ein solches Umklappen weiter keine Veränderung mit ihnen vorgeht als eine einfache Verwandlung des Rechts in Links und umgekehrt. In symmetrischen Raumgebilden von drei Dimensionen dagegen hat ein solches Umwenden immer eine zweifache d. h. auf zwei Dimensionen des Raumes sich erstreckende Verwechslung des Rechts und Links oder des Oben und Unten zur Folge, was man daher auf der einen Seite gewinnt, verliert man wieder auf der andern.

Anmerk. des Uebers.

**) Unser Verfasser erklärt Prisma als den Körper, der von mehrern Flächen dergestalt begränzt wird, daß zwei von ihnen congruent und parallel sind — eine Erklärung, die offenbar zu weit ist, weshalb ich mir die obige Abänderung erlaubt habe.

Anm. des Uebers.

Die parallelen Flächen heißen auch Endflächen oder Grundflächen, die übrigen Seitenflächen.

Eucl. XI, Erkl. 13. — L. G. VI, Erkl. 4.

Zus. 1. Die Seitenflächen eines jeden Prisma sind Parallelogramme; und die Endflächen congruent.

425, Zus. 2.

Zus. 2. Ein Prisma heißt dreiseitig, vierseitig, fünfseitig &c. je nachdem jede seiner Endflächen ein Dreieck, Viereck, Fünfeck &c. ist.

L. G. VI, Erkl. 8.

Zus. 3. Ein Prisma heißt rechtwinkelig, oder senkrecht, oder gerade, wenn die sämmtlichen Seitenflächen rechtwinkelig, also Rechtecke sind, und mithin senkrecht auf den Endflächen stehen. Schiefwinkelig dagegen, oder schief ist jedes Prisma, dessen Seitenflächen Rhomboide sind.

Ein Prisma kann regelmäßig genannt werden, wenn es rechtwinkelig und seine Endflächen regelmäßige Vielecke sind.

L. G. VI, Erkl. 6.

Zus. 4. Jedes vielseitige Prisma läßt sich in so viel dreiseitige zerlegen, in so viel Dreiecke sich jede Endfläche durch Diagonalen theilen läßt; also ein n seitiges in $n-2$ dreiseitige.

Fig. 210.

Anmerkung 1. Man pflegt wohl auch ein Prisma so zu betrachten, daß man sich dasselbe aus der Bewegung einer seiner Endflächen entstanden denkt. Diese Endfläche muß sich dann mit sich selbst parallel d. h. so bewegen, daß je zwei ihrer Puncte ein Paar Parallellinien beschreiben.

Anmerkung 2. Wir werden in dem Folgenden zu Grundflächen eines Prisma keine andern annehmen als diejenigen, welche wir vorher mit diesem Namen oder mit dem der Endflächen belegt haben. Euclides betrachtet bald eine dieser Flächen als Grundfläche, bald aber auch eine der Seitenflächen, wie man deutlich aus seinem 40ten Satze des eilften Buches ersieht. Man muß auf diesen Umstand achten, um nicht in Irrthümer zu verfallen.

Zus. 5. Aus der in 438 aufgestellten Erklärung ähnlicher Körper ergiebt sich, daß zwei Prismen ähnlich sind, wenn sowohl ihre Endflächen als ihre Seitenflächen beziehungsweise ähnlich sind, also auch je zwei Kanten des einen Körpers verhältnißgleich mit den entsprechenden Kanten des andern sind.

441. Erklärung. Parallelepipedum heißt jedes Prisma, dessen Endflächen Parallelogramme sind, welches also von sechs Parallelogrammen dergestalt begränzt wird, daß je zwei gegenüberstehende einander parallel sind.

Ein Parallelepipedum heißt rechtwinkelig, wenn alle seine Gränzflächen Rechtecke und mithin auch rechtwinkelig verbunden sind; schiefwinkelig ist ein solcher Körper, wenn seine Seitenflächen schiefwinkelig und mithin auch unter schiefen Winkeln verbunden sind*).

L. G. VI, Erkl. 9.

*) Die von dem Verfasser hier gemachte Eintheilung der Parallelepipeda ist wohl nicht ganz passend zu nennen schon darum, weil bei ihr eine Art von P. ganz unberücksichtigt gelassen ist. Es giebt nämlich auch solche P., von deren Gränzflächen ein Paar rechtwinkelig, die andern schiefwinkelig sind. Solche P. pflegt man wohl auch einfach verschobene zu nennen, und könnte daher den (nach unsers Verfassers Bezeichnung) schiefwinkeligen den Namen der doppelt verschobenen und den rechtwinkeligen den der nicht verschobenen geben. Oder man könnte auch die P. in senkrecht-rechtwinkelige, in senkrecht-schiefwinkelige und in doppelt schiefe einthei-

Anmerkung 1. Dieses Polyeder heißt Parallelepipedum, weil je zwei seiner Gegenflächen parallel sind.

Zus. 1. Je zwei Gegenflächen eines Parallelepipedums sind congruent, und je vier Kanten gleich und parallel.

L. G. VI, 4.

Anmerkung 2. Euclides beweist (XI, 24), daß wenn ein Polyeder von Gränzflächen umschlossen, die sämmtlich paarweise parallel, je zwei Gegenflächen congruente Parallelogramme sein müssen. Einen solchen Körper nennt Euclides im folgenden Satze Parallelepipedum ohne weitere vorausgeschickte Erklärung.

Anmerkung 3. Man sieht hieraus, wie man die sechs Rechtecke, welche die Gränzflächen eines senkrecht = rechtwinkeligen Parallelepipedums bilden, in derselben Ebene so construiren könne, um durch ein bloßes Umklappen derselben das P. selbst zu erhalten. Man construirt nämlich zuerst vier Rechtecke (1, 2, 3, 4 Fig. 211) so, daß je zwei sich zunächst liegende eine Seite gemeinschaftlich haben, und das erste dem dritten, so wie das zweite dem vierten congruent ist. Alsdann beschreibt man noch zwei congruente Rechtecke zu beiden Seiten des zweiten, in *) denen die Seiten, die sie nicht mit dem zweiten gemein haben, den Seiten des ersten oder dritten gleich sind, die sie nicht mit den andern gemeinschaftlich haben. Auf ähnliche Weise verhält es sich mit schiefen Parallelepipeden.

Anmerkung 4. Man kann ein Parallelepipedum dadurch entstanden betrachten, daß eine seiner Gränzflächen sich mit sich selbst parallel bewegt.

Zus. 2. Man sagt: ein Parallelepipedum sei aus drei Geraden (AN, NK, NM Figg. 214 und 215) construirt, wenn je vier solche Kanten desselben, die zwischen zwei Gegenflächen enthalten sind, gleiche Länge mit einer dieser Linien haben. Ein Parallelepipedum aus drei gegebenen Geraden ist daher nicht vollkommen bestimmt weder seiner Größe noch seiner Gestalt nach, sondern wird dieß erst dann, wenn auch die Winkel der Gränzflächen bestimmt sind. Also ein senkrecht-rechtwinkeliges Parallelepipedum aus drei bestimmten Geraden wird eine beständige, sich gleich bleibende Größe und Gestalt haben.

Anmerkung 5. Der Inhalt dieses Zusatzes kömmt dem sehr nahe, was früher in der dritten Anmerkung zu der in 69 aufgestellten Erklärung gesagt ist.

Zus. 3. Sind zwei Parallelepipeda ähnlich, also auch je zwei entsprechende Gränzflächen ähnlich (438), so sind nothwendig auch je zwei entsprechende Kantenwinkel gleich und die drei bestimmenden Kanten des einen Körpers denen des andern proportionirt. — Zwei senkrecht = rechtwinkelige Parallelepipeda sind ähnlich, wenn ihre bestimmenden Kanten einzeln verhältnißgleich sind.

442. **Erklärung.** Sind die sechs Gränzflächen eines Parallelepipedums Quadrate, also alle unter einander congruent, so führt das Parallelepipedum den besondern Namen: **Würfel** oder **Cubus**.

L. G. VI, Erkl. 10.

Zus. 1. Ein über einer Geraden beschriebener Würfel, oder, wie man auch der Kürze halber sagt, der Würfel von einer Geraden ist also derjenige, der diese Linie selbst zur Höhe, und das Quadrat derselben

---

len, je nachdem entweder die Seitenflächen senkrecht auf den Endflächen und diese selbst rechtwinkelig, oder zweitens, die Seitenflächen zwar senkrecht auf den Grundflächen aber diese selbst schiefwinkelig, oder endlich die Seitenflächen schief auf den Grundflächen und diese selbst schiefwinkelig. Anm. des Uebers.

*) Die Bestimmung, die in den Worten von hier an bis zu Ende enthalten ist, fehlt bei dem Verfasser, aber offenbar durch ein bloßes Versehen, daher ich sie noch hinzugefügt habe.

Anm. des Uebers.

zur Grundfläche hat. Ein Würfel unterscheidet sich also von einem Parallelepipedum dadurch, daß nicht bloß seine drei bestimmenden Kanten gleich, sondern auch seine Kantenwinkel alle Rechte sind.

Eucl. XI, Erkl. 25.

Zus. 2. Alle Würfel sind einander ähnlich.

441, Zus. 3.

443. Erklärung. Diagonalen eines Prisma oder Parallelepipedums heißen die Geraden (AE, BF Fig. 212), welche die Scheitel zweier Gegenecken verbinden.

L. G. VI, Erkl. 15.

444. Lehrsatz. Jedes Parallelepipedum wird durch eine Diagonalfläche (BDFG Fig. 212) d. h. durch eine Ebene, welche man durch die Diagonalen (BD, GF) zweier Gegenflächen legt, in zwei symmetrische (439, Anm.) Theile getheilt.

Eucl. XI, 28. — L. G. VI, 6.

Beweis. Aus 56 und 441, Zus. 1.

Zus. 1. Diese beiden Theile sind dreiseitige Prismen.

Anmerkung. Die Ebene BDFG geht auch durch die parallelen Gegenkanten BG und DF; daher man auch unsern Satz zuweilen so ausspricht: Legt man in einem Parallelepipedum eine Ebene durch zwei parallele Gegenkanten, so wird dasselbe in zwei symmetrische dreiseitige Prismen getheilt.

Zus. 2. Daher ist ein dreiseitiges Prisma die Hälfte des Parallelepipedums, dessen Grundfläche das Parallelogramm ist, welches die Grundfläche des Prisma zu einem seiner Diagonaldreiecke hat, und dessen Gegenflächen die beiden Seitenflächen des Prisma sind, die nicht durch die Diagonale der Grundfläche des Parallelepipedums gehen.

Zus. 3. Die Diagonalen (443) jedes Parallelepipedums haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, in welchem sie sich gegenseitig halbiren. Eben so ist es mit den drei Geraden, welche die Mittelpuncte je zweier Gegenflächen verbinden.

Eucl. XI, 39. — L. G. VI, 3.

445. Lehrsatz. Schneidet man ein Parallelepipedum (BF Fig. 213) mit einer Ebene (GC), welche parallel mit zwei gegenüberliegenden Seitenflächen (BH, DF), so verhalten sich die beiden Stücke (BG, GD) des Parallelepipedums zu einander wie ihre Grundflächen (JG, GM).

Eucl. XI, 25.

Vorbereitung zum Beweis. Verlängere die Kanten FGH und MNJ über beide Endpuncte hinaus, nimm auf der Seite von GH eine beliebige Menge gleicher Theile und zwar gleich GH, auf der andern Seite eine beliebige Menge, jeden gleich FG; vollende nicht nur die Parallelogramme HP, QU ꝛc., und Md, Ec ꝛc., sondern auch die Parallelepipeda HM, QR ꝛc., Dd, Vc ꝛc., von denen offenbar diejenigen, die an derselben Seite des Urparallelepipedums liegen, alle unter einander congruent sind (441).

Beweis. Aus 148.

Anmerkung. Unser Beweis ist ganz ähnlich dem, welchen wir zur Begründung eines Lehrsatzes im vierten Buche (200) gebraucht haben. Beide Lehrsätze stimmen also in ihrem Wesen sehr mit einander überein.

446. **Lehrsatz.** Parallelepipeda (MB, NE Fig. 214 und 215) die auf derselben Grundfläche (KLMN) stehen und gleiche Höhe haben, also zwischen denselben parallelen Ebenen liegen, sind inhaltsgleich.
Eucl. XI, 29, 30. — L. G. VI, 9.

Erster Fall. Fig. 214. Sowohl die beiden Parallelogramme AHMN und JNMF als auch BKLD und CKLE sollen in einerlei Ebene liegen, in verschiedenen Ebenen aber ABKN und JCKN, so wie HDLM und FELM.

Vorbereitung. OP sei der Durchschnitt der Ebenen HDLM und JCKN.

Beweis. Das Prisma ABCJNK ist, wie man leicht zeigen kann, inhaltsgleich dem Prisma HDEFML; zieht man daher von beiden das gemeinschaftliche Prisma HDCJOP ab, und addirt zu diesen Resten das Prisma KNOPML hinzu, so ist die Richtigkeit unseres Satzes dargethan.

Zweiter Fall. Fig. 215. Wenn das eine Parallelepipedum NE gegen das andere MB doppelt verschoben ist, so daß nicht nur die Parallelogramme JCKN und FELM in andern Ebenen liegen als die Parallelogramme ABKN und HDLM, sondern auch die Parallelogramme NJFM und KCEL in andern Ebenen als AHMN und BDLK.

Vorbereitung. Verlängere die Linien EC, FJ, AB, HD, so daß sie sich in den Puncten P, Q, R, O schneiden; dadurch entsteht ein Parallelepipedum PQRLMO, welches sowohl gegen das eine als gegen das andere unserer in Rede stehenden Parallelepipeda NE, MB nur einfach verschoben ist.

Beweis. Aus dem ersten Fall.

Anmerkung 1. Daß Parallelepipeda, die gleiche Höhe haben, sich zwischen dieselben parallelen Ebenen legen lassen, folgt aus 425, und 442, Zus. 1.

Anmerkung 2. Der Beweis für den ersten Fall unseres Satzes ist, wie man sieht, ganz ähnlich dem frühern in 82.

Zus. Ein doppelt schiefes Parallelepipedum ist daher inhaltsgleich mit einem senkrecht-rechtwinkeligen (441, Anm.), welches mit jenem dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat, dessen Seitenkanten also gleich der Höhe des doppelt schiefen Parallelepipedums sind.

447. **Lehrsatz.** Parallelepipeda sind inhaltsgleich, wenn sie auf verschiedenen aber gleichgroßen Grundflächen (EG und AO Fig. 216) stehen und gleiche Höhen haben.
Eucl. XI, 31. — L. G. VI, 10.

Vorbereitung. Verlängere FG so, daß HM gleich der Grundlinie des Parallelogramms AO wird; beschreibe über GM das Parallelogramm GK, welches congruent mit AO; ziehe durch M die Gerade PMQ || CG und vollende die Parallelogramme LM und GP, so ist LM = GK = AO.

Man denke sich nun über GK ein Prpd. beschrieben, welches dem über AO congruent ist; also auch gleiche Höhe mit dem Prpd. über EG hat; endlich denke man sich für eben diese Höhe zwei Prpd. beschrieben über LM und GP, und zwar durch Erweiterung der Seitenebenen EC, FG, CG des Prpd. EG, mit denen man parallele Ebenen durch LQ und PMQ legt.

Beweis. Durch Anwendung des vorvorigen Lehrsatzes sowohl auf die Prpd. über EG und CM, als auch auf die über CM und LM, in Verbindung mit den frühern Sätzen 155 und 156, gewinnt man den Satz:

Prpd. über EG : Prpd. über GQ = Prllgr. EG : Prllgr. GQ, also, da nach Voraussetzung Prllgr. EG = Prllgr. GQ auch Prpd. über EG = Prpd. über GQ. Die Prpd. über GK und GQ kann man aber offenbar als solche betrachten, die über derselben Grundfläche, nämlich dem durch GM gehenden bisher als Seitenfläche betrachteten Prllgr., und für diese gemeinschaftliche Grundfläche liegen die Prpd. zwischen denselben parallelen Ebenen, es ist also:

Prpd. über GK = Prpd. über GQ = Prpd. über EG.

Zus. Ein Prpd. ist daher immer inhaltsgleich mit einem senkrecht-rechtwinkeligen Prpd., welches mit ihm gleiche Höhe und gleich große Grundfläche hat. Für die Inhaltsbestimmungen aller Parallelepipeda, wie sie auch immer beschaffen sein mögen, kann daher der Inhalt eines senkrecht-rechtwinkeligen Prpd. als Maaß dienen, dessen Grundfläche gleich groß mit der des gegebenen und dessen Seitenkanten gleich der Höhe des letzteren sind.

L. G. VI, 11.

448. Lehrsatz. Parallelepipeda von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Eucl. XI, 32. — L. G. VI, 13.

Vorbereitung. Wie beim vorigen Lehrsatz. Fig. 216.

Bew. Aus 447, der zweimaligen Anwendung von 445 und 156.

449. Lehrsatz. Parallelepipeda (P und P′), die auf congruenten Grundflächen stehen, verhalten sich wie ihre Höhen.

L. G. VI, 12.

Vorbereitung. Es sei das senkrecht-rechtwinkelige Prpd. HE (Fig. 218) inhaltsgleich mit dem einen P unserer gegebenen Prpd.; auf der einen Kante HA nehme man HJ gleich der Höhe des andern Prpd. P′; und lege durch J die Ebene JKEL parallel mit HMFG; alsdann sei das Prpd. HE inhaltsgleich mit dem zweiten P′ unserer gegebenen.

Bew. Prpd. HE : Prpd. JC = Prllgr. HK : Prllgr. JB (445) also auch: Prpd. HC : Prpd. HE = Prllgr. HB : Prllgr. HK (153) folglich: P : P′ = HA : HJ (201).

450. Lehrsatz. Parallelepipeda, die weder gleiche Grundflächen noch gleiche Höhen haben, stehen im zusammengesetzten Verhältnisse dieser Grundflächen und Höhen.

L. G. VI, 14.

Vorbereitung. Es seien die senkrecht-rechtwinkeligen Prpd. (AHC und PNO Fig. 218) beziehungsweise unsern gegebenen Prpd. P und P″ inhaltsgleich; eine Annahme, die nach 446, Zus., immer gestattet ist. Nimm auf HA das Stück HJ = NP, und lege durch J die Ebene JKEL parallel mit HMFG.

Beweis. Aus 448 und 449 und 155.

Anmerkung 1. Die beiden vorhergehenden Sätze (448 und 449) sind offenbar nichts anders als besondere Fälle von diesem unserm Satz; allein letzterer läßt sich nicht ohne Hülfe der erstern erweisen, also nicht eher, als bis jene beiden schon bewiesen sind. Es sind früher schon mehrere ähnliche Fälle da gewesen, namentlich gehört hieher der Lehr-

satz 202 im vierten Buche, der auch seiner ganzen Natur nach mit unserm in Rede stehenden Lehrsatze auf das engste verwandt ist.

Zus. 1. Sind Prpda, die ungleiche Grundflächen und Höhen haben, inhaltsgleich, so verhalten sich ihre Höhen umgekehrt wie die Grundflächen.

Eucl. XI, 34.

Anmerkung 2. Euclides beweist diesen Satz fast auf dieselbe Weise, wie den 23ten Satz seines sechsten Buches, die wir früher 202, Anm. 2 angedeutet haben. Seine Vorbereitung ist gleich der unsrigen; und seine Schlußweise folgende: Es sei P ein Prpd., welches mit dem Prpd. AF (Fig. 218) inhaltsgleich, und dessen Grundfläche g, seine Höhe h sei, in dem Prpd. HE sei JH = h.

Alsdann ist: Prpd. JF : P = Prllgr. HF : g
also auch: Prpd. JF : Prpd. AF = Prllgr. HF : g
Aber Prpd. JF : Prpd. AF = Prllgr. JM : Prllgr. AM
= JH : AH,
= h : AH,

also: Prllgr HF : g = h : AH.

Zus. 2. Verhält sich daher (Fig. 218)

Prllgr. HF : Prllgr. NO = m . n : 1

und faßt die Höhe AH des Prpd. AF die Höhe des Prpd. Z rmal in sich, so ist:

Prpd. AF : Prpd. Z = m . n . r : 1

mithin ist es die Zahl m . n . r, wodurch der Inhalt des Prpd. AF ausgedrückt wird, wenn man das Prpd. Z als Einheit oder gemeinschaftliches Maaß annimmt, d. h. der Inhalt des Prpd. AF schließt den des Prpd. Z so vielmal in sich, als die Zahl m . n . r Einheiten hat.

Durchweg nimmt man zu dem Prpd., welches man als Maaßstab oder Einheit gebraucht, ein solches, was nicht bloß senkrecht-rechtwinkelig ist, aus dem in 447, Zus. enthaltenen Grunde, sondern dessen Grundflächen überdieß Quadrate sind, — der Grund davon liegt in 203, Zus. 1 — und dessen Höhe endlich der Seite der Grundfläche gleich ist — kurz man gebraucht zur Bestimmung des körperlichen Inhaltes aller Parallelepipeda als Maaßstab einen Würfel, dessen Seite die Einheit ist, durch welche man die Kanten AH, HG, FG d. h. die Längen mißt, durch welche der Inhalt des Prpd. bestimmt wird. Diese Einheit ist also ein Längeneinheit wie z. B. Linie, Zoll, Fuß, Ruthe ꝛc. Den Würfel, dessen bestimmende Seite diese Längeneinheit ist, nennt man zur nähern Bestimmung Cubikeinheit, und muß sie von Quadrateinheiten, die als Maaßstab für Flächen dienen, und von Längeneinheiten, die beim Ausmessen von Linien gebraucht werden, wohl unterscheiden. Sagt man also, der Inhalt eines Prpd. betrage z. B. 10 Fuß, so bedeutet dieß so viel als dieser Inhalt sei zehnmal so groß als der Inhalt des Würfels, dessen Seite einen Fuß Länge hat.

Zus. 3. Daher stehen zwei cubische Einheiten verschiedener Ordnungen in dem dreifach hohen Verhältnisse der ihnen entsprechenden Längeneinheiten. — Ist z. B. das Verhältniß eines Zolles zu einem Fuß = 1 : 12, so ist das Verhältniß eines Cubikzolles zu einem Cubikfuß = $1^3 : 12^3$ = 1 : 1728 oder mit andern Worten, enthält ein Fuß zwölf Zolle, so gehen auf einen Cubikfuß 1728 Cubikzolle.

Eucl. VIII, 12.

Anmerkung 3. Man sieht hieraus auch, wie man mit Euclides (VII, Erkl. 17) das Product aus drei Zahlen eine Körper-Zahl (numerus solidus) nennen könne, de-

ren Seiten eben die drei Factoren sind, aus denen sie gebildet wird. Körperzahlen sind also im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Seiten. Aehnlich sind zwei Körperzahlen, wenn die drei Seiten der einen denen der andern proportionirt sind (Eucl. VII, Erkl. 21).

Zus. 4. Aus dem zweiten Zusatze sieht man auch, in welchem Sinne man sagen könne:

1) daß durch das Product dreier Geraden das aus ihnen, als bestimmenden Kanten, construirte senkrecht-rechtwinkelige Parallelepipedum dargestellt werde; und daß mithin das Verhältniß, welches aus drei andern zusammengesetzt ist, dargestellt werde durch das Verhältniß der beiden Parallelepipeda, welche man aus den die einzelnen einfachen Verhältnisse darstellenden Linien beschreibt; und daß eben so das dreifach hohe Verhältniß eines andern durch das Verhältniß der Würfel ausgedrückt werde, deren Seiten die Glieder des einfachen Verhältnisses sind.

L. G. VI, 14.

2) daß der cubische Inhalt eines Parallelepipedums ausgedrückt werden könne, durch das Product seiner Grundfläche und Höhe, und daß dieß im Grunde auf eins hinauskomme mit dem Zusatze unseres früheren Satzes 447; und

3) daß auf ähnliche Weise der cubische Inhalt eines Würfels ausgedrückt werden könne, durch die dritte Potenz seiner Seite.

Dabei aber findet auch hier das volle Anwendung, was wir schon im vierten Buche, in der 5ten Anmerkung zu Satz 203 gesagt haben.

Zus. 5. Ist also die Zahl, durch welche der Inhalt eines Würfels dargestellt wird, keine Cubikzahl, so ist die Seite desselben stets incommensurabel zur Seite des als Einheit dienenden Würfels, oder, was dasselbe ist, zu der Längeneinheit, welche diese Seite mißt.

Zus. 6. Bezeichnen J und i die cubischen Inhalte zweier Parallelepipeda, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen, so ist unserem Hauptsatze zufolge:

$$J : i = G \,.\, H : g \,.\, h$$

Hieraus folgt:

1. Sind entweder die Grundflächen, oder die Höhen, aber nicht beide zugleich, incommensurabel zu einander, so sind es auch die cubischen Inhalte d. h. es giebt keine Körpergröße, welche für sie gemeinschaftliches Maaß werden könnte.

2. Sind aber Grundflächen und Höhen zugleich incommensurabel zu einander, so können die cubischen Inhalte gar wohl commensurabel sein.

Wäre z. B. (Fig. 124)

$$AF_q : BF_q = 15 : \sqrt{60} \text{ (203, Zus. 10)}$$

und man dächte sich über diesen Quadraten als Grundflächen zwei Parallelepipeda construirt, deren Höhen sich verhielten wie $\sqrt{5} : \sqrt{3}$, also incommensurabel zu einander wären, wie die Grundflächen, so verhielten sich die Parallelepipeda

wie $15\sqrt{5} : \sqrt{60} \,.\, \sqrt{3}$ oder wie $15\sqrt{5} : \sqrt{180}$, oder
wie $15\sqrt{5} : \sqrt{36} \,.\, \sqrt{5} = 15\sqrt{5} : 6\sqrt{5}$
$= 15 : 6$
$= 5 : 2$

wären also commensurabel zu einander.

3. Würfel können auch incommensurabel zu einander sein, und es findet dieß namentlich immer dann Statt, wenn ihre Seiten incommensurabel in Länge, aber commensurabel in Potenz sind z. B. die Würfel, die über der Seite und Diagonale eines Quadrates beschrieben werden. Würfel sind dagegen stets commensurabel zu einander, wenn ihre Seiten entweder in Länge commensurabel sind, oder durch die Cubikwurzeln aus commensurabeln Zahlen dargestellt werden z. B. durch $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{3}$.

451. Lehrsatz. Aehnliche Parallelepipeda, also auch alle Würfel, stehen im dreifach hohen Verhältniß ihrer entsprechenden Kanten.
Eucl. XI, 33.

Beweis. Aus 450, 219, Zus. 1, 156 und 160.

Anmerkung 1. Wir haben früher schon (136, Anm.) bemerkt, daß der Ausdruck dreifach hohes Verhältniß bei Euclides eine ganz andere Bedeutung zu haben scheint, als bei uns, haben aber später (160, Anm.) nachgewiesen, daß beide Bedeutungen in der That auf Eins hinauskommen. Hält man sich streng an die Euclidische Definition vom dreifach hohen Verhältniß, so muß man beweisen, daß die beiden in Rede stehenden Prpda das erste und letzte Glied einer Reihe von vier stetig proportionirten Prpden sind und daß außerdem das erste und zweite in dieser Reihe sich eben so zu einander verhalten, wie ein Paar entsprechende Kanten des ersten und letzten.

Es seien also zwei ähnliche Prpda P und P''' gegeben; die Kanten, welche die Seiten der Grundflächen bilden, seien in dem erstern a, b, in dem andern a''', b''', die Längen der die Grundflächen verbindenden Kanten seien respective c und c'''. Man denke sich nun zwei andere Prpda, P' und P'', welche den beiden erstern ähnlich sind; und von denen jenes a, b, c''', dieses a, b''', c''' zu Kanten hat. Die Prpda P, P' haben nun offenbar gleiche Höhe, wenn man die Parallelogramme aus den Kanten a, c und aus a, c''' als Grundflächen betrachtet; eben so haben die Prpda P' und P'' gleiche Höhe für die Grundflächen aus a, b und aus a, b''', und endlich auch P'' und P''' haben gleiche Höhe für die Grundflächen aus a, b''' und aus a''', b'''; es ist demnach unserm Satz 448 zufolge:

$$P : P' = \text{Prllgr. aus } a, c : \text{Prllgr. aus } a, c''' = c : c'''$$
$$P' : P'' = \text{Prllgr. aus } a, b : \text{Prllgr. aus } a, b''' = b : b'''$$
$$P'' : P''' = \text{Prllgr. aus } a, b''' : \text{Prllgr. aus } a''', b''' = a : a'''$$

mithin ist:

$$P : P' = P' : P'' = P'' : P''', \text{ also auch}$$
$$P : P''' = P^3 : P'^3 = a^3 : a'''^3 = b^3 : b'''^3 = c^3 : c'''^3 \quad (160)$$

Zus. 1. Der über einer Linie beschriebene Würfel entspricht also dem, was man auch dritte Potenz dieser Linie nennen kann, und was nichts anders als die dritte Potenz der Zahl ist, welche die Seite des Würfels mißt. Man sehe 122, und 450, Zus. 4.

Zus. 2. Sind vier Linien proportionirt, so sind es auch die vier ähnlichen Parallelepipeda, welche diese Linien zu entsprechenden Kanten haben, und umgekehrt.
Eucl. XI, 37.

Bew. Aus dem Hauptsatze in Verbindung mit 155, Zus. 1.

Zus. 3. Vergleicht man unsern Hauptsatz mit dem zweiten und dritten Zusatz des vorigen Lehrsatzes, so sieht man, in welchem Sinne Euclides VIII, 19 sagen konnte: „ähnliche Körperzahlen stehen im dreifach hohen Verhältnisse ihrer entsprechenden Seiten" und VIII, 27: „solche Körperzahlen verhalten sich wie eine Cubikzahl zu einer Cubikzahl."

Zus. 4. Sind drei Linien stetig proportionirt, so ist das Prpd., welches dieselben zu Kanten hat, inhaltsgleich mit dem Prpd., dessen

Kanten alle der mittlern jener drei Geraden gleich sind; und welches mit dem erstern gleichwinkelig ist, so daß also nicht nur die Winkel der Grundflächen in beiden gleich sind, sondern auch die Seitenflächen gleiche Neigungen gegen die Grundflächen haben. — Also ist der Würfel, welchen man über der mittlern solcher drei Linien beschreibt, inhaltsgleich mit dem senkrecht-rechtwinkeligen Prpd., welches die drei Geraden zu seinen bestimmenden Kanten hat.

Eucl. XI, 36.

Anmerkung 2. Um also ein senkrecht-rechtwinkeliges Prpd. zu erhalten, welches inhaltsgleich mit einem gegebenen Würfel, dessen Seite $= b$ ist, nehme man eine beliebige Gerade a, suche zu dieser und b die dritte Proportionale c, so sind a, b, c die bestimmenden Kanten des Prpd. — Es lassen sich, wie man hieraus sieht, unendlich viele Prpda finden, welche die verlangte Eigenschaft haben.

Anmerkung 3. Um die Höhe (x) eines Prpd. zu finden, das ein gegebenes Quadrat (a^2) zur Grundfläche hat und mit einem gegebenen Würfel (b^3) inhaltsgleich ist, suche man zuerst, nach Anleitung von 254, Zus. ein Paar Linien (g, h), welche das Verhältniß der beiden Flächen a^2 und b^2 darstellen, und dann zu diesen Linien g, h und der Würfelseite b eine vierte Proportionale, so ist letztere die Höhe x des Prpd.

Denn: $a^2 : b^2 = g : h$, also auch

$$a^2 . x : b^3 = g . x : b . h,$$

also, weil $g . x = b . h$, auch $a^2 . x = b^3$

Anmerkung 4. Sollte das Prpd., dessen Höhe gesucht wird, zu seiner Grundfläche nicht ein Quadrat, sondern ein Rechteck haben, dessen bestimmende Seiten a und a' wären, so kann dieser Fall auf den vorigen einfach dadurch zurückgeführt werden, daß man zuerst zwischen a und a' eine mittlere Proportionale sucht und mit dieser nun eben so verfährt, wie vorher mit der Quadratseite.

Zus. 5. Sind vier Linien stetig proportionirt, so verhalten sich die Würfel, welche die beiden ersten dieser Linien zu Seiten haben, eben so zu einander, wie die erste Linie zur vierten.

Bew. Aus dem Hauptsatz in Verbindung mit 160.

Anmerkung 5. Hieraus sieht man, in welchem Sinne Euclides VIII, 19 und 21 sagen konnte, daß zwischen zwei ähnliche Körperzahlen immer zwei mittlere Proportionalen fallen, und umgekehrt, daß zwei Zahlen ähnliche Körperzahlen sind, wenn zwischen ihnen zwei mittlere Proportionalen liegen.

Anmerkung 6. Ferner folgt aus unserm Zusatze, daß die berühmte Aufgabe von der Verdoppelung eines Würfels lediglich auf der Aufgabe beruht, zwei mittlere Proportionalen zu finden zwischen zwei Linien, von denen die eine doppelt so groß als die andere ist. Denn ist z. B. $a : x = x : y = y : 2a$, so ist nach unserm Zusatze: $a^3 : x^3 = a : 2a = 1 : 2$, und daher $x^3 = 2a^3$. Aber eine streng geometrische Lösung jener Aufgabe, die beiden mittlern Proportionalen betreffend, ist unmöglich. Siehe die Anmerkung zu Aufgg. III, 9, und die Anmerk. zu 481.

Anmerkung 7. Auch die Construction eines Würfels, der mit einem gegebenen senkrecht-rechtwinkeligen Prpd. inhaltsgleich ist, hängt von dem Auffinden zweier mittlern Proportionalen ab. Denn es seien a, b, c die Kanten des Prpd., x die gesuchte Würfelseite. Alsdann ist: $x^3 = abc$, und, wenn $a : d = d : b$, $x^3 = d^2c$. Sind nun e und f zwei mittlere Proportionalen zwischen d und c, so ist die erstere gleich der gesuchten Würfelseite, oder: $x = e$. Denn weil $d : e = e : f = f : c$, so ist $d^3 : e^3 = d : c$, also $e^3 = d^2c = x^3$; und mithin $x = e$.

Anmerkung 8. Nicht minder bedarf man auch dann zweier mittlern Proportionalen, wenn man einen Würfel construiren soll, der so groß ist, als zwei oder mehrere gegebene Würfel zusammen. Wären z. B. die beiden Würfel a^3 und b^3 gegeben, und man sollte die Seite y eines dritten finden, so daß $y^3 = a^3 + b^3$, so nehme man eine beliebige Gerade e, und suche (Anmerk. 2) die Höhen h und h' der beiden Parallelepipeda, welche e^2 zur Grundfläche haben und beziehungsweise den Würfeln a^3 und b^3 inhaltsgleich sind. Sind nun f und g die beiden mittlern Proportionalen zwischen e und $h + h'$, so ist die erstere die gesuchte Würfelseite, oder $y = f$.

Denn $a^3 + b^3 = e^2 (h + h')$, und, weil $e : f = f : g = g : h + h'$, also auch $e^3 : f^3 = e : h + h'$, $f^3 = e^2 (h + h') = a^3 + b^3 = y^3$.

Anmerkung 9. Bei den in den vorigen Anmerkungen behandelten Aufgaben ist natürlich von einer Auflösung im streng geometrischen und nicht im arithmetischen Sinne die Rede. Für eine Auflösung dieser letztern Art, wo man für die Seite des gesuchten Würfels einen entweder völlig oder blos annähernd genauen Zahlwerth findet, würde man bei dem Fall in Anmerkung 7 erhalten haben: $x = \sqrt[3]{abc}$, und bei dem in Anmerk. 8, $y = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$.

452. **Lehrsatz.** Theilt man eine Gerade (AG Fig. 217) in zwei beliebige Stücke (AJ, JG), so ist der über der ganzen Linie beschriebene Würfel so groß als die beiden über den Seitenstücken construirten Würfel und die dreifache Summe der beiden Parallelepipeda, von denen jedes das Quadrat eines der Stücke zur Grundfläche und das andere zur Höhe hat, zusammen genommen; d. h. es ist, wenn a und b die Stücke unserer Linie bezeichnen:

$$(a + b)_c = a_c + b_c + 3\ a_p a_p b + 3\ a_p b_p b\ ^{*)}$$

Beweis. Es sei AF das Quadrat, und AZ der Würfel für die Seite AG.

Nimmt man GX = GJ, und zieht XM || GA, JT || GF, so ist:

1) Prllgr. HL = AJ_q
2) Prllgr. AL = $AJ_r JG$ = Prllgr. LF } (74)
3) Prllgr. JX = GJ_q

Legt man nun durch MX und JT zwei Ebenen PMXV und JaUT, welche senkrecht auf der Grundfläche stehen, und sich in QL schneiden, so wird dadurch der Würfel AZ in vier Prpda zerlegt, welche alle einerlei Höhe mit dem Würfel selbst, und zu Grundflächen die vorher näher bezeichneten Stücke seiner Grundfläche haben. Endlich nehme man AK = AJ, lege durch K die Ebene KRWb parallel der Grundfläche; sie schneide die vorher genannten auf der Grundfläche senkrechten Ebenen in NY und Ss. Durch diese Ebenen wird offenbar jedes der vier schon vorher entstandenen Prpda in zwei Prpda zerlegt, die gleiche Grundflächen, und von denen die vier untern zur Höhe AJ oder a, die vier obern aber JG oder b haben. Der über AG beschriebene Würfel AZ enthält sonach folgende acht Prpda als Bestandtheile:

1. das Prpdum MS, dessen Grundfläche HL = AJ_q, und dessen Höhe NM = AK = AJ d. h. den Würfel von AJ, oder a_c.
2. das Prpdum NU, dessen Grundfläche auch HL, dessen Höhe aber NP = JG = b, d. h. das Prpdum $a_p a_p b$.
3. das Prpdum KL, dessen Grundfläche AL = $AJ_r JG$ und dessen Höhe = a, d. h. das Prpdum $a_p a_p b$.
4. das Prpdum KQ, dessen Grundfläche AL, und dessen Höhe BK = b d. h. das Prpdum $a_p b_p b$.
5. das Prpdum GO, dessen Grundfläche LG = JG_q und dessen Höhe Js = AJ d. h. das Prpdum $a_p b_p b$.
6. das Prpdum sV, dessen Grundfläche sY = JX oder LG und dessen Höhe sa = JG = b d. h. der Würfel über der Seite b oder b_c.

---

*) Diese Bezeichnungen, deren ich mich hier der Kürze und leichteren Uebersicht wegen bediene, sind denen, die ich früher für Quadrate und Rechtecke mir erlaubt habe, ganz analog, und bedürfen daher wohl keiner weitern Erläuterung.
Anm. des Uebers.

7. das Prpdum LW, dessen Grundfläche LF, und dessen Höhe FW = a d. h. das Prpdum $a_p a_p b$.
8. das Prpdum OZ, dessen Grundfläche OW = LF, und dessen Höhe WZ = b d. h. das Prpdum $a_p b_p b$.

Es ist demnach, wie behauptet wurde,

$$(a + b)_c = a_c + b_c + 3\ a_p a_p b + 3\ a_p b_p b.$$

Zus. 1. Hätte man die Gerade AG in zwei gleiche Theile getheilt, während alles Uebrige wie vorher geblieben wäre, so würden die Bestandtheile des Würfels AZ acht congruente Würfel gewesen sein, deren Seiten gleich der Hälfte von AG.

Zus. 2. Da die dritte Potenz einer Zahl den Inhalt eines Würfels darstellt, dessen Seite durch die Zahl selbst gemessen wird, und eben so das Product aus einer Quadratzahl und einer andern gewöhnlichen Zahl den Inhalt eines Prpdums ausdrückt, dessen Grundfläche und Höhe beziehungsweise durch jene Zahlen gemessen werden, so lehrt unser Satz, wie man sieht, auch die Bestandtheile kennen, welche die dritte Potenz einer beliebigen zwei- oder mehrtheiligen Zahlgröße sind, und bietet dadurch ein Mittel dar, die einzelnen Theile der Zahlgröße selbst zu finden, wenn deren dritte Potenz gegeben ist; oder mit andern Worten, auf unserem Satze beruht das Verfahren, für das Ausziehen der Cubikwürzeln. Die dabei befolgte practische Regel ist unmittelbar den Beziehungen entnommen, nach welchen:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\ a^2 b + 3\ ab^2 + b^3$$
$$(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + 3\ (a + b)^2\ c + 3\ (a + b)\ c^2 + c^3$$
$$= a^3 + 3 a^2 b + 3\ ab^2 + b^3 + 3\ (a + b)^2\ c + 3\ (a + b)\ c^2 + c^3$$

rc. Ueber das Weitere sehe man den hieher gehörigen Anhang.

Anmerkung. Unserer eingeführten geometrischen Bezeichnung zufolge ist:

$$(a + b + c)_c = a_c + b_c + c_c + 3 a_p a_p b + 3 a_p b_p b + 3\ (a + b)_p\ (a + b)_p c + 3\ (a + b)_p\ c_p c$$
$$= a_c + b_c + c_c + 3 a_p a_p b + 3 a_p a_p c + 3 a_p b_p b + 6\ a_p b_p c + 3 a_p c_p c + 3 b_p b_p c + 3 b_p c_p c$$

453. Lehrsatz. Ein dreiseitiges Prisma ist die Hälfte eines Prpdums, das mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundfläche das Parallelogramm ist, zu welchem das Dreieck als Diagonaldreieck gehört.

Beweis. Aus 444, Zus. 2 und 446.

Zus. Daher ist ein dreiseitiges Prisma auch inhaltsgleich mit einem senkrecht-rechtwinkeligen Prpdum, dessen Höhe eben so groß als die des Prisma und dessen Grundfläche ein mit der Grundfläche des Prisma gleichflächiges Rechteck ist.

454. Lehrsatz. Jedes beliebige Prisma ist inhaltsgleich mit einem senkrecht-rechtwinkeligen Prpdum, das mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundfläche gleichflächig dem Vieleck ist, welches die Grundfläche des Prisma bildet.

L. G. VI, 15.

Beweis. Aus 440, Zus. 4, und 453, Zus.

Anmerkung 1. Wir nehmen den Ausdruck: Grundfläche des Prisma in der Bedeutung, wie wir sie früher in 440 angegeben haben.

Uebrigens scheint unser Satz im Widerspruche mit dem zu stehen, was Euclides im letzten Satze seines 11ten Buches behauptet, wo es heißt: „Wenn zwei Prismen gleiche

Höhe haben, und die Grundfläche des einen ein Dreieck, die des andern ein Parallelogramm ist, welches doppelt so groß als das Dreieck, so sind diese Prismen inhaltsgleich." Der scheinbare Widerspruch wird dadurch herbeigeführt, daß Euclides sich die allerdings nicht zu billigende Abweichung erlaubt, und stillschweigend in dem einen der in Rede stehenden dreiseitigen Prismen eine der Gränzflächen als Grundfläche betrachtet, die man gewöhnlich nicht dafür anzunehmen pflegt, sondern durch die Benennung Seitenflächen sie den beiden Gegenflächen oder Grundflächen entgegenstellt.

Zus. Der Inhalt der Prismen läßt sich daher auf den Inhalt der Pryden zurückbringen.

Anmerkung 2. Aus 450, Zus. 2 und Zus. 4 sieht man nun auch, in welchem Sinne der von vielen gebrauchte Ausdruck zu nehmen ist, daß der Inhalt eines Prisma gleich dem Producte aus seiner Grundfläche und Höhe sei.

455. Lehrsatz. Prismen von verschiedenen Grundflächen und Höhen stehen im zusammengesetzten Verhältnisse dieser Grundflächen.

L. G. VI, 15, Zus.

Beweis. Aus 454, Zus. und 450.

Zus. 1. Daher sind Prismen inhaltsgleich, wenn sie dieselbe Höhe und gleich große Grundflächen haben.

Zus. 2. Bei Prismen von gleichem Inhalte aber verschiedenen Grundflächen und Höhen verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen und umgekehrt.

Zus. 3. Prismen auf gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen wie ihre Grundflächen.

Zus. 4. Aehnliche Prismen stehen im dreifach hohen Verhältniß ihrer entsprechenden Kanten (440, Zus. 5).

456. Lehrsatz. Der Theil der Oberfläche eines senkrechten Prisma, welcher von den Seitenflächen gebildet wird, ist gleich dem Rechteck, dessen eine Seite gleich der Höhe des Prisma, oder einer Seitenkante und die andere gleich dem Umfange der Grundfläche ist.

Beweis. Aus 440, Zus. 3 und 72.

457. Erklärung. Pyramide heißt dasjenige Polyeder, welches über einem beliebigen Vieleck als Grundfläche von lauter Dreiecken als Seitenflächen dergestalt umschlossen wird, daß dieselben in einen einzigen Punct, welchen man die Spitze der Pyramide nennt, zusammenlaufen.

Eucl. XI, Erkl. 12. — L. G. VI, Erkl. 11.

Zus. 1. Jede Pyramide hat so viel Seitenflächen (die man auch schlechthin Seiten nennt), als die Grundfläche Seiten hat.

Zus. 2. Pyramiden sind also dreiseitig, vierseitig, oder vielseitig, je nachdem ihre Grundflächen Dreiecke, Vierecke, oder Vielecke sind. Jede vielseitige Pyramide läßt sich in dreiseitige zerlegen und zwar ist die Anzahl derselben um zwei kleiner als die Anzahl der Seiten der Grundfläche. So läßt sich z. B. die fünfseitige Pyramide VDEFGJ (Fig. 206) in die drei dreiseitigen Pyramiden: VFGJ, VEFJ und VDEJ zerlegen.

Zus. 3. Eine Pyramide kann regelmäßig heißen, wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck, und alle Seitenflächen gleichschenkelige und congruente Dreiecke sind. Die Senkrechte aus der Spitze auf die Grundfläche, welche die letztere in ihrem Mittelpuncte trifft, kann die Axe der Pyramide heißen.

L. G. VI, Erkl. 14.

Anmerkung. Eine solche Pyramide kann man dadurch erhalten, daß man auf dem

Papiere zuerst die Grundfläche, dann über jeder ihrer Seiten auswärts eines der congruenten Dreiecke beschreibt, welche die Seitenflächen bilden, und zuletzt das Papier auf die geeignete Weise zusammenfaltet.

Zus. 4. Eine Pyramide kann rechtwinkelig genannt werden, wenn eine ihrer Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche steht; also auf letzterer senkrecht auch die beiden Seitenflächen stehen, deren Durchschnittslinie die genannte Kante ist.

Zus. 5. Zwei Pyramiden sind ähnlich, wenn nicht nur die Grundflächen, sondern auch je zwei sich entsprechende Seitenflächen ähnliche Figuren sind.

In solchen Pyramiden sind also auch je zwei sich entsprechende Kanten proportionirt.

L. G. VI, Erkl. 17.

458. Lehrsatz. Schneidet man eine Pyramide (CDBAD Fig. 220) mit einer Ebene (EFG), welche parallel der Grundfläche ist, so ist der Durchschnitt der Grundfläche ähnlich, und die Flächenräume beider ähnlicher Figuren verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

L. G. VI, 16 und Zus.

Beweis. Aus 195 — 144 — 198 — und 205.

Zus. Schneidet man daher zwei gleich hohe Pyramiden, deren Grundflächen in derselben Ebene liegen, durch eine und dieselbe den Grundflächen parallele Ebene, so verhalten sich die Durchschnitte wie die Grundflächen.

459. Lehrsatz. Jede dreiseitige Pyramide läßt sich durch Ebenen, welche man durch die Halbirungspuncte ihrer Kanten legt, in zwei congruente, der Urpyramide ähnliche Pyramiden und in zwei inhaltsgleiche Prismen zerlegen. Diese beiden letztern zusammen sind größer als die Hälfte der gegebenen Pyramide.

Erläuterung. Man erhält die genannten Stücke, wenn man in der Pyramide ABCD (Fig. 220) sowohl die von der einen Ecke A als auch die von einer zweiten Ecke z. B. C auslaufenden drei Kanten halbirt, durch die eine Ternion von Halbirungspuncten E, F, G, und durch die andere E, J, K Ebenen legt, und endlich durch den gemeinschaftlichen Punct E dieser beiden Ebenen die dritte Ebene EFJ, welche auch durch H den Halbirungspunct der Kante BD gehen muß, da FH || AB || EJ. Alsdann sind die beiden Pyramiden AEFG und CEJK, und die beiden Prismen DFHJEK und BHJEFG.

Eucl. XII, 3. — L. G. VI, 17.

Bew. Erster Theil, die beiden Pyramiden betreffend, aus 439.

Zweiter Theil aus 454. Denn construirt man für HJKD und EFHJ als Grund- und Seitenfläche das Prpdum HJKDVUEF, und schneidet es durch die Diagonalebene FHKU, so ist: Prisma BHJEFG $= \frac{1}{2}$ Prpdum BHKJEUFG $= \frac{1}{2}$ Prpdum HJKDVUEF $=$ Prisma HDKJEF.

Dritter Theil. Denkt man sich auch durch HFK eine Ebene gelegt, so ist Pyramide DHFK offenbar $<$ Prisma DHJKFE, also auch Pyramide CEJK $<$ Prisma DHJKFE (439) und Pyramide AGFE $<$ Prisma BHFGEJ.

Anmerkung. Jedes unserer Prismen ist seinem Inhalte nach $\frac{3}{8}$ der Urpyramide — und jede der kleinern ihr ähnlichen $\frac{1}{8}$, was sich aber erst später beweisen läßt. Siehe 465, Zus. 3, Anmerk.

460. Lehrsatz. Wenn man jede von zwei dreiseitigen Pyramiden, welche einerlei Höhe haben, auf die im vorigen Satze angegebene Weise, in zwei ihr ähnliche Pyramiden und zwei Prismen zerlegt, die beiden erhaltenen Pyramiden nun eben so zerlegt, wie die Urpyramiden, die dadurch entstandenen kleinern Pyramiden wiederum, und auf diese Weise beliebig weit fortfährt, so verhält sich die Summe aller durch dieses wiederholte Zerlegen in der einen Pyramide entstandenen Prismen zu eben dieser Summe in der andern, wie die Grundfläche der erstern zur Grundfläche der zweiten.

Eucl. XII, 4.

Beweis. Haben die beiden Pyramiden ABCD und LOSU (Fig. 219 und 220) für die Grundflächen BCD und OSU gleiche Höhen, so ist:

Prisma BGEFHJ : Prisma OMNQPR $= \triangle$ BJH : $\triangle$ OPR
$= \triangle$ BCD : $\triangle$ OUS

Pr. BGEFHJ + Pr. EFHJKD : Pr. OMNQPR + Pr. NQPRTU $=$
$\triangle$ BCD : $\triangle$ OUS.

Auf dieselbe Weise zeigt man man, daß sowohl die beiden Prismen in AGEF und LMQN, als auch in CEJK und SNRT sich verhalten $= \triangle$ BCD : $\triangle$ OSU, indem jene das Verhältniß von $\triangle$ GEF : $\triangle$ MON, diese das Verhältniß von $\triangle$ EJK : $\triangle$ TNR haben ꝛc.

461. Lehrsatz. Theilt man eine dreiseitige Pyramide auf die in den beiden vorigen Sätzen angegebene Weise in Pyramiden und Prismen, so ist der Inhalt der Urpyramide selbst die Gränze für den Inhalt der Summe aller erhaltenen Prismen; oder das Gränzverhältniß der Pyramide und der Summe aller Prismen ist das Verhältniß der Gleichheit.

Beweis. Aus 459 — 307 und 308.

462. Lehrsatz. Zwei dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundflächen.

Eucl. XII, 5.

Beweis. Folgt leicht aus den beiden vorhergehenden Sätzen.

463. Lehrsatz. Zwei beliebige Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Eucl. XII, 6. — L. G. VI, 18, Zus. 2.

Vorbereitung. Man zerlege jede der Pyramiden in dreiseitige nach 457, Zus. 2.

Beweis. Aus 462 — 153 — 157.

Zus. Eine rechtwinkelige Pyramide ist inhaltsgleich mit einer schiefwinkeligen, wenn die Grundflächen beider gleich, und die senkrechte Kante der erstern der Höhe der andern gleich ist.

464. Lehrsatz. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen.

Eucl. XII, 7. — L. G. VI, 22.

Vorbereitung. Schneide das Prisma ABCDEF (Fig. 222) durch die Ebene BFD, so ist BDEF die eine der genannten Pyramiden; dar-

auf schneide den prismatischen Stumpf ABCDF durch die Ebene ABD, so hat man in ABFD und ABCD die zweite und dritte Pyramide.

Beweis. Die erste und letzte Pyramide sind inhaltsgleich nach 462; die zweite und dritte als Hälften der vierseitigen Pyramide BACDF.

Zus. Eine dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma, mit welchem sie auf derselben Grundfläche steht und gleiche Höhe hat.

465. Lehrsatz. Jede beliebige Pyramide ist der dritte Theil des Prisma, welches mit ihr gemeinschaftliche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Beweis. Aus 457, Zus. 2 und 464.

Zus. 1. Aus diesem und dem frühern Satze 454 sieht man, wie der Inhalt der Pyramiden auf den von Prismen und somit auch auf den von Prydem zurückgeführt werden kann. Eine Pyramide ist nämlich der dritte Theil des senkrecht-rechtwinkeligen Prydums, das mit ihr gleiche Höhe hat, und dessen Grundfläche von gleicher Größe mit der Grundfläche der Pyramide.

Zus. 2. Hieraus und aus 450, Zus. 4 sieht man nun ferner, in welchem Sinne die von vielen gebrauchte Ausdrucksweise zu nehmen ist, daß man den Inhalt einer Pyramide erhalte, wenn man ihre Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multiplicire.

L. G. VI, 18.

Zus. 3. Pyramiden von verschiedenen Grundflächen und Höhen stehen im zusammengesetzten Verhältnisse dieser Grundflächen und Höhen.

Anmerkung. Wir haben früher schon (459, Anm.) bemerkt, daß jedes der dort betrachteten beiden Prismen BHJEFG und DHFEJK $\frac{3}{8}$ von der Pyramide ABCD sei. Dieß läßt sich jetzt leicht beweisen. Denn für jede der beiden kleinern Pyramiden AEFG und CEJK ist offenbar das Verhältniß der Grundfläche zur Grundfläche der Urpyramide $= 1:4$, das Verhältniß der Höhen aber $= 1:2$, also das Inhaltsverhältniß $= 1:8$ d. h. jede der kleinern Pyramiden ist $\frac{1}{8}$ der Urpyramide, mithin jedes der beiden Prismen $\frac{3}{8}$.

Zus. 4. Daher verhalten sich die Grundflächen inhaltsgleicher Pyramiden umgekehrt wie ihre Höhen, und umgekehrt.

Eucl. XII, 9.

Zus. 5. Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

L. G. VI, 18, Zus. 2.

Zus. 6. Aehnliche Pyramiden stehen im dreifach hohen Verhältniß gleichnamiger Kanten.

Eucl. XII, 8. — L. G. VI, 26.

Zus. 7. Aus unserm ersten Zusatze folgt, daß eine regelmäßige Pyramide, welche man über der Grundfläche eines Würfels construirt, und welche mit dem Würfel gleiche Höhe hat, also mit ihrer Spitze in den Mittelpunct der Seitenfläche fällt, welche der Grundfläche gegenüber liegt, der dritte Theil dieses Würfels ist. Legt man außerdem in unserm Würfel noch die beiden Diagonalebenen, von denen jede durch zwei Seitenkanten der Pyramide geht, so erhält man außer der genannten noch vier vierseitige Pyramiden, von denen jede eine Seitenfläche des Würfels zur Grundfläche; aber nur die Hälfte seiner Höhe

hat, also auch nur halb so groß als die zuerst construirte Pyramide, d. h. der sechste Theil des Würfels ist.

Zus. 8. Um den Inhalt einer abgestumpften Pyramide zu finden, braucht man nur den Ueberschuß der ganzen Pyramide, zu welcher der Stumpf gehört, über das abgeschnittene Stück, das gleichfalls eine Pyramide ist, zu nehmen.

Anmerkung 1. Der Inhalt der abgestumpften Pyramide kann daher auch, wenn BACD (Fig. 220) eine in B rechtwinkelige Pyramide, welche gleiche Grundfläche und Höhe mit derjenigen hat, zu welcher der Stumpf gehört, und wenn man $\triangle$ BCD mit $\triangle$, $\triangle$ GFE mit $\triangle'$, die Höhe AB der ganzen Pyramide mit h, die Höhe BG des Stumpfes mit h', die Höhe AG der Ergänzung mit h'' bezeichnet, ausgedrückt werden durch:

$$\tfrac{1}{3}(h \cdot \triangle - h'' \cdot \triangle')$$

Aber nach S. 458 ist:

$$\triangle' = \left(\frac{h''}{h}\right)^2 \cdot \triangle,$$

also ist auch die abgestumpfte Pyramide $= \tfrac{1}{3} \cdot \dfrac{h^3 - h''^3}{h^2} \cdot \triangle$

Anmerkung 2. Weil stets: $h^3 - h''^3 = (h^2 + h \cdot h'' + h''^2)(h - h'')$
$= (h^2 + h \cdot h'' + h''^2)\, h'$

ist, so kann man unserem so eben gefundenen Ausdruck für die abgestumpfte Pyramide folgende etwas veränderte Gestalt geben:

$$\text{abgest. P.} = \frac{h^2 + h \cdot h'' + h''^2}{h^2} \cdot \frac{h'}{3} \cdot \triangle$$

$$= \frac{h'}{3} \cdot \triangle + \frac{h'}{3} \cdot \left(\frac{h''}{h}\right)^2 \cdot \triangle + \frac{h'}{3} \cdot \frac{h''}{h} \cdot \triangle$$

$$= \frac{h'}{3}\,\triangle + \frac{h'}{3} \cdot \triangle' + \frac{h'}{3} \cdot \sqrt{\triangle \cdot \triangle'}$$

$$= \frac{h'}{3}(\triangle + \triangle' + \triangle'')$$

wenn $\triangle''$ so genommen wird, daß:

$$\triangle : \triangle'' = \triangle'' : \triangle'$$

ist.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar folgender Satz, der sich bei Legendre VI, 21 findet:

Zus. 9. Eine abgestumpfte Pyramide ist gleich der Summe von drei Pyramiden, die alle gemeinschaftliche Höhe mit dem Stumpfe selbst haben, und deren Grundflächen beziehungsweise die Grundfläche des Stumpfes, die ihr parallele Fläche des abstumpfenden Schnittes, und die mittlere Proportionalfläche zwischen diesen beiden sind.

466. Lehrsatz. Der Theil der Oberfläche einer regelmäßigen Pyramide, welcher von den Seitenflächen gebildet wird, ist gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Grundfläche ist, und das gleiche Höhe mit einer der Seitenflächen hat.

Beweis. Aus 457, Zuss. 1 und 3.

Zus. Der Theil der Oberfläche einer abgestumpften Pyramide, welchen die Seitenflächen bilden, ist gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie das arithmetische Mittel zwischen den Umfängen der parallelen Gränzflächen und dessen Höhe die des Stumpfes selbst ist.

Beweis. Es stelle das rechtwinkelige Dreieck VAE (Fig. 231) die Seiten-Oberfläche der ganzen Pyramide, $\triangle$ VFG die des abgeschnit-

tenen Stückes; alsdann wird die des Stumpfes ausgedrückt durch das Paralleltrapezium FAEG, das nach 203, Zus. 8, gleichflächig ist einem Rechtecke, dessen Grundlinie $\frac{AE + FG}{2}$ und dessen Höhe AF ist ꝛc.

467. Lehrsatz. Theilt man eine der Seitenkanten einer Pyramide in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, legt durch jeden dieser Theilpuncte eine Ebene parallel mit der Grundfläche, und beschreibt zwischen je zwei auf einander folgenden dieser Durchschnitte ein Prisma, so daß derjenige von ihnen die Grundfläche bildet, welcher der frühere ist — wenn man die Grundfläche selbst als den ersten betrachtet und von ihr aus nach der Spitze hin zählt — so ist die Pyramide selbst die Verminderungs-Gränze für die Summe aller dieser Prismen, und das Gränz-Verhältniß dieser Prismen-Summen zur Pyramide ist das Verhältniß der Gleichheit.

Beweis. Der Ueberschuß der Prismen über die Pyramide ist nichts anders als die Summe der Prismen CDmikl, qptsru ꝛc. (Fig. 221). Dieselben haben offenbar alle einerlei Höhe und werden daher desto kleiner, je mehr diese Höhe abnimmt d. h. in je mehr gleiche Theile man die Seitenkante theilt; da nun die Anzahl dieser gleichen Theile einer unbegränzten Vermehrung fähig ist, so kann auch die Summe aller dieser kleinen äußern Prismen über jede Gränze hinab abnehmen, die Pyramide ist mithin die Gränze für die Summe der zwischen den parallelen Durchschnitten construirten Prismen (305), und das Gränzverhältniß dieser Prismen-Summe zur Pyramide das Verhältniß der Gleichheit (306).

Zus. 1. Hieraus sieht man, was heißen solle, wenn manche behaupten, daß eine Pyramide aus einer unendlichen Menge gleicher und unendlich schmaler Prismen, also aus einer unendlichen Menge von Ebenen, die der Grundfläche parallel sind, gebildet werde (was andere auch aus 458, Zus. herleiten zu können glauben), und wie dergleichen Sätze aller geometrischen Schärfe und Strenge entbehren.

Zus. 2. Da die Grundflächen unserer Prismen sich zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze (458), oder wie die Quadrate der Zahlen, welche diese Entfernungen von der Spitze messen, und mithin dieselben von der Spitze nach der Grundfläche hin wie die Quadrate der natürlichen Zahlen zunehmen, so sieht man, in welchem Sinne man behaupten könne, daß die Gränze für die Summe dieser Quadrate, oder wie andere sich ausdrücken, die Summe aller dieser Quadrate ausgedrückt werden kann durch den Inhalt einer Pyramide, deren Grundfläche das Quadrat der letzten oder höchsten dieser Zahlen und deren Höhe diese Zahl selbst ist; daß also diese Gränze oder diese Summe gleich dem dritten Theile des Productes aus dieser Zahl und ihrem Quadrate (465, Zus. 2) d. h. dem dritten Theile ihres Cubus gleich ist.

s'Gravesande in seinen elementis physices §. 480 wendet diesen unsern Satz mit vielem Nutzen an.

Anmerkung. Die Summe der Reihe:

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots\ldots n^2$$

kömmt also dem Werthe $\frac{n^3}{3}$ desto näher, je weiter man sie fortsetzt, d. h. je größer n wird, und erreicht diesen Werth, wenn n unendlich groß wird *).

468. **Lehrsatz.** Der Inhalt jedes beliebigen Polyeders läßt sich auf den Inhalt eines Parallelepipedums zurückführen.

Beweis. Wie auch ein Polyeder beschaffen sein möge, immer läßt es sich durch Ebenen entweder in Parallelepipeda, oder Prismen, oder vollständige Pyramiden, oder abgestumpfte Pyramiden zerlegen, deren Inhalte man nach den vorhergehenden Sätzen einzeln finden kann, um in der Summe derselben das Gesuchte zu haben.

Beispiel. Es sei das Polyeder BADHEFGC (Fig. 223) das zu seiner Grundfläche das Trapezium ABCD hat; auf welcher die Seitenflächen EB, DE, HC, GB senkrecht stehen mögen. Ist ferner HD = EA und CG = BF, und bezeichnet man die Flächenräume der Dreiecke ACD und ACB mit d^2 und e^2, so findet man durch Anwendung der Ausdrücke in 450, Zus. 4 für den Inhalt unseres Polyeders den Werth:

$$\frac{2\,e^2\,.\,FB + 2\,d^2\,.\,EA + e^2\,.\,EA + d^2\,.\,FB}{3}$$

Denn nimmt man AK = DJ = CG = BF, und legt durch F, G, J, K eine Ebene, so ist diese parallel der Grundfläche, und der Inhalt des Polyeders KJGFBADC ist $= (d^2 + e^2)\,.\,FB$.

Das obere Stück EKJHGF unseres Polyeders besteht aus drei Pyramiden. Eine derselben ist EKFG, deren Grundfläche FGK = ABC, und Höhe EK; ihr Inhalt also $\frac{e^2\,.\,EK}{3} = \frac{e^2\,.\,(EA - FB)}{3}$. Das Uebrige des obern Stücks bildet die vierseitige Pyramide HJKEG, welche sich zerlegen läßt in die beiden gleichen dreiseitigen GHJE und GKJE. Diese letztere hat für GKJ = ACD als Grundfläche zur Höhe EK, ihr Inhalt ist also $\frac{d^2\,.\,(EA - FB)}{3}$, also der Inhalt beider, weil sie gleich sind, $\frac{2\,d^2\,.\,(EA - FB)}{3}$. Addirt man, so erhält man unsern obigen Ausdruck.

Mauduit Mem. presentés IV, p. 624.

Anmerkung 1. In der Baukunst wird es oft nöthig, den Inhalt solcher Polyeder, wie das hier betrachtete, zu bestimmen.

Anmerkung 2. Man könnte sich unser Polyeder auch in ein Parallelepipedum, zwei dreiseitige Prismen und eine vierseitige Pyramide zerlegen.

469. **Lehrsatz.** Nimmt man innerhalb eines beliebigen Polyeders einen beliebigen Punct, legt durch ihn und jede Kante des Polyeders eine Ebene, so wird das Polyeder dadurch in so viele Pyramiden zerlegt, als es Gränzflächen hat; diese Pyramiden alle zusammen sind so groß als das Polyeder.

*) Der genaue Werth für die Summe der Quadrate von den n ersten Gliedern der natürlichen Zahlenreihe ist $= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Anm. des Uebers.

Dritter Abschnitt.

Von den regelmäßigen Polyedern.

470. Erklärung. Regelmäßig heißt ein Polyeder, wenn die sämmtlichen dasselbe gleichmäßig begränzenden Flächen regelmäßige und unter einander congruente Figuren sind.

Zus. 1. In jedem regelmäßigen Polyeder sind daher alle Kanten gleich, eben so alle Kantenwinkel und darum auch alle Raumecken. Mittelpunct eines solchen Polyeders heißt der Punct, welcher von den sämmtlichen Scheiteln dieser Ecken gleiche Entfernung hat.

Zus. 2. Legt man durch den Mittelpunct und sämmtliche Kanten Ebenen, so wird das Polyeder dadurch in lauter congruente Pyramiden zerlegt, deren Zahl der Zahl der Gränzflächen gleich kömmt.

Zus. 3. Alle regelmäßigen Polyeder derselben Art d. h. die gleich viel und ähnliche Gränzflächen haben, sind einander ähnlich.

471. Erklärung. Tetraeder heißt dasjenige regelmäßige Polyeder, welches von vier Dreiecken begränzt wird. Fig. 225.
Eucl. XI, Erkl. 26.

Anmerkung. Das Tetraeder ist also nichts anders als eine vollkommen regelmäßige Pyramide. Auch gebraucht Euclides im XIII Buche das Wort Pyramide für Tetraeder*).

472. Erklärung. Octaeder (Fig. 226) heißt dasjenige regelmäßige Polyeder, welches von acht Dreiecken begränzt wird.
Eucl. XI, Erkl. 27.

473. Erklärung. Ikosaeder (Fig. 228) heißt dasjenige regelmäßige Polyeder, welches von zwanzig Dreiecken begränzt wird.
Eucl. XI, Erkl. 29.

474. Erklärung. Hexaeder oder Würfel (Fig. 218) ist das von sechs Quadraten begränzte regelmäßige Polyeder.

Siehe oben 442.

475. Erklärung. Dodekaeder (Fig. 230) ist das von zwölf Fünfecken begränzte regelmäßige Polyeder.
Eucl. XI, Erkl. 28.

Anmerkung. Es ist durchaus nöthig, zu beweisen, daß diese genannten fünf regelmäßigen Polyeder, außer ihnen aber keine andern, möglich sind. Euclides hat dieß nicht gethan; unser unmittelbar folgender Lehrsatz nebst seinen Zusätzen enthält das Nöthige, was hieher gehört.

476. Lehrsatz. Gehören die Kantenwinkel, welche eine Raumecke bilden, sämmtlich regelmäßigen und congruenten Figuren an, so besteht diese Raumecke entweder aus drei, oder aus vier, oder aus fünf Winkeln eines gleichseitigen Dreiecks, oder aus drei Winkeln eines Quadrates, oder aus drei Winkeln eines regelmäßigen Fünfecks. Keine Raumecke kann eine größere oder geringere Zahl von Winkeln

*) In neuerer Zeit ist es, wenigstens in Deutschland und Frankreich, üblich geworden, den Ausdruck Tetraeder für jede dreiseitige Pyramide zu gebrauchen, und durch regelmäßiges Tetraeder das zu bezeichnen, was früher schlechthin Tetraeder hieß. Anm. des Uebers.

der drei genannten Vielecke enthalten, oder aus Winkeln anderer Vielecke gebildet werden.

Bew. Aus 431, und 110, Zus. 1.

Zus. 1. Es sind also nur fünf regelmäßige Polyeder möglich. Sie sind die in den vorhergehenden Erklärungen genannten.

Eucl. XIII, Anm. zum letzten Satz — Legendre Anhang zum VII B. S. 1 u. 2.

Zus. 2. Besteht eine Raumecke V (Fig. 225) aus drei Winkeln, von denen jeder die Größe der Winkel im gleichseitigen Dreieck hat, und man schneidet auf den Kanten von der Spitze aus beliebige aber gleiche Stücke ab, verbindet alsdann je zwei dieser Durchschnittspuncte, so bilden diese Verbindenden die Seiten eines Dreiecks, welches wie die drei übrigen gleichseitig ist, und alle vier Dreiecke bilden die Gränzflächen des regelmäßigen Tetraeders VABG.

Hieraus folgt:

1. Das regelmäßige Tetraeder ist eine vollkommen regelmäßige dreiseitige Pyramide, in welcher die Seitenflächen nicht nur unter einander, sondern auch der Grundfläche congruent sind.
2. Die Senkrechte, welche man aus einer der Ecken auf die Gegenfläche fällt, trifft diese in dem Mittelpuncte ihres äußern Kreises d. h. in dem Puncte, welcher von jeder Spitze des Dreiecks doppelt so weit entfernt ist, als von jeder Seite.
3. Beschreibt man auf dem Papier ein gleichseitiges Dreieck und über jeder der Seiten auswärts ein ihm congruentes, so kann man durch geeignetes Zusammenfalten des Papiers ein Tetraeder erhalten, dessen Grundfläche das zuerst beschriebene Dreieck und dessen Seitenflächen die übrigen sind.

Zus. 3. Besteht eine Raumecke aus vier Winkeln, von denen jeder die Größe des Winkels im gleichseitigen Dreieck hat, und man schneidet auch jetzt auf allen vier Kanten vom Scheitel aus beliebige aber gleiche Stücke ab, und verbindet die Durchschnittspuncte von je zwei benachbarten Kanten, so bilden diese Verbindenden ein regelmäßiges Viereck, welches als Grundfläche zu einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide gehört, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Beschreibt man nun über derselben Grundfläche, aber auf der andern Seite derselben, eine dieser erstern vollkommen gleiche Pyramide, so bilden diese beiden Pyramiden zusammen offenbar ein Polyeder, welches von acht gleichseitigen Dreiecken begränzt wird; also ein Octaeder.

Hieraus ergiebt sich leicht, daß die Geraden, welche je zwei Gegenecken des Octaeders verbinden, von gleicher Länge und Axen desselben sind, welche sich in seinem Mittelpuncte schneiden und in ihm gegenseitig halbiren.

Ferner: Construirt man acht gleichseitige und congruente Dreiecke und zwar so, daß sie in der in Fig. 227 angegebenen Verbindung stehen, so kann man durch geeignetes Zusammenfalten des Papiers aus ihnen ein Octaeder zusammensetzen. Dabei bilden a, b, c, d die eine vierseitige Pyramide mit der Spitze i, und e, f, g, h die andere mit der Spitze k.

Zus. 4. Enthält eine körperliche Ecke G (Fig. 228) fünf Kantenwinkel, von denen jeder die Größe des Winkels im gleichseitigen Dreieck

hat, so erhält man in den Grundlinien der fünf gleichseitigen und congruenten Dreiecke GDE, GEF, GFH, GHJ, GJD die Seiten eines regelmäßigen Fünfecks. Ueber diesen Grundlinien beschreibe man nach der andern Seite hin aufs neue gleichseitige, den erstern congruente, Dreiecke wie JZD, BJH, AHF ꝛc., und zwischen je zwei zunächst an einander gränzende dieser letztern Dreiecke, wie ZJD und BJH, BJH und AHF wieder ein eben solches Dreieck, wodurch in unserer Figur die Dreiecke BJZ, ABH ꝛc. entstehen. Durch diese Dreiecksreihe werden die Ecken J, H zu Ecken von fünf gleichen Kantenwinkeln vervollständigt. Zugleich bilden die Grundlinien ZB, BA ꝛc. eben dieser Dreiecke die Seiten eines regelmäßigen Fünfecks; beschreibt man über diesen Seiten noch einmal gleichseitige Dreiecke, so lassen sich diese mit dem genannten Fünfecke zu einer regelmäßigen fünfseitigen, mit GDEFHJ congruenten Pyramide verbinden und schließen dadurch das Polyeder, welches demnach von zwanzig gleichseitigen und congruenten Dreiecken begränzt wird, also ein Ikosaeder ist.

Auch in dem Ikosaeder sind die Geraden, welche je zwei Gegenecken verbinden, von gleicher Länge, und gehen als Axen durch den Mittelpunct des Polyeders, wo sie sich gegenseitig halbiren.

Construirt man zwanzig gleichseitige und congruente Dreiecke, und zwar in einer gegenseitigen Verbindung, wie die in Fig. 229 angegebene, so kann man aus ihnen durch geeignetes Zusammenfalten des Papiers ein Ikosaeder zusammensetzen. Dabei bilden nämlich die Dreiecke b, c, f, e, d die eine Raumecke, deren Scheitel x, eben so p, q, r, t, u um den Scheitel y eine zweite; beide Ecken bilden den obern und untern Theil des Ikosaeders, die übrigen zehn Dreiecke aber dessen Mitte.

Zus. 5. Besteht eine körperliche Ecke D Fig. 218 aus drei Kantenwinkeln, ADC, ADG, CDG, von denen jeder ein Rechter ist, so erhält man, wenn man die Quadrate ADCB, ADGH und DGFC vollendet, und Ebenen durch GF, GH, durch CB, CF, und durch AB, AH legt, noch drei andere Quadrate GFMH, CFMB und ABMH, das von diesen sechs Quadraten umschlossene Polyeder ist also ein Hexaeder oder Würfel.

Um aus Quadraten, die man auf dem Papiere gezeichnet hat, durch Zusammenfalten des Papieres einen Würfel bilden zu können, müssen dieselben in eben die gegenseitige Verbindung gebracht werden, wie sie in Fig. 211 für die Rechtecke angegeben ist, welche die Gränzflächen eines Prydums bilden.

Zus. 6. Wenn eine Raum-Ecke X Fig. 230 drei Kantenwinkel enthält, von denen jeder die Größe des Winkels im regelmäßigen Fünfeck hat, und man vollendet die drei regelmäßigen und congruenten Fünfecke XWKAB, XBYML und XLPaW, beschreibt dann eben solche Fünfecke über den Seiten aW, aP, PL, nämlich aWKSH, aPOJH und PLMNO. Diese sechs Fünfecke lassen sich in eine solche gegenseitige Lage bringen, daß je drei eine Raumecke bilden, deren Scheitel X, W, a, P, L sind. Man sieht auch deutlich, wie über den fünf Seitenpaaren AB und BY, YM und MN, NO und OJ, JH und HS, SK

und KA sich fünf neue, den erstern congruente (in unserer Figur durch punctirte Linien angedeutete) Fünfecke beschreiben lassen, nämlich: ABYDVA, YMNEDY, NOJKEN, JHSGKJ und SKAVGS, deren Seiten DE, EK, KG, GV, VD wiederum unter sich ein Fünfeck bilden, welches den übrigen congruent, und dessen Ebene mit der seines Gegenfünfecks XWaPL parallel ist. Man erhält also auf diese Weise ein Polyeder, welches von zwölf regelmäßigen und congruenten Fünfecken begränzt ist, von denen je zwei, einander gegenüberstehende, parallel sind, das Polyeder ist mithin ein regelmäßiges Dodekaeder. Hieraus folgt leicht, daß die Diagonalen oder Axen des Dodekaeders d. h. die Geraden, welche je zwei Gegenecken verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, und sich in demselben gegenseitig halbiren. Dieser Punct ist der Mittelpunct des Polyeders.

Man sieht ferner, daß, wenn man auf dem Papiere zwei regelmäßige und congruente Fünfecke, und über den fünf Seiten eines jeden fünf andere ihm congruente Fünfecke beschreibt, man durch geeignetes Zusammenfalten des Papiers aus diesen beiden Fünfecksverbindungen die beiden Hälften eines Dodekaeders, und durch Vereinigung beider das vollständige Dodekaeder erhalten kann. Um beide Fünfecksverbindungen als ein Ganzes erscheinen zu lassen, kann man sie so neben einander schieben, daß ein äußeres Fünfeck in der einen Verbindung und ein solches in andern eine Seite gemeinschaftlich haben.

Zus. 7. Die Oberfläche eines regelmäßigen Polyeders ist das Sovielfache von dem Flächenraume einer seiner Gränzflächen, als die Zahl Einheiten hat, welche die Menge seiner Gränzflächen bezeichnet.

477. Lehrsatz. Die Zahl, welche die Menge der Kanten eines regelmäßigen Polyeders bezeichnet, ist so groß als das Product aus der Hälfte der Gränzflächenzahl und der Seitenzahl jeder Gränzfläche; und die Anzahl der Ecken so groß, als der Quotient, welchen man erhält, wenn man das Product aus der Gränzflächenzahl und der Seitenzahl jeder Gränzfläche durch die Zahl dividirt, welche die Menge der ebenen Winkel jeder Ecke bezeichnet.

Eucl. XV, 6.

Beweis. Erster Theil. Die Anzahl aller Seiten von allen Gränzflächen erhält man, wenn man die Seitenzahl einer Gränzfläche mit der Anzahl der Gränzflächen multiplicirt; nun bilden aber offenbar je zwei dieser Seiten nur eine Kante, also 2c.

Zweiter Theil. Da jede Gränzfläche eben so viel Winkel als Seiten hat, so ist die Menge aller ebenen Winkel eines regelmäßigen Polyeders so groß, als das Product aus der Seitenzahl jeder Gränzfläche und der Gränzflächenzahl Einheiten hat; in jedem regelmäßigen Polyeder gehören nun zu jeder Raumecke gleich viel ebene Winkel, also 2c.

Zus. Daher hat:

1. das Tetraeder sechs Kanten und vier Ecken;
2. das Octaeder zwölf Kanten und sechs Ecken;
3. das Ikosaeder dreißig Kanten und zwölf Ecken;
4. der Würfel zwölf Kanten und acht Ecken;
5. das Dodekaeder dreißig Kanten und zwölf Ecken.

Anmerkung. In allen diesen Polyedern ist also die Zahl der Ecken und Gränzflä-

chen zusammen um zwei größer als die Kantenzahl, eine Eigenschaft, die allen Polyedern gemeinschaftlich *) ist.

478. **Lehrsatz.** Halbirt man eine der Kanten eines Polyeders und errichtet auf ihr in diesem Halbirungspuncte Senkrechte in den Ebenen der Gränzflächen, deren Durchschnittslinie diese Kante ist, so ist der Winkel dieser beiden Geraden das Maaß für den von den genannten Gränzflächen gebildeten Flächenwinkel.

Bew. Aus 418.

L. G. Anhang zum VII B. S. 3.

Anmerkung 1. Im regelmäßigen Tetraeder, Octaeder, Isokaeder und Dodekaeder gehen die Senkrechten durch die Spitzen der Dreiecke und Fünfecke, in deren Ebenen sie liegen; beim Würfel stehen sie auf zwei parallelen Kanten senkrecht.

Anmerkung 2. Dieser Satz bildet den ersten Theil vom 7ten Satze im XV Buche des Euclides. Die dort angegebene Construction kömmt im Wesentlichen mit der unsrigen überein.

Die alten Geometer scheinen nicht weiter gegangen zu sein, als die Construction anzugeben, durch welche man einen Winkel findet, den man als Maaß für den Flächenwinkel eines regelmäßigen Polyeders ansehen kann. Durch Hülfe der Trigonometrie können wir die Größe dieser Winkel auch durch Rechnung bestimmen, wie dieß in dem Folgenden näher nachgewiesen werden soll. Ein für allemal möge hier bemerkt werden, daß wir für jedes der regelmäßigen Polyeder die Kantenlänge mit a bezeichnen.

I. Das Tetraeder. Figg. 224 und 225.

In jedem regelmäßigen Tetraeder, dessen Kante a, ist:

1. die Höhe $VE = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

2. Die Entfernung VC einer Ecke vom Mittelpunct $= a\sqrt{\frac{3}{8}}$
$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

3. Die Entfernung CQ des Mittelpunctes von den Seitenflächen $= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ **)

4. Der Sinus des Winkels VAD, als Maaß für die Winkel, welche die Kanten mit den Gränzflächen bilden $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ (für den sin. tot $= 1$), d. h. dieser Winkel ist $= 54^\circ\ 44'\ 8''$

5. Der Sinus eines Flächenwinkels $= \frac{2}{3}\sqrt{2}$, sein Cosinus $= \frac{1}{3}$; dieser Winkel ist also $= 70^\circ\ 31'\ 44''$

L. G. in den Anmerkungen Nro. 9.

Bew. Legt man durch die Kante AV (Fig. 225) und den Halbirungspunct D ihrer Gegenkante BG eine Ebene VAD, so steht diese auf ABG senkrecht, weil diese letztere Ebene durch GD geht, welche auf

---

*) Beweise dafür sollen in dem Anhange zu diesem Buche mitgetheilt werden. Anm. des Uebers.

**) Unser Vf. findet als Werth für CQ nicht $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$, sondern $\frac{a}{4}\sqrt{3}$, was aber offenbar unrichtig ist, und seinen Grund in einem Fehler hat, den er sich bei Entwickelung dieses Werthes hat zu Schulden kommen lassen. Anm. des Uebers.

AVD senkrecht ist, da GDV = GDA = 90° ist. Das Höhenperpendikel VE im Dreieck VAD ist also auch Höhe des Tetraeders, trifft also die Grundfläche ABG in ihrem Mittelpuncte; es ist also AE = 2 ED. Nun ist $\overline{AD}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{GD}^2 = \frac{3}{4}\overline{AG}^2$, also $AD = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, u. mithin $AE = \frac{2}{3} \cdot AD = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, demnach

$$1.\quad VE = \sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right)} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Da bei der Regelmäßigkeit des Tetraeders VE durch dessen Mittelpunct geht, so wird derjenige Punct auf VE, welcher gleichweit von V und A entfernt ist, dieser Mittelpunct selbst sein. Man errichte daher auf AV in A die Senkrechte AZ (Fig. 224) und verlängere sie bis zum Durchschnitt mit der Verlängerten VE in Z und beschreibe um das Dreieck AZV einen Kreis, so ist dessen Mittelpunct C zugleich auch der Mittelpunct des Tetraeders. Es ist nun aber VZ : VA = VA : VE, also

$$VZ = \frac{a^2}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} = a\sqrt{\frac{3}{2}},\ \text{und mithin}$$

$$2.\quad VC = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{8}}$$

Die Entfernung des Mittelpunctes C des Tetraeders von den Seitenflächen wird, wie aus dem Bisherigen leicht folgt, durch CE in Fig. 224 dargestellt, also ist:

$$\overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AE}^2,\ \text{und daher}$$

$$3.\quad CE = \sqrt{\left(\frac{3a^2}{8} - \frac{a^2}{3}\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$4.\quad \sin VAD = \frac{VE}{VA} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}},\ \text{also}\ VAD = 54^\circ\ 44'\ 8''$$

Endlich ist VDA offenbar das Maaß für den Winkel, welchen die Flächen VGB und AGB mit einander bilden, also das Maaß für jeden Flächenwinkel eines regelmäßigen Tetraeders, also, da

$$\sin VDA = \frac{VE}{VD} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

5. Jeder Flächenwinkel = 70° 31′ 44″

Anmerkung. Legendre bestimmt die Größe des Flächenwinkels und des Kanten-Flächenwinkels durch Hülfe sphärischer Dreiecke. Ich glaube, es sei besser, Alles was diese Polyeder betrifft, unmittelbar aus ihrer eignen Natur herzuleiten, wenn auch, wie sich nicht läugnen läßt, die Beweise dadurch umständlicher werden. Schon vor zwei Jahrhunderten bestimmte die Größe unserer Winkel Albert Girard, und zwar durch eine ihm eigene Methode, die sich am Ende seiner „Nouvelle invention en Algebre (1629)“ befindet.

II. Das Octaeder.

In jedem regelmäßigen Octaeder ist:

1. der Winkel, welchen zwei (nicht zu derselben Gränzfläche gehörige) Kanten mit einander bilden $= 90^\circ$;
2. die Axe des Octaeders ist Diagonale des Quadrates, dessen Ebene den Körper in zwei congruente Hälften theilt;
3. die Entfernung des Mittelpunctes von den Ecken ist gleich der halben Axe, daher $a\sqrt{\frac{1}{2}}$;
4. Die Entfernung des Mittelpunctes von den Gränzflächen $= \frac{a}{2}$;
5. der Sinus des halben Gränzflächenwinkels ist $= \sqrt{\frac{2}{3}}$, sein Cosinus $= \sqrt{\frac{1}{3}}$, der halbe Winkel selbst also $= 54^\circ\,44'\,8''$, und der ganze Winkel $109^\circ\,28'\,16''$.

Bew. Die Richtigkeit dessen, was in Nro. 1—3 enthalten ist, leuchtet von selbst ein.

Ferner ist (Fig. 226): $\overline{CQ}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GQ}^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$, also

4. $CQ = \frac{a}{2}$.

Errichtet man auf einer Kante z. B. BV in ihrem Halbirungspuncte E zwei Senkrechte EA, EG in den Ebenen, deren Durchschnittslinie jene Kante ist, so ist der Winkel AEG das Maaß für den Gränzflächenwinkel unseres Octaeders. Da Dreieck AEG gleichschenkelig, und EC senkrecht auf AG, so ist W. $AEC = \frac{1}{2}$ AEG.

Nun ist: $\sin AEC = \frac{CA}{EA} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, also

$\cos AEC = \sqrt{\frac{1}{3}}$, also

5. W. $AEC = 54^\circ\,44'\,8''$, und
$AEG = 109^\circ\,28'\,16''$.

Zus. Die Gränzflächenwinkel des Tetraeders und Octaeders ergänzen sich also einander zu zwei Rechten.

III. Das Ikosaeder.

In jedem regelmäßigen Ikosaeder, dessen Kante a, ist:

1. Die Axe $= a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

2. Die Entfernung des Mittelpunctes von den Ecken also
$$= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

3. Die Entfernung des Mittelpunctes von den Gränzflächen
$$= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}},$$ also

4. Die Höhe des Ikosaeders $= a \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$.

5. Der Sinus des Winkels, welchen eine Kante und Gränzfläche mit einander bilden $= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}}$, der Winkel selbst also, der immer ein stumpfer ist, $= 110^{0}\ 54'\ 18''$.

6. Der Sinus eines Gränzflächenwinkels ist $= \frac{2}{3}$, also der Winkel, der gleichfalls immer ein stumpfer ist, $= 138^{0}\ 11'\ 24''$.

Bew. Aus der Natur unseres Polyeders ergiebt sich leicht, daß eine Ebene, die man durch eine Kante BJ (Fig. 228) und die Höhe JL, der Gränzfläche GJD legt, zugleich auch durch die Höhe EL der Gränzfläche GED, durch die Kante EF, und durch die Höhen FK, BK der Gränzflächen AFH und ABH gehen muß. Der Durchschnitt des Ikosaeders und einer solchen Ebene wird daher ein Sechseck geben, wie es in Fig. 234 dargestellt ist. Zwei seiner Seiten BJ und EF sind Kanten des Polyeders, die übrigen sind Höhen seiner Gränzflächen. Es ist daher:

$$JL = LE = FK = BK = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

Ferner zieht man (Fig. 234) die Linien BE und JF, so sind diese als Gerade, welche gegenüberstehende Ecken des Ikosaeders verbinden, Axen desselben, und BC, CF, CE, CJ halbe Axen. BL ist in dem regelmäßigen Fünfeck BHGDZ, welches von den Grundlinien der fünf um die gemeinschaftliche Spitze J herum liegenden Dreiecke BJH, HJG, GJD, DJZ, ZJB gebildet wird, die Senkrechte aus einer Winkelspitze auf die Gegenseite. Da nun aber JF die Axe des Ikosaeders ist, welche senkrecht auf der Ebene des genannten Fünfecks steht, so begegnet sie der Geraden BL und zwar in dem Puncte N (Fig. 234), welcher gleiche Entfernung von allen Ecken des Fünfecks hat; es ist also BN der Halbmesser des Kreises, der sich um das Fünfeck beschreiben läßt; und daher (291, Zus. 1)

$$BJ = BN \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$ also

$$BN = a \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}} = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$$

Ferner ist:

$$\overline{JN}^2 = \overline{BJ}^2 - \overline{BN}^2$$
$$= a^2 - a^2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$$
$$= a^2 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

also $$JN = a \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

Weil aber der Kreis, welchen man über FJ als Durchmesser beschreibt, auch durch B und E gehen muß, so ist W. FBJ $= 90^0$, also

JN : BJ = BJ : JF (209, Zus. 2), mithin

$$JF = \frac{\overline{BJ}^2}{JN} = a \sqrt{\frac{10}{5 - \sqrt{5}}}$$
$$= a\sqrt{\frac{10\,(5 + \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})\,(5 - \sqrt{5})}}$$
$$= a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

und daher

$$CJ = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

Es ist ferner:

$$\overline{LN}^2 = \overline{LJ}^2 - \overline{JN}^2$$
$$= \frac{3\,a^2}{4} - a^2 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$
$$= \frac{15 - 10 + 2\sqrt{5}}{20} \cdot a^2$$

also

$$LN = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$$

Fällt man aus dem Mittelpuncte C eine Senkrechte auf die Gränzfläche EGD und verlängert sie, bis sie der mit EGD parallelen Gränzfläche begegnet, so steht sie auch auf dieser senkrecht, und trifft beide in ihren Mittelpuncten, schneidet also die Höhenperpendikel BK und EL dieser Gränzflächen so, daß $BO = \frac{2}{3}$ BK und $EP = \frac{2}{3}$ EL; es ist daher

$$BO = \frac{2}{3}\,a\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$ also, weil

$$\overline{CO}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BO}^2$$
$$= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{2} - \frac{a^2}{3}$$
$$= \frac{a^2}{24}\,(15 + 3\sqrt{5} - 8)$$

$$CO = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}},$$ also die Höhe des Ikosaeders

$$PO = a \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$$

Zur Bestimmung der Winkel fälle man in dem gleichschenkeligen Dreieck EJL, die Senkrechte LM. Alsdann ist: $EM = MJ = \frac{1}{2} EJ$; aber

$$\overline{EJ}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{BJ}^2$$

$$= a^2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{2} - a^2,$$ also

$$EJ = a \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}},$$ und mithin

$$EM = MJ = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

Es ist ferner:

$$\overline{ML}^2 = \overline{LJ}^2 - \overline{MJ}^2 = \frac{3\, a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

also: $$ML = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}},$$ und

$$\sin EJL = \frac{LM}{LJ} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}}{\frac{a}{2} \sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}},$$

daher W. $EJL = 20^\circ\, 54'\, 18''$,
und W. $LJB = 90^\circ + EJL = 110^\circ\, 54'\, 18''$
Endlich ist: $\frac{1}{2}\, ELJ = MLJ = 90^\circ - EJL$
$= 69^\circ\, 5'\, 42''$,

also

$$ELJ = 138^\circ\, 11'\, 24''$$

IV. Der Würfel.

In jedem Würfel ist:

1. jeder Gränzflächenwinkel $= 90^\circ$;
2. die Höhe des Winkels gleich der Kante;
3. die Entfernung des Mittelpunctes von den Seitenflächen gleich der Hälfte der Kante;
4. die Axe $= a \sqrt{3}$, also
5. die Entfernung des Mittelpunctes von den Ecken $= \frac{a}{2} \sqrt{3}$.

Beweis. Die Richtigkeit des Inhaltes von Nro. 1—3 ist für sich einleuchtend. Ferner ist (Fig. 218)

$$\overline{BG}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MG}^2 = a^2 + 2\,a^2, \text{ also}$$

$$BG = a\sqrt{3}, \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2}\,BG = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

V. Das Dodekaeder.

Für das Dodekaeder gilt Folgendes:

1. Die Axe MCS (Fig. 235) ist $= a\sqrt{\dfrac{9 + 3\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2\,a\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$

Also

2. Die Entfernung des Mittelpunctes von den Ecken
$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$$
3. Die Entfernung CQ des Mittelpunctes von jeder Gränzfläche
$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{a}{\sqrt{5} - 1}\cdot\sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$$
4. Also die Höhe des Dodekaeders
$$= a\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{2\,a}{\sqrt{5} - 1}\cdot\sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$$
5. Die Senkrechte YS zwischen zwei Kanten $= a\sqrt{\dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$
6. Der Winkel UYM, welchen eine Kante mit der angränzenden Seitenfläche bildet $= 121^\circ\,43'\,2''$
7. Der Winkel YUS, welchen zwei Gränzflächen mit einander bilden, $= 116^\circ\,33'\,54''$; sein Sinus ist $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; sein Cosinus $- \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; seine Tangente $- 2$.

Beweis. Aus der Natur unsers Polyeders ergiebt es sich leicht, daß eine Ebene, welche man durch eine der Kanten YM (Fig. 230) und die Höhe MR einer der an diese Kante angränzenden Seitenflächen legt, zugleich auch durch die Höhe RH der darauf folgenden Gränzfläche, durch die Kante HS, und endlich durch die Höhen SU und UY der beiden Gränzflächen AKSGV und ABYDV geht. Dieser Durchschnitt giebt also, das in Fig. 235 besonders dargestellte, Sechseck YMRHSUY, in welchem YM und HS Kanten, und MR, RH, SU, UY Höhen der Gränzflächen sind. Zieht man ferner in den drei um den Punct M liegenden Fünfecken (Fig. 230) MLPON, MLXBY und MNEDY, die Diagonalen LN, LY und NY, so ist Dreieck YLN gleichseitig; und die Diagonale LM wird durch die Höhe MR halbirt; verbindet man diesen Halbirungspunct i mit Y, so ist Yi als Höhe des gleichseitigen

Dreiecks YLN $= \frac{LN}{2} \sqrt{3}$. Für LN aber läßt sich ein Werth auf folgende Weise finden. Bezeichnet man mit ϱ den Radius des Kreises um das Fünfeck MLPON, so ist (291, Zus. 2)

$$\overline{LN}^2 = 5 \cdot \varrho^2 - \overline{MN}^2, \text{ und nach 291, Zus. 1,}$$

$$\varrho^2 = \frac{2\,\overline{MN}^2}{5 - \sqrt{5}}, \text{ also}$$

$$\overline{LN}^2 = \frac{10\,\overline{MN}^2}{5 - \sqrt{5}} - \overline{MN}^2 = a^2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}$$

$$= a^2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$$

$$= a^2 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \text{ also}$$

$$Yi = \frac{LN}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

Weil aber die Axe MS senkrecht auf der Ebene des gleichseitigen Dreiecks YLN steht, so ist der Durchschnittspunct Z (Fig. 235) gleichweit von den Spitzen des Dreiecks entfernt d. h. er ist des Dreiecks Mittelpunct, liegt also auf der Höhe Yi, und zwar so, daß YZ $= \frac{2}{3}$ Yi, es ist daher

$$YZ = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

$$= a \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}} = a \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})\,(3 - \sqrt{5})}{6\,(3 - \sqrt{5})}}$$

$$= a \sqrt{\frac{2}{3\,(3 - \sqrt{5})}}$$

Es ist ferner (Fig. 235):

$$\overline{MZ}^2 = \overline{YM}^2 - \overline{YZ}^2 = a^2 - a^2 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{6}$$

$$= a^2 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{6},$$

also ist die Höhe der Pyramide, welche Dr. YLN zur Grundfläche und M zur Spitze,

$$MZ = a \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} = a \sqrt{\frac{2}{9 + 3\sqrt{5}}}$$

und, weil Dr. MYS (Fig. 235) rechtwinkelig, so ist:

$$MS = \frac{\overline{MY}^2}{MZ} = \frac{a^2}{a \sqrt{\frac{2}{9 + 3\sqrt{5}}}}$$

$$MS = a \sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

$$= a \sqrt{\frac{(9 + 3\sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)^2}{2(\sqrt{5} - 1)^2}}$$

$$= a \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5} - 1}$$

$$= \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$$

Es ist ferner:

$$YS = \sqrt{(\overline{MS}^2 - \overline{MY}^2)}$$

$$= a \sqrt{\left[\frac{12}{(\sqrt{5} - 1)^2} - 1\right]}$$

$$= a \sqrt{\left[\frac{12}{6 - 2\sqrt{5}} - 1\right]}$$

$$= a \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}$$

$$= a \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

Die halbe Axe oder die Entfernung des Mittelpunctes von den Ecken ist

$$CM = CY = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5} - 1}$$

$$= a \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$$

Die Senkrechte CQ, welche man aus dem Mittelpuncte auf eine der Gränzflächen YBAVD fällt, und durch welche die Entfernung des Mittelpunctes von den Gränzflächen gemessen wird, trifft diese Fläche in ihrem Mittelpuncte; ihr Fußpunct Q liegt also auf der Höhe YU, so daß QY der Radius des Kreises um diese Gränzfläche ist. Demnach ist (291, Zus. 1)

$$QY = a \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}, \text{ also}$$

$$\overline{CQ}^2 = \overline{CY}^2 - \overline{QY}^2$$

$$= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2} - \frac{2a^2}{5 - \sqrt{5}}$$

$$= a^2 \cdot \frac{14 + 6\sqrt{5}}{8(5 - \sqrt{5})} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{7 + 3\sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}$$

$$= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{(7 + 3\sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}, \text{ also}$$

$$CQ = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\frac{(25 + 11\sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)^2}{40}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = \frac{a}{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}},$$

mithin

$$QT = a\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$$

Da MR die Höhe des Fünfecks MNOPL ist, so ist nach 290, Anm. 3, und 291, Zus. 1.

$$MR = a \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{4} \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}$$

$$= a\sqrt{\frac{2 \cdot (5 + \sqrt{5})^2}{16\,(5 - \sqrt{5})}} = a\sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{4\,(5 - \sqrt{5}}}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{(15 + 5\sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$$

Es lassen sich nun leicht auch die Winkel bestimmen. Es ist:

$$\sin YSM = \frac{YM}{SM} = \sqrt{\frac{2}{9 + 3\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} = \cos YMS,$$

also $YSM = 20^\circ\ 54'\ 18''$
und $YMS = 69^\circ\ 5'\ 42''$

Ferner ist:

$$\sin QYC = \frac{CQ}{CY} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{5\,(9 + 3\sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{15\,(3 + \sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{\frac{(25 + 11\sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{15\,(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}$$

Also $QYC = 52^\circ\ 37'\ 20''$, und
weil $HYM = 69^\circ\ 5'\ 42''$, so ist
$UYM = 121^\circ\ 43'\ 2''$

Endlich ist: $\sin FUY = \frac{FY}{UY} = \frac{\frac{1}{2} YS}{UY}$

$$= \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}}}, \text{ und daher}$$

$$\cos FUY = \cos \tfrac{1}{2} YUS = \sqrt{\left[1 - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}}}, \text{ also}$$

$$\sin YUS = 2 \sin \tfrac{1}{2} YUS \,.\, \cos \tfrac{1}{2} YUS$$

$$= 2\sqrt{\frac{(7 + 3\sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{(10 + 4\sqrt{5})^2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{36 + 16\sqrt{5}}{180 + 80\sqrt{5}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{5}}{45 + 20\sqrt{5}}} = 2\sqrt{\frac{(9 + 4\sqrt{5})(45^0 - 20\sqrt{5}}{(45 + 20\sqrt{5})(45^0 - 20\sqrt{5})}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

also $YUS = 116^0\ 33'\ 54''$

Der Cosinus dieses Winkels ist $= -\frac{1}{\sqrt{5}}$, und seine Tangente $= -2$.

Anmerkung. Wir hätten den Winkel YUS viel kürzer finden können. Da nämlich

UYM	=	121° 43′ 2″
und SYM	=	90°
so ist UYS	=	31° 43′ 2″
also YUS	=	180° − 2 . UYS
	=	116° 33′ 56″

Allein wir wollten zeigen, welche einfache Ausdrücke man für Sinus, Cosinus und Tangente unseres Winkels findet — Ausdrücke, zu denen Legendre auf ganz anderem Wege gelangt ist.

479. Lehrsatz. Der cubische Inhalt eines regelmäßigen Polyeders ist gleich dem eines Parallelepipedums, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des Polyeders, und dessen Höhe gleich dem dritten Theile der Geraden, welche die Entfernung des Mittelpunctes von einer der Gränzflächen mißt.

L. G. Anh. zum VII B., 3, Zus. 2.

Bew. Aus 469.

480. Lehrsatz. Das regelmäßige Tetraeder ist inhaltsgleich mit dem senkrechten Parallelepipedum, welches mit jenem gleiche Höhe hat, und dessen Grundfläche dreimal so klein als die des Tetraeders ist.

Der cubische Inhalt des regelmäßigen Octaeders ist gleich dem eines senkrechten Parallelepipedums, dessen Höhe gleich der Axe des Octaeders, und dessen Grundfläche gleich dem dritten Theile des Quadrates seiner Kante.

Das regelmäßige Ikosaeder ist von gleichem Inhalte mit dem senkrechten Parallelepipedum, dessen Höhe gleich dem dritten Theile der Entfernung zweier gegenüberstehender paralleler Gränzflächen des Ikosaeders, und dessen Grundfläche das Zehnfache einer der Seitenflächen ist.

Das regelmäßige Dodekaeder ist von gleichem Inhalte mit dem senkrechten Parallelepipedum, das mit jenem gleiche Höhe, und dessen Grundfläche das Doppelte von einer der Gränzflächen des Dodekaeders ist.

Bew. Für das Tetraeder, als regelmäßige dreiseitige Pyramide, und für das Octaeder als doppelte regelmäßige vierseitige Pyramide aus 465; für das Ikosaeder und Dodekaeder aus 469, indem man das Ikosaeder aus zwanzig dreiseitigen und das Dodekaeder aus zwölf fünfseitigen Pyramiden zusammengesetzt betrachtet, deren Höhe die Hälfte von der des Polyeders ist.

Durch das Bisherige kann man nun leicht solche Ausdrücke sowohl für die Oberfläche als den cubischen Inhalt der fünf regelmäßigen Polyeder finden, in denen nur das einzige bestimmende Element des Polyeders — seine Kante — vorkömmt. Es wird nämlich, wenn diese Kante $= a$ ist, ausgedrückt

Zus. 1. Die Oberfläche des Würfels durch $6\,a^2$

Sein Inhalt durch a^3

Zus. 2. Die Oberfläche des Tetraeders durch $a^2 \sqrt{3}$

Sein Inhalt durch $a^3 \dfrac{\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a^3}{6\sqrt{2}}$

Bew. Die Oberfläche ist offenbar das Vierfache der einen Gränzfläche; also

$$= 4 \triangle ABG$$
$$= 2\, BGAD$$
$$= 2\, a\, \frac{a}{2} \sqrt{3}$$
$$= a^2 \sqrt{3}$$

Der Inhalt wird ausgedrückt durch $\frac{1}{3}\, VE \,.\, \triangle ABG$,

also

$$= \tfrac{1}{3}\, a \sqrt{\frac{2}{3}} \,.\, \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$
$$= \frac{a^3}{12} \,.\, \sqrt{2}$$

Zus. 3. Die Oberfläche des Octaeders wird ausgedrückt durch $2\,a^2 \sqrt{3}$

Sein Inhalt durch $\dfrac{a^3}{3} \sqrt{3}$

Bew. Da der Inhalt jeder Gränzfläche $= \dfrac{a^2}{4} \sqrt{3}$, so ist der Inhalt der Summe aller d. h. die Oberfläche des Polyeders $= 2\,a^2 \sqrt{3}$.

Nach unserm Hauptsatze wird der Inhalt dargestellt durch das Product aus dem dritten Theil des Quadrates der Kante $\left(\dfrac{a^2}{3}\right)$ und aus der Axe $(a \sqrt{2})$, also durch $\dfrac{a^3}{3} \sqrt{2}$.

Zus. 4. Die Oberfläche des Ikosaeders wird ausgedrückt durch $5\ a^2 \sqrt{3}$

Sein Inhalt durch $a^3 \cdot \frac{5\,(3 + \sqrt{5})}{12}$

Bew. Der Flächeninhalt jeder Gränzfläche ist $= \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$, also die gesammte Oberfläche $= \frac{20}{4} a^2 \sqrt{3} = 5\ a^2 \sqrt{3}$. Die halbe Höhe ist $= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$, also der cubische Inhalt =

$$5\ a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{a}{6} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = \frac{5\ a^3}{6} \cdot \sqrt{\frac{(7 + 3\sqrt{5}) \cdot 3}{6}}$$

$$= \frac{5\ a^3}{6} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{5\ a^3}{12} \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5\ a^3}{12} \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{5\ a^3}{12} \cdot (3 + \sqrt{5})$$

Zus. 5. Die Oberfläche des Dodekaeders ist $= 15\ a^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$

Sein Inhalt $= a^3 \cdot \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}$

Bew. Zunächst ist der Flächenraum der Gränzfläche des Dodekaeders zu bestimmen. Derselbe wird ausgedrückt durch das Product aus der fünffachen Kante, 5 . YM = 5a, und der Hälfte der Senkrechten aus dem Mittelpuncte auf die Kante. Diese Senkrechte ist nun nach 478, V, Nro. 3

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$$

Der Ausdruck für die Gränzfläche ist demnach:

$$\frac{5\ a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5\ a^2}{4} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = \frac{a}{4} \sqrt{5\ (5 + 2\sqrt{5})}$$

und für die gesammte Oberfläche:

$$\frac{12\ a^2}{4} \cdot \sqrt{5\ (2\sqrt{5} + 5)} = 3\ a^2 \sqrt{5\ (2\sqrt{5} + 5)} =$$

$$15\ a^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$$

Die halbe Höhe des Dodekaeders ist nach 478, V, Nro. 4

$$CQ = \frac{a}{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$$

Nun hat man offenbar in dem Producte, das aus dem dritten Theil des Flächeninhaltes einer Gränzfläche und der sechsfachen Höhe des Dodekaeders gebildet wird, den Ausdruck für seinen Inhalt, also dieser Inhalt $= \frac{5}{12} \cdot a^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \cdot \frac{12\,a}{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$

$$= \frac{5\,a^3}{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}{5\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{5\,a^3}{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\frac{20 + 9\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}}$$

$$= a^3 \sqrt{\frac{25\,(20 + 9\sqrt{5})}{5\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 1)^2}}$$

$$= a^3 \sqrt{\frac{(20 + 9\sqrt{5})\sqrt{5}}{6 - 2\sqrt{5}}}$$

$$= a^3 \sqrt{\frac{(20 + 9\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}).\sqrt{5}}{(6 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})}}$$

$$= a^3 \sqrt{\frac{470 + 210\sqrt{5}}{16}}$$

$$= a^3 \sqrt{\left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$

$$= a^3\, \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}.$$

Zus. 6. Haben die fünf regelmäßigen Polyeder alle eine und dieselbe Kantenlänge a, so stehen ihre Oberflächen in folgendem Verhältnisse:

Oberfläche des Würfels	$6\,a^2$	$= a^2 \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
— — Tetraeders		$= a^2 \sqrt{3}$
— — Octaeders		$= a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2$
— — Isokaeders		$= a^2 \sqrt{3} \cdot 5$
— — Dodekaeders		$= a^2 \cdot \sqrt{3} . 5 \sqrt{\frac{3(5+2\sqrt{5})}{5}}$

Zus. 7. Die cubischen Inhalte unserer fünf Polyeder stehen, unter derselben Voraussetzung wie im vorigen Zusatze, in folgendem Verhältnisse:

Inhalt des Würfels	a^3	
— — Tetraeders	$a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$	$= a^3 \cdot 0{,}11785$
— — Octaeders	$a^3 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{12}$	$= a^3 \cdot 0{,}47140$
— — Ikosaeders	$a^3\, \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12}$	$= a^3 \cdot 2{,}18169$
— — Dodekaeders	$a^3\, \frac{45 + 21\sqrt{5}}{12}$	$= a^3 \cdot 7{,}66312$

Es ist also das Octaeder viermal so groß als das Tetraeder, und das Dodekaeder übersteigt das Dreifache des Ikosaeders um $\frac{a^3}{2}\sqrt{5}$.

Zus. 8. Haben unsere fünf regelmäßigen Polyeder dagegen gleichen Inhalt und bezeichnen wir der Kürze halber die Kanten des Tetraeders, Würfels, Octaeders, Ikosaeders und Dodekaeders respective durch a,t, a,c, a,o, a,i und a,d, so finden folgende Beziehungen Statt:

$$a,c : a,t : a,o : a,i : a,d = 1 : 2{,}0396 : 1{,}2849 : 0{,}7710 : 0{,}5052$$
$$a,t : a,c : a,o : a,i : a,d = 1 : 0{,}4903 : 0{,}6300 : 0{,}3780 : 0{,}2477$$
$$a,o : a,c : a,t : a,i : a,d = 1 : 0{,}7786 : 1{,}5874 : 0{,}6014 : 0{,}3932$$
$$a,i : a,c : a,t : a,o : a,d = 1 : 1{,}2979 : 2{,}6452 : 1{,}6664 : 0{,}6554$$
$$a,d : a,c : a,t : a,o : a,i = 1 : 1{,}9793 : 4{,}0370 : 2{,}5432 : 1{,}5262$$

Bew. Nach Zus. 7 ist, wenn wir die cubischen Inhalte eines Würfels und eines Tetraeders respective mit K und T bezeichnen,

$$K : T = (a,c)^3 : (a,t)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12},$$

also, wenn $K = T$, auch $(a,c)^3 = (a,t)^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$,

oder $(a,c)^3 : (a,t)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} : 1$

daher $a,c : a,t = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)} : 1$

$$a,t = a,c \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)}$$
$$= a,c \cdot 2{,}0396$$

und auf ähnliche Weise für die übrigen Fälle.

Anmerkung 2. Auf manchen älteren Proportionalzirkeln findet sich ein Paar Linien mit der Aufschrift: „corporum regularium reductio." Sie dienen dazu, die Kanten dieser regelmäßigen Polyeder für den Fall zu finden, daß sie inhaltsgleich sind.

481. Lehrsatz. Alle regelmäßigen Polyeder derselben Gattung, die also denselben Namen tragen, stehen, wie alle ähnlichen Körper, im dreifach hohen Verhältniß ihrer Kanten. Die Oberflächen derselben aber stehen im zweifach hohen Verhältniß dieser Kanten.

Bew. Aus 479 und 476, Zus. 7 für den einen Theil; aus 222, oder 480, Zuss. 6 und 7 für den zweiten.

Anmerkung. Auf diesem Satze beruht die Construction der beiden Linien, die sich auf den Proportionalzirkeln unter dem Namen „cubic" oder „solides" finden. Sie dienen dazu, die Kanten eines Polyeders zu finden, das einem gegebenen ähnlich und zu diesem ein vorgeschriebenes Inhaltsverhältniß hat. Wäre z. B. ein Polyeder A gegeben, und es sollte ein zweites B jenem ähnliches gefunden werden, welches das mfache des erstern wäre, so müßten offenbar zwei sich entsprechende Kanten a und b dieser Polyeder sich zu einander verhalten wie $1 : \sqrt[3]{m}$. Die genannten Linien der Proportionalzirkel sind nun vom Mittelpunct aus so getheilt, daß je zwei dieser vom Mittelpun-

cte aus abgeschnittenen Stücke sich zu einander verhalten wie die Cubikwurzeln der Zahlen, die an ihren Endpuncten stehen, so daß also z. B. die beiden Linien, an deren Endpuncten die Zahlen 1 und 8 stehen, sich zu einander verhalten $= \sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8}$ d. i. wie 1 : 2 d. h. es ist die letztere nicht achtmal, sondern nur doppelt so groß als die erste. Um also die der Kante a des gegebenen Polyeders A entsprechende b' des gesuchten Polyeders B zu erhalten, braucht man nur durch Hülfe des gewöhnlichen Zirkels vom Mittelpunct des Proportionalzirkels aus auf der genannten Linie die Länge zu nehmen, an deren Endpunct die Zahl m steht.

Ein anderer Gebrauch, den man von eben diesem Linienpaar des Proportionalzirkels machen kann, ist der, zwei mittlere Proportionalen zwischen zwei gegebenen Linien zu finden. Man sehe hierüber: Aufgg. III, 9 Auflösung 6.

482. Lehrsatz. Wenn von zwei ähnlichen regelmäßigen Polyedern das eine größer ist als das andere, so ist in jenem das Verhältniß der Oberfläche zum Inhalte kleiner als in diesem, und zwar so vielmal, als die Kante des letztern kleiner ist als die des erstern.

Bew. Aus 481.

Vierter Abschnitt.

Von der Construction der regelmäßigen Polyeder in einander.

483. Erklärung. Eine körperliche Figur heißt in eine andere beschrieben, wenn ihre Ecken entweder in den Ecken, oder auf den Kanten, oder auf den Gränzflächen dieser zweiten liegen.

484. Erklärung. Eine körperliche Figur heißt um eine andere beschrieben, wenn entweder die Ecken beider zusammenfallen, oder die Kanten oder die Gränzflächen der erstern durch die Ecken der andern gehen.

485. Lehrsatz. Kein Polyeder kann in ein anderes beschrieben werden, wenn nicht die Anzahl entweder der Gränzflächen, oder der Kanten, oder der Ecken in diesem zweiten Polyeder wenigstens eben so groß ist als die Anzahl der Ecken in dem ersten.

Bew. Aus 483.

Zus. 1. Also kann weder ein Würfel, noch ein Ikosaeder, noch ein Dodekaeder in ein Tetraeder beschrieben werden; und eben so wenig ein Dodekaeder in ein Octaeder oder in einen Würfel.

Zus. 2. Die übrigen regelmäßigen Polyeder lassen sich in einander beschreiben, aber nicht immer vollkommen d. h. so daß jede Seitenfläche oder jede Kante des äußern Polyeders von einer Ecke des innern oder eingeschriebenen getroffen wird, oder auf jeder Seitenfläche des erstern eine Kante des letztern liegt.

Anmerkung 1. In dem 15ten Buche der Elemente des Euclides, welches aber, wie das 14te höchstwahrscheinlich, um nicht zu sagen gewiß, nicht den Euclides selbst, sondern den Hypsicles aus Alexandrien zum Verfasser hat, wird nur von dieser vollkommneren Art des Einschreibens gehandelt. Ein Herausgeber des Euclides, Foix de Candalle, hat am Schlusse des 15ten Buches und zwar vom sechsten Satze an (indem er den 6ten und 7ten Satz des Originals wegließ) noch mehrere Sätze beigefügt, andere weniger vollkommene Arten des Einschreibens eines Polyeders in ein anderes betreffend.

Clavius hat später dieselben in seine Ausgabe des Euclides aufgenommen; allein wir lassen sie bei Seite liegen.

Zus. 3. Ein Tetraeder kann einem Würfel so eingeschrieben werden, daß seine sechs Kanten in die sechs Gränzflächen des letztern fallen und namentlich die Diagonalen derselben bilden. Die Ecken eines solchen Tetraeders fallen also mit vier Ecken des Würfels zusammen.

Eucl. XV, 1.

Zus. 4. Ein Octaeder läßt sich sowohl in ein Tetraeder, als in einen Würfel beschreiben.

Das Erstere geschieht dadurch, daß man die Halbirungspuncte der sechs Kanten des Tetraeders zu Ecken des Octaeders macht.

Eucl. XV, 2.

Das Andere erreicht man, indem man die Mittelpuncte der sechs Gränzflächen zu Ecken des Octaeders nimmt.

Eucl. XV, 3.

Zus. 5. Ein Würfel läßt sich sowohl in ein Octaeder als in ein Dodekaeder beschreiben; in dem erstern Falle nimmt man die Mittelpuncte der acht Gränzflächen zu Ecken des Würfels.

Eucl. XV, 4.

In ein Dodekaeder läßt sich ein Würfel dadurch beschreiben, daß man die zwölf Kanten des letztern Diagonalen in den zwölf Gränzflächen des erstern sein läßt; wo also die acht Ecken des Würfels mit acht Ecken des Dodekaeders zusammenfallen. Die vier Axen des einen Polyeders sind auch zugleich Axen des andern. In Fig. 230 würde man durch die Diagonalen MP, PW, WB und BM die eine Gränzfläche des Würfels erhalten und auf ähnliche Weise die übrigen.

Anmerkung 2. Die Axe eines Würfels, dessen Kante a, ist $a\sqrt{3}$; von unserm in das Dodekaeder beschriebenen Würfel, dessen Kante MP, ist also die Axe $MP\sqrt{3}$. Aber nach 478, Nro. 1 ist

$$MP = LM \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = LM \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{2\,LM}{\sqrt{5}-1},$$

also die Axe unseres in Rede stehenden Würfels $LM \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$. Dieß ist genau derselbe Werth, welchen wir oben 478, V, für die Axe des Dodekaeders gefunden haben.

Zus. 6. Ein Dodekaeder läßt sich in ein Ikosaeder beschreiben, indem man die Mittelpuncte der Gränzflächen des letztern zu Ecken des erstern nimmt.

Eucl. XV, 5.

Zus. 7. Daß man in jedes regelmäßige Polyeder ein anderes ihm ähnliches beschreiben kann, ist von selbst einleuchtend.

Anmerkung 3. Die Betrachtung der regelmäßigen Polyeder kann zu mancherlei Fragen und Aufgaben führen. Bemerkenswerth ist diejenige, welche zuerst Prinz Rupert oder Robert, aus dem Hause der Rheinischen Pfalzgrafen aufstellte und practisch löste, die später Wallis (s. Opp. II, p. 470) einer wissenschaftlichen Untersuchung unterwarf, und zuletzt Nieuwland erweiterte und vollendete.

Die Aufgabe, in ihrer ursprünglichen Gestalt, war folgende: Aus einem Würfel ein Stück so auszuschneiden, daß man durch das so entstandene Loch einen andern, eben so großen Würfel, als der gegebene ist, hindurch schieben kann. Nachdem man sich später überzeugt hatte, daß der Schnitt so geführt werden könnte, um sogar einen größern Würfel, als den gegebenen, durch die entstandene Oeffnung hindurchzuschieben, suchte man den möglich größten unter allen zu bestimmen. Folgende Erläuterung der erwähnten Aufgabe mag hier genügen.

Betrachtet man die obere Gränzfläche ABCD (Fig. 235[a]) des Würfels BCDH

(Fig. 235^c), so fällt es in die Augen, daß, weil die Diagonale AC größer als die Seite AB, und zwar $AC = AB \cdot \sqrt{2}$, man immer auf AC und sogar noch in einiger Entfernung von ihr auf einer mit ihr selbst parallelen Linie ein Stück kb gleich der Seite AB abschneiden kann.

Zieht man nun ki und bm senkrecht und dächte sich einen Schnitt nach der Richtung dieser drei Linien geführt, so würde sich durch die so entstandene Oeffnung ein Körper schieben lassen, der mit dem Würfel selbst gleiche Breite hätte. Auf ähnliche Weise verfahre man mit der untern Gränzfläche GFEH (Fig. 235^b) unseres Würfels; nur ziehe man np nicht auf derselben Seite der Diagonale wie kb, so daß beide nicht senkrecht, sondern schief unter einander liegen.

Wird nun ein Schnitt geführt längs der Linien, wie sie die drei Figuren 235^a, ^b, ^c, näher angeben, so würde das herausgeschnittene Stück AHGsbmDruikA (Fig. 235^e) sein. Von der obern Gränzfläche bleibt übrig das Stück ikBCm, und ein ähnliches von der untern, beide mit einander verbunden durch die säulenähnlichen Stücke HnikA und bCmpq, welche eine Art von offnem Thor niBbmpn bilden, durch welches ein Körper hindurchgeschoben werden kann.

Sind nun kb und np (Fig. 235^d) von gleicher Größe mit der Kante AD oder HE des gegebenen Würfels, so ist letzterer seiner Breite nach durchschiebbar; aber seiner Höhe nach würde er es offenbar nicht sein, wenn np senkrecht unter kb läge. Doch dieß soll, wie früher ausdrücklich erinnert worden, nicht der Fall sein; es soll vielmehr kb schief unter np liegen, so daß die durch beide gehende Ebene kbnk die Grundfläche des Würfels unter schiefen Winkeln schneidet. Daher ist es wohl möglich, daß eine Gerade, welche in der genannten Ebene so gezogen wird, daß sie senkrecht auf pn und bk steht, gleich der Höhe des Würfels ist.

Ist nun der ganze Schnitt zugleich so geführt, daß die Ebene npr nicht parallel der Grundfläche, sondern senkrecht auf der Ebene bknp, und ist es eben so mit der Ebene Skb, so sieht man deutlich, wie durch die so erhaltene Oeffnung ein Würfel geschoben werden könne, der mit dem ursprünglichen von gleicher Größe.

So wie man aber in den Quadraten ABCD und EFGH (Fig. 235^a, ^b) die Linien bk und pn auch so nehmen kann, daß sie größer als die Quadratseite, so kann auch die eine schief unter der andern liegen, daß die auf beiden senkrecht stehende größer als die Höhe des Würfels ist. Es ist eben so einleuchtend, daß in diesem Falle ein Würfel durch die Oeffnung geschoben werden kann, der noch größer als der gegebene.

Es entsteht sonach die Frage, welches ist der größte unter allen Würfeln, die auf die im Vorigen angegebene Weise durch einen gegebenen Würfel hindurchgeschoben werden können. Diese Frage wurde zuerst von Nieuwland beantwortet.

Wir wollen in einem besondern Anhange am Schlusse die desfallsige kurze Abhandlung dieses wackern Mathematikers mittheilen.

Zwölftes Buch.

Von den durch krumme Oberflächen begränzten Körpern.

487. Die Körper unterscheiden sich, wie wir im Eingange des vorigen Buches bemerkt haben, unter andern auch dadurch, daß viele von geraden, andere von krummen Flächen begränzt werden. Von den erstern, den Polyedern, ist im vorigen Buche gehandelt worden. Unter der großen Anzahl der Körper zweiter Classe sind nur drei, die in das Gebiet der Elementargeometrie gehören: der Cylinder, der Kegel und die Kugel. Denn sie sind die einzigen, deren krumme Oberflächen entweder nur durch Kreise, oder durch eine Verbindung von Geraden und Kreisen erzeugt werden. — Wir werden uns daher in dem Folgenden auf diese drei Körper beschränken.

Erster Abschnitt.

Vom Cylinder.

488. Erklärung. Beschreibt man in zwei verschiedenen aber parallelen Ebenen zwei gleiche Kreise, verbindet deren Mittelpuncte und läßt eine zweite Gerade sich längs der beiden Umkreise so bewegen, daß sie stets sich selbst und der die Mittelpuncte verbindenden parallel bleibt, so umschließt die so entstandene krumme Fläche nebst den beiden parallelen Kreisen einen Körper, welcher Cylinder oder Walze genannt wird. — Die beiden Kreise heißen die Grundflächen des Cylinders; die Gerade, welche die Mittelpuncte verbindet, dessen Axe. Steht diese letztere senkrecht auf den Grundflächen, so heißt der Cylinder ein gerader; im entgegengesetzten Falle ein schiefer.

Eucl. XI, Erkl. 21, 22, 23. — L. G. VIII, Erkl. 1.

Anmerkung 1. Den geraden Cylinder kann man sich durch Umdrehung eines Rechtecks um eine seiner Seiten als Axe entstanden denken. Ihre Gegenseite beschreibt alsdann die krumme Oberfläche oder den Mantel des Cylinders, die beiden andern Seiten seine Grundflächen. Diese Erklärung giebt Euclides; ihm folgt hierin Legendre; schiefe Cylinder sind dadurch ausgeschlossen.

Anmerkung 2. Andere betrachten den Cylinder so entstanden, daß ein Kreis längs einer geraden Linie sich parallel mit sich selbst bewegt z. B. der Kreis CHD (Fig. 237) längs der Geraden CA oder Ca mit sich selbst parallel, so daß also auch Kreis AGB oder agb parallel mit CHD.

Zuf. 1. Schneidet man einen Cylinder durch eine Ebene LMNO (Fig. 237), welche parallel den Grundflächen, so ist der Schnitt ein Kreis.

Jeder durch die Axe gehende Schnitt und eben so auch jeder ihm parallele ist ein Parallelogramm, und zwar ein Rechteck, wenn der Cylinder ein gerader ist.

Alle diese Parallelogramme haben gleiche Höhe mit dem Cylinder, verhalten sich also wie ihre Grundlinien.

Anmerkung 3. Alle Schnitte, die nicht in eine der beiden genannten Classen gehören d. h. die weder den Grundflächen noch der Axe parallel sind, gehören auch nicht in das Gebiet der Elementargeometrie, wenigstens dann nicht, wenn man die Gränzen dieses Gebietes so bestimmt, wie dieß die Alten zu thun pflegten. Die schneidende Ebene bildet in diesem Falle mit der krummen Oberfläche eine krumme Linie, welche Ellipse heißt und zu den Kegelschnitten gehört.

Zuf. 2. Schneidet man einen Cylinder parallel mit der Grundfläche und zieht an den so erhaltenen Kreis eine Tangente, so berührt dieselbe auch die krumme Oberfläche des Cylinders in eben diesem Puncte. Jede Gerade dagegen, welche man durch einen Punct dieser Oberfläche parallel mit der Axe zieht, liegt ganz in dieser Oberfläche.

Zuf. 3. Wenn eine Ebene der krummen Oberfläche eines Cylinders begegnet und zwar so, daß die beiden gemeinschaftlichen Puncte auf einer Geraden liegen, welche parallel der Axe des Cylinders ist, also ganz in dessen Oberfläche liegt, und alle Senkrechten, die man auf dieser Geraden errichtet, Tangenten für Kreise sind, welche durch Schnitte, die parallel den Grundflächen, entstanden, so haben Ebene und Cylinder auch keinen einzigen Punct außer dieser Geraden mit einander gemein.

488. Erklärung. Aehnliche Cylinder sind diejenigen, deren Axen sich wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten und gleiche Neigungswinkel mit den Grundflächen bilden.

Eucl. XI, Erkl. 24. — L. G. VIII, Erkl. 4.

Anmerkung. Diese Erklärung ist eine unmittelbare Folgerung aus der frühern Erklärung des vorigen Buches in 438. Um dieß einleuchtend zu machen, braucht man nur zu erwägen, daß man unsere Erklärung auch so ausdrücken könnte: Cylinder sind ähnlich, wenn sowohl ihre Gränzflächen als die krummen Oberflächen ähnlich sind. Die Grundflächen sind nun als Kreise stets ähnlich und ihre Peripherien den Durchmessern proportionirt, von den krummen Oberflächen aber soll später (494) gezeigt werden, daß sie sich zu einander verhalten, wie die Rechtecke aus den Peripherien der Grundflächen und aus den Axen. Die Cylinder werden demnach ähnlich sein, wenn die genannten Rechtecke es sind d. h. wenn die Axen sich wie die Durchmesser der Grundflächen verhalten.

Sind ähnliche Cylinder gerade, so sind auch die Rechtecke ähnlich, aus denen sie als entstanden betrachtet werden können.

489. Erklärung. Ein Prisma heißt in einen Cylinder beschrieben oder der Cylinder dem Prisma umschrieben, wenn die beiden Grundflächen des Prisma Vielecke sind, welche den Grundflächen des Cylinders eingeschrieben sind.

L. G. VIII, Erkl. 6.

Zuf. 1. Die Seitenkanten des Prisma sind parallel der Axe des Cylinders, liegen also in dessen Oberfläche.

Zuf. 2. Sind die den Grundflächen des Cylinders eingeschriebenen Vielecke rechtwinkelige Parallelogramme, so ist das eingeschriebene Prisma ein Parallelepipedum.

490. Erklärung. Ein Prisma heißt einem Cylinder umschrieben, oder dieser in jenes eingeschrieben, wenn die beiden Grundflächen des Prisma Vielecke bilden, welche den Grundflächen des Cylinders umschrieben sind.

L. G. VIII, Erkl. 5.

Zus. 1. Die Seitenflächen des Prisma berühren den Mantel des Cylinders d. h. jede hat mit dem Mantel nur eine einzige Gerade gemeinschaftlich und liegt übrigens ganz außerhalb des Cylinders.

Zus. 2. Soll das einem Cylinder umschriebene Prisma ein Parallelepipedum sein, so müssen seine Grundflächen den Grundflächen des Cylinders umschriebene Parallelogramme d. h. Rhomben sein.

491. Lehrsatz. Ein Cylinder ist die Wachsthumsgränze für alle ihm eingeschriebenen Prismen, und die Verminderungsgränze für alle umschriebenen.

Tacquet Selecta ex Archimede pr. 8, 10.

Bew. Aus 489 und 490, in Verbindung mit 319.

Zus. Aus unserem Satze sieht man, welcher Sinn zu verbinden sei mit der von vielen aufgestellten, aber ungenauen, Behauptung, daß ein Cylinder ein Prisma von unendlich vielen Seitenflächen sei.

492. Lehrsatz. Verschiedene Cylinder stehen im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen.

Bew. Aus 491, 311, 313 und 454.

Zus. 1. Das Verhältniß, in welchem die cubischen Inhalte zweier Cylinder stehen, ist daher zusammengesetzt aus dem einfachen Verhältniß ihrer Höhen, und dem zweifach hohen Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen.

Zus. 2. Cylinder sind also inhaltsgleich, wenn sowohl ihre Grundflächen als Höhen gleich sind. Bei gleichen Höhen verhalten sie sich wie ihre Grundflächen.

Eucl. XII, 11.

Zus. 3. Cylinder von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen. Schneidet man also einen durch mehrere mit den Grundflächen parallele Ebenen, so verhalten sich die zwischen denselben liegenden Cylinderstücke, wie die zwischen eben diesen Ebenen enthaltenen Stücke der Axe des Cylinders.

Eucl. XII, 13.

Zus. 4. Sind zwei Cylinder inhaltsgleich, so verhalten sich ihre Grundflächen umgekehrt wie ihre Höhen, und findet dieses Verhältniß Statt, so sind die Cylinder inhaltsgleich.

Eucl. XII, 15.

Zus. 5. Aus dem vorigen Zusatze und aus 450, Zus. 4 ergiebt sich nun auch, in wie fern man sagen könne, der Inhalt eines Cylinders sei gleich dem Producte aus seiner Grundfläche und Höhe, so daß also, wenn man den Inhalt mit C, den Halbmesser der Grundfläche mit R, und die Höhe mit h bezeichnet,

$$C = R^2 \pi h$$

sei; wo π den bekannten Werth hat, nach welchem $\pi : 1 =$ Umkreis : Durchmesser ist.

L. G. VIII, 1.

Zus. 6. Ist die Höhe des Cylinders dem Halbmesser der Grundfläche gleich, so ist der Ausdruck für seinen Inhalt: $R^3\pi$.

493. Lehrsatz. Ein Cylinder verhält sich zu dem ihm umschriebenen Parallelepipedum, dessen Endflächen Quadrate sind, wie seine Grundfläche zum Quadrat ihres Durchmessers, oder wie der vierte Theil des Umkreises zum Durchmesser.

Bew. Aus 491, 454, und 320, Zus. 2.

Zus. Also nach Archimedes (333) ist dieses Verhältniß $= 11 : 14$.

494. Lehrsatz. Der Mantel eines geraden Cylinders ist gleichflächig einem Rechtecke, dessen Höhe gleich der Axe und dessen Grundlinie gleich dem Umkreise der Grundfläche ist; oder, was auf dasselbe hinauskommt, dieser Mantel ist gleichflächig dem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen der Axe und dem Durchmesser der Grundfläche ist.

Tacquet Selecta ex Archimede pr. 10, Cor. 1 et 5 und pr. 11 nebst pr. 11 Cor. 1.
L. G. VIII, 4.

Bew. Aus 491, 456, und 320, Zus. 2.

Anmerkung 1. Auf diesem Satze beruht, wie wir früher schon bemerkt haben, die Erklärung ähnlicher Cylinder.

Anmerkung 2. Die Mäntel zweier Cylinder sind daher auch in allen den Fällen gleich, in welchen Rechtecke es sind (202, Zuss. 4 und 5).
Tacquet pr. 10, Cor. 2 und pr. 11, Cor. 2, 3 etc.

Zus. 1. Der Mantel eines geraden Cylinders verhält sich zur Grundfläche, wie die Axe zur Hälfte des Radius der Grundfläche.
Tacquet pr. 10, Cor. 3, und pr. 12.

Zus. 2. Ist die Axe eines geraden Cylinders gleich dem Durchmesser der Grundfläche, so ist der Mantel viermal so groß als die Grundfläche.
Tacquet pr. 12, Cor.

Zus. 3. Die gesammte Oberfläche eines solchen Cylinders ist also sechsmal so groß als jede Grundfläche.

495. Lehrsatz. Aehnliche Cylinder stehen im dreifach hohen Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen.
Eucl. XII, 12.

Bew. Aus 491 und 450.

496. Lehrsatz. Sind die Mäntel zweier geraden Cylinder gleichflächig, so verhalten sich die Cylinder selbst wie die Durchmesser ihrer Grundflächen, oder umgekehrt wie ihre Höhen. Sind dagegen zwei Cylinder inhaltsgleich, so stehen ihre Mäntel im einfachen umgekehrten Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, oder im zweifach niedern Verhältniß ihrer Höhen.
Tacquet pr. 10, Schol. 2.

Bew. Erster Theil. Es bezeichnen C, c die cubischen Inhalte zweier Cylinder, H, h ihre Höhen, und D, d die Durchmesser der Grundflächen; M, m die Flächenräume ihrer Mäntel. Alsdann ist:

$$M : m = DH\pi : dh\pi, \text{ also, wenn } M = m,$$
$$D : d = h : H$$

Aber es ist: $C : c = D^2 . H : d^2 . h$ (492, Zus. 1), also auch:

$$C : c = D^2 . d : d^2 . D$$
$$= D : d$$
$$= h : H$$

Zweiter Theil. Weil nach Voraussetzung $C = c$, so ist auch

$$D^2 . H = d^2 . h, \text{ also}$$
$$D : d = \sqrt{h} : \sqrt{H}$$

Nun ist auch: $M : m = D . H : d . h$

$$= D . d^2 : d . D^2$$
$$= d : D$$
$$= \sqrt{H} : \sqrt{h}$$

Zus. 1. Ist daher ein Rechteck gegeben und wird die Construction eines cylindrischen Gefäßes verlangt, für welches das Rechteck den Axendurchschnitt bildet, so macht es für den Inhalt des Gefäßes einen Unterschied, ob man die kleinere oder die größere Seite des Rechtecks zur Höhe nimmt; dieser Inhalt ist im erstern Falle größer als im letztern — ein Umstand, der in der Praxis nicht unwichtig ist.

Zus. 2. Aus unserm Satze ergiebt sich auch, wie die Oberfläche eines Drahtes zunimmt, wenn man denselben immer dünner und dünner zieht; wie also, wenn ein solcher Draht vergoldet ist, die Vergoldung mit der Zunahme der Länge des Drahtes, immer dünner und schwächer werden muß.

Zweiter Abschnitt.

Vom Kegel.

497. Erklärung. Nimmt man außerhalb der Ebene eines Kreises ADB (Fig. 233) einen beliebigen Punct V, und läßt um diesen als festen Mittelpunct eine Gerade VA sich längs der Peripherie des Kreises bewegen, so heißt die krumme Fläche, welche von der Geraden durch diese Bewegung erzeugt wird, Kegelfläche; der von ihr und dem gegebenen Kreise, als Grundfläche, begränzte Körper aber Kegel. Der feste Punct, um welchen sich die Gerade bewegt, ist die Spitze des Kegels; die Axe desselben ist die Gerade, welche die Spitze mit dem Mittelpuncte der Grundfläche verbindet; die die Kegelfläche erzeugende Gerade selbst heißt Kegelseite. Ein Kegel heißt ein gerader, wenn seine Axe senkrecht auf der Grundfläche steht; im entgegengesetzten Falle ein schiefer; wie BDAv Fig. 233.

Eucl. XI, Erkl. 18, 19, 20. — L. G. VIII, Erkl. 2.

Anmerkung 1. Andere wie Euclides und nach ihm Legendre und mehrere betrachten den Kegel durch Umdrehung eines rechtwinkeligen Dreiecks VCA um eine seiner Catheten als Axe entstanden. Die Hypotenuse beschreibt alsdann die Kegelfläche und die andere Cathete die Grundfläche. Diese Erklärung paßt aber freilich nicht auf schiefe Kegel.

Zus. 1. In jedem geraden Kegel sind alle Kegelseiten von gleicher Länge, in schiefen dagegen nicht.

Anmerkung 2. Die größte und kleinste Kegelseite beim schiefen Kegel liegen in derselben durch die Axe gehenden Ebene.

Zus. 2. Schneidet man einen Kegel durch eine Ebene, welche durch die Spitze und den Mittelpunct der Grundfläche, also durch die Axe desselben geht, so ist der Schnitt immer ein Dreieck, welches, bei einem geraden Kegel, gleichschenkelig ist und senkrecht auf der Grundfläche steht. Je nachdem nun der Winkel (AVB) an der Spitze eines solchen gleichschenkeligen Dreiecks ein rechter, oder ein stumpfer, oder ein spitzer, heißt der gerade Kegel selbst rechtwinkelig, oder stumpfwinkelig, oder spitzwinkelig.

Zus. 3. Alle mit der Grundfläche parallelen Schnitte sind Kreise*), deren Peripherien sowohl als Durchmesser im einfachen Verhältniß ihrer Entfernungen von der Spitze, deren Flächenräume aber im zweifach hohen Verhältniß der genannten Entfernungen stehen.

Anmerkung 3. Diejenigen Schnitte, welche man noch außer den beiden genannten, aus einer Kegelfläche mittelst einer Ebene erhalten kann, gehören nicht in das Gebiet der Elementargeometrie, wenn man die Gränzen dieses Gebietes so bestimmt, wie die Alten es thaten.

Anmerkung 4. Diese nicht zu den Elementen der Geometrie gehörenden und daher hier nicht näher zu betrachtenden Schnitte sind noch wichtiger als die parallelen und Axen-Schnitte; daher sie auch gewöhnlich vorzugsweise den Namen Kegelschnitte führen. Ihre Zahl beläuft sich auf drei; sie führen die Namen: Parabel, Ellipse, Hyperbel. Die Ellipse kann, wie schon früher bemerkt worden ist, auch aus dem Cylinder geschnitten werden.

498. Erklärung. Eine Pyramide heißt in einen Kegel beschrieben, oder der Kegel der Pyramide umschrieben, wenn ihre Grundfläche ein der Grundfläche des Kegels eingeschriebenes Vieleck ist, und ihre Seitenkanten Kegelseiten sind.

499. Erklärung. Eine Pyramide heißt um einen Kegel beschrieben, oder der Kegel in die Pyramide, wenn die Grundfläche der letztern um die Grundfläche des erstern beschrieben ist und beide Körper eine gemeinschaftliche Spitze haben.

Zus. Die Seitenflächen der Pyramide berühren die Kegelfläche.

500. Erklärung. Ein Kegel heißt in einen Cylinder beschrieben, oder dieser um jenen, wenn beide gemeinschaftliche Grundflächen haben, und die Spitze des Kegels in der obern Endfläche des Cylinders liegt.

Zus. 1. Der Kegel wird natürlich alsdann vom Cylinder ganz umschlossen.

Zus. 2. Sind Kegel und Cylinder gerade, so fallen auch ihre Axen zusammen.

501. Erklärung. Kegel sind ähnlich, wenn die Axen und die Durchmesser der Grundflächen einerlei Verhältniß zu einander haben. L. G. VIII, Erkl. 4.

Anmerkung. Auch bei dieser Erklärung gilt das, was wir bei einer frühern erinnert haben; s. 488, Anm.

502. Erklärung. Abgestumpfter Kegel oder Kegel-

*) Beim schiefen Kegel gilt dasselbe auch von allen antiparallelen Schnitten.
Anm. des Uebers.

stumpf heißt dasjenige Stück eines Kegels, welches übrig bleibt, wenn man durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene ein beliebiges Stück von der Spitze aus abschneidet. Ein solcher Stumpf wird also von zwei ungleichen aber parallelen Kreisen und von einem Theil der Kegelfläche begränzt. EFGBDAE (Fig. 233) ist ein Körper dieser Art.

L. G. VIII, Erkl. 3.

503. Lehrsatz. Der Kegel ist die Wachsthumsgränze für alle ihm eingeschriebenen, und die Verminderungsgränze für alle ihm umschriebenen Pyramiden.

Tacquet Selecta ex Arch. pr. 9, 10.

Bew. 498, 499 und 319.

Zus. Man sieht hieraus, welchen Sinn man mit dem ungenauen und nicht zu billigenden Ausdruck zu verbinden habe, dessen sich manche bedienen, wenn sie sagen, ein Kegel sei eine Pyramide von unendlich vielen Seiten.

504. Lehrsatz. Jeder Kegel ist der dritte Theil eines um ihn beschriebenen Cylinders.

Eucl. XII, 10. — L. G. VIII, 5, Zus.

Bew. Aus 503, 491, 311 und 465.

Zus. 1. Hieraus sieht man, wie man den von vielen gebrauchten Ausdruck zu verstehen habe, daß der Inhalt eines Kegels gleich sei dem Producte aus der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe.

L. G. VIII, 5.

Zus. 2. Bezeichnet R den Halbmesser der Grundfläche eines Kegels, h dessen Höhe, so kann der Inhalt des Kegels dargestellt werden durch: $\frac{R^2\pi h}{3}$.

Zus. 3. Der Inhalt eines Kegels verhält sich zu dem Inhalt des ihm umschriebenen rechtwinkeligen Parallelepipedums, wie der dritte Theil der Grundfläche zu dem ihr umschriebenen Quadrate, oder wie der zwölfte Theil des Umkreises zum Durchmesser (493).

505. Lehrsatz. Verschiedene Kegel stehen im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen.

Bew. Aus 504, Zus. 2.

Zus. 1. Kegel von gleicher Höhe stehen im einfachen Verhältnisse der Grundflächen oder im zweifach hohen ihrer Durchmesser. Kegel, von gleichen Grundflächen, verhalten sich wie ihre Höhen; und Kegel, die bei gleichen Grundflächen zwischen denselben parallelen Ebenen liegen, sind inhaltsgleich.

Eucl. XII, 11, 14. — L. G. VIII, 5, Zus.

Bew. Aus 492, 504 und 497.

Zus. 2. Die Grundflächen inhaltsgleicher Kegel verhalten sich umgekehrt wie ihre Höhen.

Eucl. XII, 15.

Zus. 3. Aehnliche Kegel stehen im dreifach hohen Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen.

Eucl. XII, 12. — L. G. VIII, 5, Zus. 3.

506. Lehrsatz. Die krumme Oberfläche oder der Mantel jedes geraden Kegels ist gleichflächig einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich der Peripherie der Grundfläche des Kegels und dessen Höhe gleich der

Kegelseite, oder gleichflächig dem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen dem Radius der Grundfläche und der Kegelseite.

Tacquet Sel. ex Arch. pr. 10 et 13. — L. G. VIII, 7.

Bew. Aus 503, 466 und 320, Zus. 1.

Anmerkung 1. Alle die Bedingungen, die wir früher (202, Zus. 3, Zus. 4 ꝛc.) als solche kennen gelernt haben, aus welchen man entweder Gleichheit oder ein bestimmtes Verhältniß der Flächenräume zweier Dreiecke folgert, finden also ihre Anwendung auch bei Kegelflächen.

Tacquet pr. 10, Cor. 7. — pr. 13, Cor. 2, 3 etc.

Zus. 1. Auf diesem unserm Satze beruht die Erklärung ähnlicher Kegel.

Zus. 2. Bezeichnet R den Radius der Grundfläche und k die Kegelseite, so kann der Flächenraum des Mantels dargestellt werden durch $R \cdot \pi \cdot k$.

Zus. 3. Beim geraden Kegel verhält sich der Mantel zur Grundfläche, wie die Kegelseite zum Radius der Grundfläche.

Tacquet pr. 10, Cor. 8 et pr. 14.

Zus. 4. Ist also die Kegelseite gleich dem Durchmesser der Grundfläche d. h. ist jedes Axendreieck nicht bloß gleichschenkelig, sondern gleichseitig, so ist der Mantel doppelt so groß als die Grundfläche, also die gesammte Oberfläche das Dreifache der Grundfläche.

Tacquet pr. 10, Cor. 9

Zus. 5. Der Mantel eines geraden Kegels ist auch gleichflächig einem Kreisausschnitt, dessen Halbmesser die Kegelseite und dessen zugehöriger Bogen von gleicher Länge ist mit der Peripherie der Grundfläche. Den wievielten Theil dieser Bogen von seinem ganzen Umkreis ausmacht, oder die Größe des Winkels, welchen die beiden den genannten Sector begränzenden Radien bilden, findet man durch die Proportion: Die Kegelseite verhält sich zum Halbmesser der Grundfläche, wie 360^{0} zum gesuchten Bogen.

Anmerkung 2. Hiernach ist es, wie man sieht, leicht, einen Kreisausschnitt zu beschreiben, aus welchem man durch geeignetes Zusammenfügen des Papiers, in dessen Ebene er sich befindet, den Mantel eines geraden Kegels von gegebener Höhe und Grundfläche erhält.

507. Lehrsatz. Der Mantel eines geraden abgestumpften Kegels ist gleichflächig einem Paralleltrapez, in welchem die beiden parallelen Seiten einzeln den Peripherien der beiden Kreise, die den Kegelstumpf begränzen, gleich, und um die Länge der Seite des Stumpfes von einander entfernt sind; oder gleichflächig einem Rechteck, dessen Höhe gleich der Seite des Stumpfes und dessen Grundlinie gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den Peripherien der beiden begränzenden Kreise ist, oder endlich gleichflächig einem Kreise, dessen Radius die mittlere geometrische Proportionale zwischen der genannten Kegelseite und der Summe der Radien der genannten Gränzkreise ist.

Tacquet Selecta ex Arch. pr. 15. — L. G. VIII, 8.

Bew. Aus 506 und 203, Zus. 8.

Anmerkung. Bezeichnet R den Halbmesser des untern, r den des obern Gränzkreises, und man nimmt Fig. 232 $CA = R$, $CF = r$, so ist, wenn DE von gleicher Länge mit der Peripherie des größern dieser Kreise, GH gleich der Peripherie des kleinern, also GHED gleich dem Mantel des Kegelstumpfes, aus welchem man durch geeignetes Zusammenrollen des Papiers, in dessen Ebene sich die Zeichnung befindet, den Kegelstumpf selbst leicht erhalten kann.

Zus. Der zweite von den drei Ausdrücken, welche der Hauptsatz für den Mantel eines abgestumpften Kegels angiebt, kann auch so abgeändert werden: dieser Mantel ist gleichflächig dem Rechteck, dessen Höhe gleich der Seite des Stumpfes, und dessen Grundlinie gleich der Peripherie des Kreises ist, den man erhält, wenn man den Kegel mitten zwischen seinen Gränzkreisen und parallel mit denselben schneidet.

L. G. VIII, 8, Zus.

Beweis. Wenn $AJ = JF$ (Fig. 231), so ist auch

$$JL = \frac{FG + AE}{2}.$$

508. Lehrsatz. Ein abgestumpfter (gerader) Kegel AEGB (Fig. 233) ist dreimal so klein als die drei Cylinder zusammen genommen, die alle mit dem abgestumpften Kegel gemeinschaftliche Höhe haben, und von denen der eine zur Grundfläche den untern Gränzkreis, der andere den obern, und der dritte denjenigen Kreis hat, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen den Radien der beiden erstern Kreise ist.

L. G. VIII, 6.

Bew. Der abgest. Kegel ist = Kegel AVB — Kegel EVG, also wenn R der Radius des untern, r der des obern Gränzkreises und H die Höhe des Stumpfes ist:

$$\text{abgest. Kegel} = R^2\pi \cdot \frac{VC}{3} - r^2\pi \cdot \frac{VF}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3}(R^2 \cdot VC - r^2 \cdot VF)$$

also, weil $VC : VF = R : r$, oder $r \cdot VC = R \cdot VF$

und $FC : VC = R - r : R$, also $VC = \frac{R \cdot FC}{R - r}$,

$$\text{abgest. Kegel} = \frac{\pi}{3} \cdot \left[\frac{R^3 \cdot FC}{R - r} - r^2 \cdot VF\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^3 \cdot FC - R \cdot r^2 \cdot VF + r^3 \cdot VF}{R - r}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^3 \cdot FC - r^3 \cdot VC + r^3 \cdot VF}{R - r}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^3 \cdot FC - r^3 \cdot FC}{R - r}$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(R^3 - r^3) \cdot H}{R - r}$$

$$= (R^2 + R \cdot r + r^2)\,\pi \cdot \frac{H}{3}$$

$$= (R^2 + r^2 + \rho^2)\,\pi \cdot \frac{H}{3}$$

wo ρ die mittlere Proportionale zwischen R und r bezeichnet.

Anmerkung. Diesen Satz theilt schon Clavius mit in seiner: geometria practica V, 3.

Dritter Abschnitt.

Von der Kugel.

509. Erklärung. Wenn ein Halbkreis sich um seinen Durchmesser als Axe dreht, so beschreibt die Kreislinie eine krumme Oberfläche, welche Sphäre oder Kugelfläche genannt wird; der von ihr umschlossene Körper heißt Kugel; der Durchmesser des Halbkreises ist die Axe der Kugel, seine beiden Endpuncte heißen Pole. Der Mittelpunct des Halbkreises ist zugleich auch Mittelpunct der Kugel.

Eucl. XI, Erkl. 14, 15, 16, 17.

Zus. Alle Geraden, welche den Mittelpunct der Kugel mit beliebigen Puncten der Sphäre verbinden, sind von gleicher Länge.

Anmerkung. Daher erklärt man nicht selten auch die Kugel als den Körper, welcher von einer krummen Oberfläche dergestalt begränzt wird, daß alle Puncte derselben gleiche Entfernung von einem innerhalb der Kugel gelegenen Puncte haben.

Tacquet zu Eucl. XII, Erkl. 5. — L. G. VII, Erkl. 1.

510. Jeder Kugelschnitt d. h. jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis.

L. G. VII, 1.

Anleitung zum Beweise. Fälle aus dem Mittelpuncte der Kugel auf die schneidende Ebene eine Senkrechte und zeige, daß deren Fußpunct gleiche Entfernung von allen Puncten hat, die der Oberfläche der Kugel und der schneidenden Ebene gemeinschaftlich sind.

Zus. 1. Wird eine Kugel von einer andern, oder von einem Cylinder, oder Kegel beliebig geschnitten, so ist immer die Durchschnittslinie ihrer beiderseitigen Oberflächen eine Kreislinie.

Zus. 2. Durch zwei beliebige Puncte auf der Sphäre und den Mittelpunct kann man immer eine Ebene legen, deren Durchschnitt mit der Sphäre eine Kreislinie sein muß; zwischen je zwei beliebigen Puncten auf der Sphäre läßt sich also immer ein Kreisbogen ziehen, dessen Mittelpunct mit dem der Kugel zusammenfällt.

L. G. VII, 1, Zus. 6.

511. Erklärung. Die Kugelschnitte, deren Ebenen durch den Mittelpunct der Kugel gehen, heißen größte Kreise, oder Normalkreise oder Hauptkreise der Kugel; ihre Durchmesser sind Kugeldurchmesser; Axe eines Normalkreises ist der auf seiner Ebene senkrechte Kugeldurchmesser; die Scheitel dieses letztern sind die Pole des erstern.

L. G. VII, Erkl. 3.

Anmerkung. Durch zwei Puncte auf der Sphäre läßt sich in der Regel nur ein einziger Normalkreis legen; nur in dem besondern Falle, wo diese beiden Puncte die Scheitel eines Kugeldurchmessers sind, bestimmen sie die Lage eines Normalkreises nicht, sondern es lassen sich durch sie unzählig viele solcher Kreise legen.

L. G. VII, 1, Zus. 3.

Zus. Alle Normalkreise derselben Kugel sind gleich, und halbiren sowohl die Kugel, als deren Oberfläche.

L. G. VII, 1, Zus. 3.

512. Erklärung. Alle Kugelschnitte, die nicht durch den Mit-

telpunct der Kugel gehen, heißen kleine oder Nichtnormal-Kreise oder Nebenkreise der Kugel.

L. G. VII, Erkl. 3.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß die Erklärung von Nebenkreisen nicht eher gegeben werden kann, als bis erwiesen ist, daß jeder Kugelschnitt ein Kreis ist.

Zus. Die Mittelpuncte jedes Nichtnormalkreises und der Kugel liegen auf einer geraden Linie, welche senkrecht auf der Ebene des erstern.

L. G. VII, 1, Zus. 4.

513. Lehrsatz. Nebenkreise einer Kugel sind desto kleiner, je weiter sie vom Mittelpuncte der Kugel, oder, was auf dasselbe hinauskömmt, von ihren Aequatoren d. h. von den ihnen parallelen Normalkreisen entfernt sind. Ihre Durchmesser und Peripherien verhalten sich zu den entsprechenden Stücken ihres Aequators wie der Cosinus des Bogens, der ihre Entfernung von letzterem mißt, zum Kugelhalbmesser.

L. G. VII, 1, Zus. 5.

Bew. Es sei EKFGE Fig. 149 ein beliebiger Hauptkreis, zu seinem Durchmesser EF als Axe gehöre GCK als Aequator, JND und MRB aber als zwei seiner Parallelkreise; die Bogen KD und KB messen alsdann die Entfernungen der Parallelkreise von ihrem Aequator; CS oder DN, und CP oder BR stellen offenbar die Cosinusse der genannten Bogen dar, woraus die Richtigkeit unseres Satzes sich ergiebt.

Anmerkung. Eine genauere Kenntniß dieser Nebenkreise, und namentlich des gegenseitigen Verhältnisses ihrer Peripherien nach Maaßgabe ihrer Entfernung vom Mittelpuncte der Kugel ist in der Geographie und Schiffahrtskunde von der größten Wichtigkeit. Wenn unter dem Aequator ein Grad in 15 geographische oder Deutsche Meilen und in 60 Englische Seemeilen getheilt wird, so enthält in jedem Parallelkreise des Aequators ein Grad nicht 15 Deutsche oder 60 Englische Meilen, sondern weniger, und zwar desto weniger, je weiter sich der Parallelkreis nach dem einen oder andern Pole zu von dem Aequator entfernt, oder je größer die geographische Breite ist, unter welcher sich dieser Parallelkreis befindet. So kommen z. B. unter einer Breite von 60° auf jeden Grad des Parallelkreises nur $7\frac{1}{2}$ Deutsche oder 30 Englische Meilen, oder mit andern Worten, der Umfang dieses Parallelkreises ist nur die Hälfte vom Umfange des Aequators, weil $\cos 60^{\circ} = \sin 30^{\circ} =$ der Hälfte des Radius ist.

514. Lehrsatz. Legt man durch zwei Puncte (E, J Fig. 241) auf der Kugeloberfläche, die nicht mit dem Mittelpuncte in gerader Linie liegen, einen Normalkreisbogen (und zwar den kleinern von den beiden, welche durch die beiden Puncte bestimmt werden) und auch einen beliebigen Nichtnormalkreisbogen, so ist letzterer immer größer als ersterer.

Bew. Da beide Bogen eine gemeinschaftliche Sehne haben, aber Kreisen von ungleichen Halbmessern angehören, so ist diese Sehne in dem größern Kreise weiter vom Mittelpuncte entfernt, als in dem kleinern, schneidet also in jenem einen kleinern Theil der Peripherie ab, als in diesem; der Normalkreisbogen macht daher einen kleinern Theil seiner Peripherie als der Nichtnormalkreisbogen von der seinigen aus*).

*) Es fällt fast von selbst in die Augen, daß dieser Beweis unseres Verfassers durchaus der nöthigen geometrischen Strenge ermangelt. Denn daraus, daß von zwei Kreisbogen der eine einen kleinern Theil seiner Peripherie ausmacht d. h. weniger Grade, Minuten und Secunden zählt als der andere, folgt keineswegs immer und nothwendig, daß er auch absolut kleiner oder kürzer sein müsse d. h. von irgend einer Längeneinheit nicht das Ebensovielfache sein könne als dieser zweite. Da die Peripherien verschiedener Kreise genau dasselbe Größenverhältniß zu einander haben, in welchem ihre Halbmesser stehen, so wird, wenn der Radius eines von zwei Kreisen das $n$fache vom Radius des andern ist, die Peripherie jenes erstern $n$mal so lang als die des letztern, mithin auch jeder 360te Theil von jener $n$mal so lang als jeder ebensovielte Theil von dieser, oder mit andern Worten, ein Bogen von einem Grade in dem größern Kreise wird eben so lang als ein Bogen von n Graden, mithin also größer als ein Bogen von $n-1$ Graden, $n-2$ Graden 2c. dieses kleinern Kreises sein. Hierdurch fällt aber das Unbegründete und Unzulängliche des dem Beweise unseres Verfassers zum Grunde liegenden Schlusses deutlich genug in die Augen.

515. Erklärung. Kugelabschnitt oder Kugelsegment

Die meisten Verfasser von Lehrbüchern vermeiden die Klippe, an der unser van Swinden hier scheiterte, einfach dadurch, daß sie die Richtigkeit unseres Satzes stillschweigend voraussetzen; einige wie z. B. J. J. A. Ide und Johann Schulz in ihren Anfangsgründen der reinen Mathematik brechen dieß Stillschweigen durch die Erklärung, daß die Entfernung zweier Puncte auf der Kugeloberfläche der kleinere von den beiden Hauptkreisbogen sei, die durch diese Puncte bestimmt werden.

Da man inzwischen, wie es die Natur der Sache mit sich bringt, bei der Entfernung zweier Puncte stets an den möglich kürzesten Weg denkt, auf welchem man unter den jedesmaligen Umständen von einem zum andern gelangen kann, so ist diese Erklärung nur richtig und zulässig, wenn mindestens vorher bewiesen worden, daß von mehrern zwischen denselben Puncten auf der Sphäre enthaltenen Bogen der (kleinere) Hauptkreisbogen der kürzeste ist. Solcher Beweise sind dem Uebersetzer außer dem obigen noch vier bekannt. Der eine, welchen Legendre in seiner Geometrie, VII, 3 mittheilt, wird, und wohl nicht mit Unrecht, angefochten von dem Deutschen Uebersetzer A. L. Crelle, welcher in einer Anmerkung, die er der betreffenden Stelle seiner Uebersetzung beifügt, zwei andere Beweise mittheilt. Allein der eine hat, wie der Verfasser selbst bemerkt, das gegen sich, daß er nicht rein geometrisch ist; und ob der andere allen Lesern genügen werde, ist billig zu bezweifeln. Der vierte dieser Beweise ist von C. F. Schulz und findet sich im ersten Theile seines trefflichen Lehrbuches der elementaren Sphärik (Leipzig 1833 in 8) pag. 6. Auch dieser Beweis leistet nicht allen Forderungen Genüge, indem er sich auf eine Annahme stützt, die zwar nicht unrichtig, aber völlig unerwiesen ist. Das Folgende ist ein Versuch zur Vervollständigung dieses Schulz'schen Beweises.

Lehnsatz 1. Sind B und B_1 zwei solche Bogen eines Kreises, daß keiner die Größe der halben Peripherie überschreitet, und $B > B_1$ ist; sind ferner die zugehörigen Sehnen dieser Bogen respective S und S_1, so ist immer $\frac{B}{S} > \frac{B_1}{S_1}$

Beweis. Jedenfalls lassen sich die beiden Bogen in eine solche gegenseitige Lage bringen, daß sie, wie DME und AMB in Fig. 157 (zu den Anhängen) sich zum Theil decken und ihre Sehnen parallel sind. Alsdann ist, wenn AF und BG senkrecht auf DE gezogen werden, Bogen AND = Bogen BOE, und DF = EG; setzen wir daher AND = δ und DF = d, so ist $B = B_1 + 2\delta$ und $S = S_1 + 2d$; also $\frac{B}{S} = \frac{B_1 + 2\delta}{S_1 + 2d}$ und mithin auch $\frac{B}{S} - \frac{B_1}{S_1} = \frac{B_1 + 2\delta}{S_1 + 2d} - \frac{B_1}{S_1} = \frac{2\,(\delta - d)\,.\,\frac{B_1}{S_1}}{S_1 + 2d}$. Um die Richtigkeit unserer Behauptung darzuthun, ist also zu zeigen, daß dieser Unterschied stets positiv oder daß $\delta > d\,.\,\frac{B_1}{S_1}$ ist. — Es ist nun aber $S_1 = 2 \sin \frac{B_1}{2}$ (für sin. tot = 1), also $\frac{B_1}{S_1} = \frac{\frac{1}{2} B_1}{\sin \frac{B_1}{2}}$, und aus den Sätzen, die schon Archimedes bewiesen hat, folgt unmittelbar, daß so lange ein Bogen x die Größe des Quadranten nicht übersteigt, $\tan x > x$, also auch $\sin x > x \cos x$, mithin $\frac{x}{\sin x} < \frac{x}{x \cos x}$, oder $\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, und darum $\frac{\frac{1}{2} B}{\sin \frac{B_1}{2}} < \frac{1}{\cos \frac{B_1}{2}}$ ist. Es ist ferner $\delta >$ Sehne AD, aber $AD = \frac{DF}{\cos ADF} = \frac{d}{\cos \frac{1}{2}(B_1 + \delta)}$, also $\delta > \frac{d}{\cos \frac{1}{2}(B_1 + \delta)}$, also auch, weil $\cos \frac{1}{2}(B_1 + \delta) < \cos \frac{1}{2} B_1$, $\delta > \frac{d}{\cos \frac{1}{2} B_1}$, und mithin um so mehr $\delta > d\,.\,\frac{B_1}{S_1}$.

Lehnsatz 2. Wenn zwei zu verschiedenen Kreisen gehörige Bogen AMB und ARB (Fig. 156), von denen jeder kleiner als ein Halbkreis ist, eine gemeinschaftliche Sehne (AB) haben, so ist derjenige (AMB) der kürzere, welcher zu dem größern Kreise gehört.

Bew. Zieht man im kleinern Kreise die Radien KA und KB und mit ihnen im größern Kreise zwei parallele CD und CE, so ist Bogen DME ähnlich dem Bogen ARB, also $\frac{DME}{DE} = \frac{ARB}{AB}$, mithin DE > AB, und darum auch Bogen DME > Bogen AMB; also, nach vorigem Lehnsatz $\frac{DME}{DE} > \frac{AMB}{AB}$, und deshalb auch $\frac{ARB}{AB} > \frac{AMB}{AB}$, mithin ARB > AMB.

Hauptsatz. Wenn man zwei beliebige Puncte auf einer Sphäre, welche nicht Gegenpuncte sind, durch eine beliebige Menge von Kugelkreisbogen verbindet, von denen keiner größer als ein halber Umkreis, so ist derjenige der kürzeste, dessen zugehörige Kreisebene dem Kugelmittelpuncte am nächsten ist.

Bew. Weil dieser dem Kugelmittelpuncte nächste Kreis der größte ist, so ergiebt sich die Richtigkeit unseres Satzes unmittelbar aus dem vorhergehenden zweiten Lehnsatze.

Zus. Der absolut kleinste aller dieser Kreisbogen ist daher derjenige, welcher dem durch die beiden in Rede stehenden Puncte bestimmten Hauptkreise angehört.

Anm. des Uebers.

(segment sphérique) heißt jedes von einer Kugel mittelst einer Ebene abgeschnittene Stück; wie z. B. BPDOBRD Fig. 241.

L. G. VII, 13.

Zus. Jeder Kugelabschnitt wird daher auf der einen Seite von einem Theile der Kugeloberfläche, auf der andern von einem Kreise begränzt.

Anmerkung 1. Die Höhe eines Kugelabschnitts ist die Senkrechte, die auf der Ebene des begränzenden Kreises im Mittelpuncte errichtet und bis zum Durchschnitt mit der Kugelfläche verlängert wird, also offenbar ein Theil der Axe des Gränzkreises.

Anmerkung 2. Diese Höhe PS Fig. 241 ist der Quersinus des Bogens PD, der Hälfte des Normalkreisbogens BPD, welcher die Scheitel eines Durchmessers vom Gränzkreise verbindet.

516. Erklärung. Abgestumpfter Kugelabschnitt heißt jeder Theil BDFE (Fig. 241) der Kugel, der zwischen zwei parallelen Kreisen BRDO und EQFT enthalten ist. Diese beiden Kreise, welche man als die Grundflächen des abgestumpften Kugelsegmentes betrachten kann, werden durch einen Theil der Kugelfläche mit einander verbunden, welchen man Kugelstreifen oder Kugelzone zu nennen pflegt.

Zus. Die Höhe eines abgestumpften Kugelsegments ist die Gerade, welche die Mittelpuncte der beiden Grundflächen verbindet, also einen Theil ihrer gemeinschaftlichen Axe bildet.

Anmerkung. Das abgestumpfte Kugelsegment BDFE geht in den einfachen Kugelabschnitt EPFTEOF, wenn seine Höhe von KS bis KP zunimmt.

517. Erklärung. Kugelausschnitt oder Kugelsector heißt der Theil BCDPB (Fig. 241) einer Kugel, welcher erzeugt wird durch einen Ausschnitt BCP des halben Normalkreises, wenn man letzteren zur Erzeugung der Kugel sich um seinen Durchmesser Pp drehen läßt.

Zus. 1. Die Grundfläche eines solchen Kugelsectors bildet ein Theil der Kugelfläche.

Zus. 2. So lange der erzeugende Kreisausschnitt kleiner ist als ein Quadrant, so bildet der Kugelsector einen Kegel mit sphärischer Grundfläche, und besteht aus dem gewöhnlichen Kegel und dem Kugelsegment BPDSBR.

Zus. 3. Erreicht der erzeugende Kreissector die Größe eines Quadranten, so wird der Kugelausschnitt der Halbkugel gleich.

Zus. 4. Wächst der erzeugende Kreissector noch über die Größe des Quadranten hinaus, so wird auch der Kugelsector größer als die Halbkugel, und ist gleich dem Ueberschuß der ganzen Kugel über den Kugelausschnitt, zu welchem als erzeugender Kreisausschnitt derjenige gehört, welcher den in Rede stehenden zum Halbkreise ergänzt.

518. Erklärung. Hat eine Ebene UVWX Fig. 241 eine solche Lage gegen eine Kugel, daß sie nur einen einzigen Punct p mit derselben gemein hat, so sagt man, daß Ebene und Kugel sich berühren; der beiden gemeinschaftliche Punct heißt der Berührungspunct.

Zus. 1. Der durch den Berührungspunct gehende Kugeldurchmesser steht senkrecht auf allen Geraden, welche man in der Berührungsebene durch seinen Scheitel zieht. Alle diese Geraden sind auch Berührende und zwar sowohl für die Kugel als auch jede für einen der

Kreise, die man auf der Sphäre so beschreibt, daß sie durch den Punct p gehen.

519. Erklärung. Ein Würfel heißt in eine Kugel beschrieben, wenn seine acht Ecken in deren Oberfläche liegen. Ein Cylinder heißt in eine Kugel beschrieben, wenn die Peripherien seiner beiden Gränzflächen auf der Sphäre liegen.

Zus. 1. Kein Cylinder läßt sich in eine Kugel beschreiben, wenn er nicht gerade ist. Seine Axe muß durch den Mittelpunct der Kugel gehen, und seine beiden Gränzflächen müssen gleich weit von diesem Mittelpuncte entfernt sein.

Zus. 2. Die beiden Gränzflächen eines solchen in eine Kugel eingeschriebenen Cylinders haben gleichen Inhalt mit zwei Nichtnormalkreisen der Kugel, die eben so weit als jene vom Mittelpuncte entfernt sind.

520. Erklärung. Ein Würfel, und eben so ein Cylinder heißen um eine Kugel beschrieben, wenn letztere jede einzelne Gränzfläche der erstern berührt; beim Würfel also alle sechs ihn begränzenden Quadrate, beim Cylinder sowohl die krumme Oberfläche, als auch die beiden parallelen Grundflächen.

Zus. Daher ist:

1) Die Seite des Würfels, und der Durchmesser der Grundfläche des Cylinders gleich dem Durchmesser der Kugel, um welche jene beiden erstern Körper beschrieben sind.
2) Die Axe des Cylinders fällt mit einem Kugeldurchmesser zusammen.
3) Die Puncte, in denen die krumme Oberfläche des Cylinders die Kugel berührt, liegen in der Peripherie des Normalkreises der Kugel, zu dem der Kugeldurchmesser als Axe gehört, welcher mit der Axe des Cylinders zusammenfällt. Bei dem Würfel wird jede Gränzfläche in ihrem Mittelpuncte von der Kugel berührt.

521. Erklärung. Ein Kegel heißt in eine Kugel beschrieben, wenn sowohl die Peripherie seiner Grundfläche als auch seine Spitze in der Kugelfläche liegen.

Zus. 1. Ist der Kegel ein gerader, so geht seine Axe durch den Mittelpunct der Kugel.

Zus. 2. Die Grundfläche des Kegels ist gleich dem Nebenkreis der Kugel, der mit ihr gleiche Entfernung vom Mittelpuncte hat.

522. Erklärung. Ein Kegel heißt um eine Kugel beschrieben, wenn sowohl seine Grundfläche, als sein Mantel die Kugel berührt.

Zus. Ist der Kegel gerade, so liegen die Puncte, in denen sein Mantel die Kugel berührt, im Umfange eines Nichtnormalkreises der letztern, der desto weiter sich vom Mittelpuncte entfernt, je mehr der Kegel stumpfwinkelig ist. Es ist (Fig. 236) $Co : CP = \sin CPo : 1 = \sin POJ : 1 = \sin \frac{1}{2} GOF : 1$.

523. Erklärung. Ein beliebiges Polyeder heißt in eine Kugel beschrieben, wenn seine sämmtlichen Ecken in der Kugelfläche liegen.

524. Erklärung. Ein beliebiges Polyeder heißt um eine

Kugel beschrieben, wenn jede seiner Gränzflächen deren Oberfläche berührt.

525. Lehrsatz. Die Kugel bildet die Wachsthumsgränze für alle ihr einbeschriebenen Polyeder und die Verminderungsgränze für alle um sie beschriebenen Polyeder.

Bew. Aus 469 und 319.

Zus. Hieraus ist zu ersehen, welchen Sinn man zu verbinden habe mit der von vielen gebrauchten ungenauen Ausdrucksweise, daß die Kugel ein Polyeder von unendlich vielen Gränzflächen sei.

526. Lehrsatz. Die Oberfläche einer Kugel ist gleichflächig einem Kreise, dessen Radius gleich dem Durchmesser der Kugel, oder ist gleich dem Vierfachen eines Normalkreises der Kugel, oder gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser und Umfang eines Normalkreises.

Tacquet Selecta ex Archim. pr. 18 — 24.
L. G. VIII, 10, Zus. 1.

Vorbereitung. Man denke sich in einen Normalkreis der Kugel ein Vieleck von 4 n Seiten beschrieben. ABCDEFGH (Fig. 144) sei ein solches; EA ein Kugeldurchmesser; man ziehe die Linien, wie sie die Figur angiebt, und erwäge, daß die Kugel durch Bewegung des Halbkreises ABCDE um seine Axe AE entstanden betrachtet werden kann. Bei dieser Bewegung beschreibt der Umfang unseres halben 4 necks offenbar zwei gleiche Kegel, und mehrere abgestumpfte Kegel, von denen je zwei solche, die gleichweit von dem einen und andern Ende abstehen, gleich sind.

Bew. Nimmt man nach Anleitung der Sätze in 506 und 507 die Ausdrücke für die Oberflächen der Kegel und Kegelstümpfe, so läßt sich deren Summe durch Hülfe des frühern Satzes 284, auf den einfachen Ausdruck π . AE . BE bringen. Die Kugelfläche ist nun offenbar die Wachsthumsgränze, für die Summe der vorhergenannten Flächen; um also von dieser Flächensumme zur Kugelfläche zu gelangen, muß man für BE ihre Wachthumsgränze d. i. den Durchmesser AB setzen, wodurch man durch Hülfe von 320 unsern Satz gewinnt.

Anmerkung 1. Von doppelt gerader Eckenzahl nimmt man das Vieleck, damit die halbe Anzahl seiner Seiten noch gerade sei und eben darum keine der Seiten dieses halben Umfangs ABCDE dem Durchmesser AE parallel sei. Denn sonst würde man bei der Umdrehung des Halbkreises um seine Axe neben den Kegeln und Kegelstümpfen auch einen Cylinder erhalten.

Anmerkung 2. Die dritte Art, wie wir oben unsern Satz ausgedrückt haben, macht es begreiflich, wie Legendre eben diesen Satz so aussprechen konnte: „Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Producte aus ihrem Durchmesser und der Peripherie eines Normalkreises.

527. Lehrsatz. Die krumme Oberfläche eines Kugelsegmentes ABCDFGHA (Fig. 144) ist gleichflächig einem Kreise, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen dem Kreisdurchmesser und der Höhe (AO) des Segments; also gleich einer Geraden (DA) ist, welche man von einem beliebigen Puncte (D) in der Peripherie der Grundfläche des Abschnitts nach dem zugehörigen Pole A zieht.

Tacquet Selecta ex Arch. pr. 25.

Bew. Aus 526 und 285 folgt leicht, daß die Oberfläche des Körpers FGHABCDF (mit Ausschluß der kreisförmigen Grundfläche) dargestellt wird durch π . BE . AO, also die sphärische Oberfläche unseres

Kugelsegmentes, welche offenbar die Wachsthumsgränze von der eben genannten Oberfläche bildet, durch π . AO . Gränze von BE d. i. AE, also durch π . AO . AE = π . $\overline{AD}^2$ rc.

Zus. 1. Die krummen Oberflächen verschiedener Abschnitte derselben Kugel verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Geraden, welche man von den Polen ihrer Grundflächen nach beliebigen Puncten im Umfange der letztern zieht, oder wie ihre Höhen.

Bew. Aus dem Hauptsatze und aus 254.

Zus. 2. Die krumme Oberfläche eines Kugelsegments verhält sich zur Kugelfläche wie die Höhe des Abschnitts zum Kugeldurchmesser.

528. Lehrsatz. Die Oberflächen verschiedener Kugeln verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Beweis leicht.

Anmerkung. Aus diesem Zusatze in Verbindung mit dem, was in 439, und in Anmerk. 2 zu 316 gesagt worden, ergiebt sich, daß alle Kugeln ähnliche Körper sind.

529. Lehrsatz. Eine Kugel ist inhaltsgleich mit einem Kegel, wenn die Höhe des letztern dem Kugelhalbmesser und seine Grundfläche der Kugeloberfläche gleich ist.

Tacquet pr. 28.

Bew. Aus 468 und 525.

Zus. 1. Der Inhalt einer Kugel ist das Vierfache vom Inhalte eines Kegels, dessen Grundfläche gleich dem Normalkreise der Kugel und dessen Höhe dem Radius derselben gleich ist.

Anmerkung 1. Bezeichnet man daher den Inhalt einer Kugel mit J, ihre Oberfläche mit O, ihren Radius mit R und den Inhalt eines Normalkreises mit K, so ist: $J = 4\,K \,.\, \frac{R}{3} = O \,.\, \frac{R}{3}$ und man gelangt so zu dem Ausdrucke unseres Satzes, wie er sich bei Legendre VIII, 11, Zus. findet.

Anmerkung 2. Es ergiebt sich ferner hieraus:

$J = \frac{4\,R^3\,\pi}{3} = \frac{4\,D^3\,\pi}{24} = \frac{D^3\,\pi}{6}$, wo D den Kugeldurchmesser bezeichnet.

Zus. 2. Eine Kugel ist doppelt so groß als ein Kegel, dessen Grundfläche gleich dem Normalkreise der Kugel und dessen Höhe gleich dem Durchmesser derselben ist.

Zus. 3. Jede Halbkugel ist also das Doppelte eines Kegels, dessen Grundfläche gleich dem Normalkreise und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

530. Lehrsatz. Jede Kugel verhält sich zu dem um sie beschriebenen Würfel, wie der sechste Theil vom Umfange eines Normalkreises zu dessen Durchmesser.

Bew. Aus 520 und 529, Anm. 2.

Zus. Eine Kugel verhält sich zum Cubus ihres Durchmessers
nach Archimedes = 11 : 21
nach Euclides = 157 : 300 = 11 : 21,02

Bew. Aus 325.

Anmerkung. Hierauf beruht auf der Linie, die sich auf alten Proportionalzirkeln unter der Bezeichnung „corporum regularium reductio“ befindet, und deren wir schon oben (480, Anm. 2) erwähnt haben, die Entfernung, in welcher man das Zeichen einer Kugel vom Mittelpuncte erblickt. Ist D der Durchmesser einer Kugel und die Kante des ihr umschriebenen Würfels, so verhält sich jene zu diesem wie 11 : 21,02, also wenn D′ den Durchmesser einer mit dem Würfel inhaltsgleichen Kugel bezeichnet, so ist:

$$D^3 : D'^3 = 11 : 21{,}02, \text{ mithin}$$

$$D : D' = \sqrt[3]{11} : \sqrt[3]{21{,}02}, \text{ daher}$$

$$D' = D \, . \sqrt[3]{\frac{21{,}02}{11}} = D \, . \, 1{,}2401$$

und diese Entfernung 1,2401 ist es, in welcher das Kugelzeichen vom Mittelpunct steht, wenn man dabei die Entfernung des Würfelzeichens vom Mittelpuncte, oder die Länge der Kante des der Kugel inhaltsgleichen Würfels als Einheit betrachtet.

531. Lehrsatz. Verschiedene Kugeln stehen im dreifach hohen Verhältnisse ihrer Durchmesser zu einander.

Eucl. XII, 18. — L. G. VIII, 15, Zus.

Bew. Aus 529, Anm. 2.

Anmerkung 1. Die Cubik- oder Körper-Linie auf Proportionalzirkeln dient auch dazu, Kugeln von gegebenem Verhältnisse zu construiren d. h. den Radius einer Kugel zu finden, welche zu einer gegebenen ein vorgeschriebenes Inhaltsverhältniß hat; da die Halbmesser zweier Kugeln, wie entsprechende Kanten ähnlicher Körper, im dreifach niedern Verhältniß der zugehörigen Körper selbst stehen.

Anmerkung 2. Auf einigen Proportionalzirkeln findet sich auch eine Linie, welche mit dem Namen „Metaux" oder „Metals" bezeichnet ist, und dazu dient, die Durchmesser von Kugeln zu finden, die aus verschiedenen Metallen gefertigt, gleiches Gewicht haben. Es kömmt bei der Bestimmung dieser Durchmesser auf die specifischen Gewichte der Metalle an, aus denen die Kugeln bereitet werden. Die absoluten Gewichte solcher Kugeln stehen nämlich im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer cubischen Inhalte (oder der Cuben ihrer Durchmesser) und der specifischen Gewichte. Es sei z. B. das specifische Gewicht von Gold G, von Silber g, der Durchmesser jener Kugel D, dieser d, so muß, wenn beide Kugeln gleiches Gewicht haben sollen,

$$G \, . \, D^3 = g \, . \, d^3 \text{ sein, also: } G : g = d^3 : D^3,$$

und daher $D : d = \sqrt[3]{g} : \sqrt[3]{G} = 1 : \sqrt[3]{\frac{G}{g}}$. Auf dieser Proportion beruht die Eintheilung der in Rede stehenden Linie älterer Proportionalzirkel.

532. Lehrsatz. Kleine Kugeln haben im Verhältnisse zu ihrem Inhalte größere Oberflächen als große, und zwar ist das Verhältniß der Oberfläche zum Inhalte bei der einen Kugel so viel mal größer als bei der andern so viel mal der Halbmesser der erstern kleiner als der der letztern ist.

Bew. Bezeichnen r und R die Halbmesser, o und O die Oberflächen, i und J die Inhalte zweier Kugeln, so ist:

$$\frac{O}{J} = \frac{4 \, R^2 \, \pi}{\frac{4}{3} \, R^3 \, \pi} = \frac{3}{R}$$

$$\frac{o}{i} = \frac{4 \, r^2 \, \pi}{\frac{4}{3} \, r^3 \, \pi} = \frac{3}{r},$$

$$\text{also } \frac{O}{J} : \frac{o}{i} = \frac{3}{R} : \frac{3}{r} = r : R$$

533. Lehrsatz. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Mantel des um die Kugel beschriebenen Cylinders.

Tacquet Selecta ex Archim. pr. 26.

Bew. Aus 494, Zus. 2, und 526.

534. Lehrsatz. Ist ein gerader Cylinder um eine Kugel beschrieben, und man schneidet beide mit einer beliebigen, auf der Axe des Cylinders senkrechten, Ebene, so ist der Mantel des abgeschnittenen Cy-

linderstücks ACMJ (Fig. 240) gleich der krummen Oberfläche des zugehörigen Kugelsegments SBQ.

Tacquet Selecta ex Arch. pr. 26, 27.

Vorbereitung. Es sei das Quadrat AE ein Axendurchschnitt des Cylinders, und mithin FBDL ein Normalkreis der Kugel.

Bew. Aus 494, 527, Zus. 1, und 533.

Anmerkung. Sind zwei solcher Ebenen, so ist die zwischen ihnen enthaltene Kugelzone gleichflächig mit dem zwischen eben diesen Ebenen enthaltenen Stück des Cylindermantels, wie sich aus zweimaliger Anwendung unseres Satzes sofort ergiebt.

Da nun die Grundflächen dieser Cylinderstücke gleich dem Normalkreise der Kugel, ihre Höhen aber gleich den Höhen der Kugelabschnitte oder der Kugelstreifen, so ergiebt sich daraus der Satz:

Zus. 1. Die krumme Oberfläche eines Abschnitts oder eines Streifens einer Kugel wird ausgedrückt durch das Product aus seiner Höhe und dem Umfange eines Normalkreises.

L. G. VIII, 11.

Zus. 2. Verschiedene Kugelmützen d. i. krumme Oberflächen von Kugelsegmenten, oder Kugelzonen auf derselben oder auf gleichen Kugeln verhalten sich wie ihre Höhen.

L. G. VIII, 11, Zus.

535. Lehrsatz. Jeder Cylinder ist anderthalb mal so groß als die Kugel, um welche er beschrieben ist; dasselbe Verhältniß findet zwischen der gesammten Oberfläche des Cylinders und der Kugeloberfläche Statt.

Tacquet Selecta ex Arch. pr. 32. — L. G. VIII, 16.

Bew. Erster Theil aus 526, Anm. 2, und 492, Zus. 6.
Zweiter Theil aus 533 und 494, Zus. 3.

Anmerkung. Archimedes, der größte Geometer des Alterthums, entdeckte diesen Satz und legte so großen Werth auf diese Entdeckung, daß er wünschte, daß man nach seinem Tode einen Cylinder mit einer in denselben beschriebenen Kugel auf sein Grab setzen möchte.

Zus. Aus diesem unserm Satze ersieht man auch, in welchem Sinne manche Schriftsteller sagen, der Inhalt einer Kugel sei gleich dem Producte aus einem ihrer Normalkreise und $\frac{2}{3}$ ihres Durchmessers.

L. G. VIII, 15.

536. Lehrsatz. Wenn die Grundflächen eines Kegels und Cylinders dem Normalkreise einer Kugel gleich sind, ihre Höhen aber von gleicher Länge mit dem Durchmesser der letztern, so verhalten sich die cubischen Inhalte von Kegel, Kugel und Cylinder zu einander, wie die Zahlen 1, 2, 3.

Tacquet l. c. pr. 32, Cor. 1.

Bew. Aus 492, Zus. 6, 504, und 529, Zus. 2.

537. Lehrsatz. Die Oberfläche einer Kugel verhält sich zur gesammten Oberfläche des in sie beschriebenen gleichseitigen (wo jede Kegelseite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist) Kegels wie 16 zu 9.

Tacquet Selecta etc. pr. 39.

Bew. Die Oberfläche der Kugel ist das Vierfache eines Normalkreises, die des Kegels das Dreifache seiner Grundfläche (506, Zus. 4). Nun verhält sich aber jener Normalkreis zu dieser Grundfläche (Fig. 236) wie $\overline{ON}^2 : \overline{GF}^2 = \overline{GO}^2 : \overline{OJ}^2$ (209, Zus. 2) $= \overline{OG}^2 : \frac{3}{4}\,\overline{OG}^2 = 4 : 3$, also Kugelfläche : Kegelfläche $= 16 : 9$.

538. **Lehrsatz.** Die Oberfläche einer Kugel verhält sich zur Gesammtoberfläche des um sie beschriebenen gleichseitigen Kegels wie 4 zu 9.

Tacquet l. c. pr. 40.

Bew. Aus 537 und 528 in Verbindung damit, daß $KJ = \frac{1}{2} ON$ (Fig. 236).

Zus. Die Gesammtoberfläche des umschriebenen Kegels ist daher das Vierfache der Gesammtoberfläche des eingeschriebenen.

Tacquet l. c. pr. 41.

539. **Lehrsatz.** Die Kugel verhält sich zu dem in sie beschriebenen gleichseitigen Kegel wie 32 zu 9.

Tacquet l. c. pr. 42.

Bew. Kugel KMDBP : Kegel BDK $= \frac{4}{3}\,\overline{CJ}^3 . \pi : \overline{LD}^2 . \pi . \frac{KL}{3}$

$$= 4\,\overline{CJ}^3 : \overline{LD}^2 . KL$$
$$= 16\,\overline{CJ}^3 : \overline{BD}^2 . KL$$
$$= 16\,\overline{CJ}^3 : 3 . \overline{CJ}^2 . KL \quad (287)$$
$$= 16\,\overline{CJ}^3 : 3\,\overline{CJ}^2 . \tfrac{3}{2}\,CJ \quad (286)$$
$$= 32 : 9$$

540. **Lehrsatz.** Jede Kugel verhält sich zu dem um sie beschriebenen gleichseitigen Kegel wie 4 zu 9.

Tacpuet l. c. pr. 44.

Bew. Kugel KMDJBP . Kegel GOF $= 4\,\overline{KJ}^2 . CJ : \overline{GF}^2 . OJ$

(529, Anm. 2 und 504, Zus. 2) $= 16\,\overline{CJ}^3 : \overline{GF}^2 . OJ$

$$= 16\,\overline{CJ}^3 : 3\,\overline{CN}^2 . \tfrac{3}{2}\,CN$$
$$= 32\,\overline{CJ}^3 : 9\,\overline{CN}^3$$
$$= 32\,\overline{CJ}^3 : 9 . 8\,\overline{CJ}^3$$
$$= 4 : 9$$

Anmerkung. Dasselbe Verhältniß findet auch für die Oberflächen unserer beiden Körper Statt, wie man aus 538 ersieht.

Zus. Der um eine Kugel beschriebene gleichseitige Kegel ist also das Achtfache von dem in die Kugel beschriebenen.

Tacquet l. c. pr. 45.

541. **Lehrsatz.** Ein gleichseitiger Kegel und ein gerader Cylinder, die beide um dieselbe Kugel beschrieben sind, verhalten sich sowohl in Absicht auf ihre cubischen Inhalte als ihre Gesammtoberflächen zu einander wie der Cylinder zur Kugel oder wie 3 : 2.

Tacquet l. c. pr. 45.

Bew. Aus 540, und 535.

542. **Lehrsatz.** Wenn ein gleichseitiger Kegel und ein gerader Cylinder beide um dieselbe Kugel beschrieben sind, so verhalten sich sowohl ihre krummen Oberflächen, als ihre Grundflächen, als auch ihre Höhen zu einander wie 3 : 2.

Tacquet l. c. pr. 46.

Bew. Bezeichnet man die krummen Oberflächen von Kegel und Cylinder respective mit O und O′, ihre Höhen mit H und H′, ihre Grundflächen mit K und K′, so ist: (Fig. 236)

$$O : O' = \tfrac{1}{2}\,\overline{GF}^2 : \overline{KJ}^2 \; (494,\ 506,\ 320 \text{ und } 322)$$
$$= \tfrac{3}{2}\,\overline{CN}^2 : \overline{CN}^2$$
$$= 3 : 2$$

Ferner:

$$H : H' = OJ : KJ = 3 : 2$$

Endlich:

$$K : 2\,K' = \overline{GF}^2 : 2\,\overline{FS}^2 = 3\,\overline{CN}^2 : 2\,\overline{CN}^2 = 3 : 2$$

543. Lehrsatz. Ein Kugelsector ist inhaltsgleich einem Kegel, dessen Höhe gleich dem Kugelhalbmesser und dessen Grundfläche gleich der sphärischen Oberfläche des Ausschnitts ist.

Tacquet l. c. pr. 29. — L. G. VIII, 15.

Zus. Bezeichnet daher R den Radius der Kugel und H die Höhe des zu dem in Rede stehenden Sector gehörigen Abschnitts, so kann der Inhalt des Sectors ausgedrückt werden durch:

$$2\,R\,.\,H\,.\,\pi\,.\,\frac{R}{3} = \frac{2\,R^2\,\pi\,.\,H}{3} \;(527)$$

544. Lehrsatz. Der Inhalt eines Kugelabschnitts ist so groß als die Hälfte eines Cylinders und eine Kugel zusammen, von denen der erstere gleiche Grundfläche und Höhe mit dem Abschnitte und die letztere einen dieser Höhe gleichen Durchmesser hat. Fig. 241.

L. G. VIII, 18.

Bew. Bezeichnet R den Kugelhalbmesser und H die Höhe PS, so ist: Sector CBRDC = Segm. BPD + Kegel BDC

$$= \text{Segm. BPD} + \text{Kreis BRDO}\,.\,\frac{CS}{3}$$
$$= \text{Segm. BPD} + \text{Kreis BRDO}\,.\,\frac{R-H}{3},$$

also:

$$\text{Segm. BPD} = \text{Sector CBRDC} - \text{Kreis BRDO}\,.\,\frac{R-H}{3} \;(1)$$

Nun ist: Kreis BRDO : Kreis ATaNM $= \overline{BS}^2 : \overline{AC}^2$ (2)

und $\overline{BS}^2 = PS\,.\,ps = H\,(2\,R - H)$, also:

Kreis BRDO : $\pi\,R^2 = (2\,R - H)\,H : R^2$ (3)

und darum: Kreis BRDO $= (2R - H)\,H\pi = 2RH\pi - H^2\pi$ (4)

Daher auch: $RH\pi = \tfrac{1}{2}$ Kreis BRDO $+ H^2\,.\,\frac{\pi}{2}$ (5)

Aus (1) und (4) erhält man:

$$\text{Segm. BPD} = \frac{2\,R^2H\pi}{3} - \frac{(2\,R - H)\,H\pi\,.\,(R - H)}{3}$$
$$= \frac{2\,R^2H\pi}{3} - \frac{2\,R^2H\pi}{3} + RH^2\pi - \frac{H^3\pi}{3}$$
$$= \left(RH\pi - \frac{H^2\pi}{3}\right)H \;(6)$$

Also, wenn man den Werth für $RH\pi$ aus (5) in (6) substituirt:

$$\text{Segm. BPD} = \left[\tfrac{1}{2}\text{ Kreis BRDO} + H^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{H^2\pi}{3}\right] \cdot H$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}\text{ Kreis BRDO} + \frac{H^2\pi}{6}\right] \cdot H$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{ Kreis BRDO} \cdot H + \frac{H^3\pi}{6}$$

womit die Richtigkeit unseres Satzes dargethan ist.

Anmerkung 1. Unser so eben gefundener Ausdruck macht die Größe des Kugelsegments vom Kreise BRDO, also von dessen Radius und von H abhängig. Man kann denselben leicht so umformen, daß diese Größe nur von jenem Halbmesser — er heiße r — oder von der Höhe H abhängig ist. Denn es ist $\overline{BS}^2 = PS \cdot pS$ d. i. nach unserer Bezeichnung $r^2 = H\ (2\ R - H) = 2\ RH - H^2$; setzt man in dem obigen Ausdruck für Kreis BRDO, seinen Werth $r^2\pi$, und substituirt an die Stelle von r^2 den ihm gleichen Ausdruck $2\ RH - H^2$, so verwandelt sich jener in:

$$RH^2\pi - \tfrac{1}{2} H^3\pi + \tfrac{1}{6} H^3\pi = RH^2\pi - \frac{2\ H^3\pi}{6} \text{ d. h.}$$

Zus. 1. Jedes Kugelsegment ist gleich dem Unterschied zwischen dem Cylinder, dessen Höhe gleich dem Kugelhalbmesser, und der Radius der Grundfläche gleich der Höhe des Abschnitts ist, und zwischen dem doppelten Inhalt der Kugel, die zu ihrem Durchmesser eben diese Höhe hat.

Anmerkung 2. Die andere Form unseres Ausdrucks, wo der Inhalt des Kugelsegments nächst dem Kugelhalbmesser bloß vom Radius der Grundfläche des Abschnitts abhängig erscheint, kann man auf folgende Weise erhalten:

Es ist, wie wir aus Anm. 1 wissen:

$$r^2 = 2\ RH - H^2, \text{ also auch}$$
$$H^2 - 2\ RH + R^2 = R^2 - r^2, \text{ mithin}$$
$$H - R = \pm \sqrt{R^2 - r^2}$$
$$\text{oder } H = R \pm \sqrt{R^2 - r^2}$$
$$\text{also } H^2 = (R \pm \sqrt{R^2 - r^2})^2$$
$$= 2\ R^2 - r^2 \pm 2\ R \sqrt{R^2 - r^2}$$

Substituirt man diese so eben gefundenen Werthe für H und H^2 in dem Ausdrucke des Kugelsegments, wie er sich in der vorigen Anm. findet, nämlich in:

$$RH^2\pi - \frac{2\ H^3\pi}{6} = H^2\pi\ (R - \frac{H}{3})$$

so erhält man:

$$\text{Kugelsegm. BPD} = (2\ R^2 - r^2 \pm 2\ R \sqrt{R^2 - r^2})\pi \cdot \left[R - \frac{R}{3} \mp \frac{1}{3}\sqrt{R^2 - r^2}\right]$$
$$= \frac{\pi}{3}\left[2\ R^3 \pm (2\ R^2 + r^2)\sqrt{R^2 - r^2}\right]$$

d. h.

Zus. 2. Ein Kugelabschnitt ist, je nachdem er größer oder kleiner als die Halbkugel, gleich der Summe oder dem Unterschiede aus eben dieser Halbkugel und dem Kegel, dessen Höhe gleich der Entfernung der Grundfläche des Segments vom Mittelpuncte der Kugel, und dessen Grundfläche so groß als zwei Normalkreise und die Grundfläche des Abschnitts zusammengenommen.

545. Lehrsatz. Der Inhalt eines Kugelstreifens d. h. eines zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen Kugelstücks BDFE Fig. 241 ist

so groß als ein Cylinder, der gleiche Höhe mit dem Streifen hat und dessen Grundfläche das arithmetische Mittel zwischen den beiden parallelen Endflächen des Streifens, zusammengenommen mit einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Höhe des Streifens.

L. G. VIII, 18.

Bew. Der Kugelstreifen BDFE ist gleich dem Unterschiede der beiden Kugelsegmente EBPDF und BPD; bezeichnen wir ihre Höhen respective mit H und H′, die Radien ihrer Grundflächen mit r und r′, so ist nach 544, Anm. 1, Kugelstreifen BDFE

$$= RH^2\pi - \frac{H^3\pi}{3} - (RH'^2\pi - \frac{H'^3\pi}{3})$$

$$= R\pi (H^2 - H'^2) - \frac{\pi}{3}(H^3 - H'^3)$$

$$= R\pi (H^2 - H'^2) - \frac{\pi}{2}(H^3 - H'^3) + \frac{\pi}{6}(H^3 - H'^3)$$

$$= \frac{\pi}{2}(H - H')[2R(H + H') - H^2 - HH' - H'^2] + \frac{\pi}{6}(H^3 - H'^3)$$

$$= \frac{\pi}{2}(H-H')[(2R-H)H + (2R-H')H'] + \frac{\pi}{6}[H^3-H'^3-3HH'(H-H')]$$

$$= \pi (H - H') \frac{r^2 + r'^2}{2} + \frac{\pi}{6}(H - H')^3$$

womit die Richtigkeit unseres Satzes dargethan ist.

Anmerkung. Legendre und nach ihm einige andere leiten aus diesem unserem Satz als Hauptsatz unsern vorhergehenden, den Inhalt der Kugelsegmente betreffend, als Zusatz her, indem sie sowohl r′ als H′ gleich Null setzen. Denn offenbar geht ein Kugelstreifen in ein Kugelsegment über, wenn der Halbmesser einer seiner parallelen Endflächen und somit auch die Höhe des zu ihr als Grundfläche gehörigen Kugelabschnitts bis auf Null abnimmt. Der Beweis für den Hauptsatz muß natürlich dann ganz verschieden von dem unsrigen geführt werden.

Vierter Abschnitt.

Die regelmäßigen Polyeder, in die Kugel beschrieben.

---

546. Um jedes regelmäßige Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben.

Anmerkung 1. In den drei letzten Büchern des Euclides finden sich viele dieses Ein- und Umbeschreiben betreffende Sätze. Alle stimmen darin überein, daß die Axe des in die Kugel beschriebenen Körpers stets auch die Axe der Kugel d. h. einer ihrer Durchmesser ist, und daß durch die Größe dieser Axe auch die Länge der Kanten des Körpers bestimmt ist. Soll daher in eine Kugel von bestimmter gegebener Größe ein regelmäßiger Körper beschrieben werden, so muß man aus der bekannten Axenlänge der Kugel die Kantenlänge des einzubeschreibenden Polyeders und dann die Puncte bestimmen, in denen die Ecken des Polyeders der Kugeloberfläche begegnen. Die beiden folgenden Lehrsätze enthalten das Nähere hierüber.

Anmerkung 2. Zur Bestimmung der Kantenlänge aus der Länge der Axe kann mit Nutzen das angewandt werden, was früher in 478 über die regelmäßigen Polyeder beigebracht worden ist. Der Kürze halber soll künftig die Axe der Kugel und mithin

auch die des ihr eingeschriebenen Körpers durch A, die Kante des letztern durch a bezeichnet werden. Ist die Axe der Kugel als Linie (nicht durch eine als Maaß für sie geltende Zahl) gegeben, so lassen sich auch die Kanten aller ihr eingeschriebenen regelmäßigen Polyeder gleichfalls als Linien finden.

547. **Die Größe der Kanten für die fünf regulären Polyeder zu finden, wenn die Axe der Kugel gegeben ist, in die sie beschrieben werden sollen, und zwar diese Größe durch Linien ausgedrückt zu erhalten.**

Auflösung. Es sei (Fig. 242) AB die Axe der Kugel, AEB ein halber Normalkreis, also die Hälfte des Durchschnitts der Kugel längs der Axe.

I. Für das Tetraeder.

$$A = a\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad (478,\ I)$$
$$a = A \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} = A \cdot 0{,}8165$$
$$a^2 = \tfrac{2}{3} \cdot A^2, \text{ oder } a^2 : A^2 = 2 : 3$$

Dieser Satz findet sich bei Euclides XIII, 13.

Nimmt man nun AD so, daß: AD : DB : AB = 2 : 1 : 3, errichtet die Senkrechte DZ, und zieht AZ, so ist diese Gerade von gleicher Länge mit der gesuchten Kante des Tetraeders; denn:

$$\overline{ZD}^2 = AD \cdot DB = \tfrac{2}{3} \cdot AB \cdot \frac{AB}{3}$$
$$= \frac{2\,\overline{AB}^2}{9}$$

also $\overline{AZ}^2 = \left(\frac{2\,AB}{3}\right)^2 + \frac{2\,\overline{AB}^2}{9}$

$$= \frac{2\,\overline{AB}^2}{3}$$
$$AZ = AB\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

Eucl. XIII, 13 und 18.

II. Für das Octaeder

ist $A = a\sqrt{2}$ (478, II)

also $A^2 = 2\,a^2$,

und $a = \frac{A}{\sqrt{2}}$, oder $a : A = 1 : \sqrt{2}$

also $a = A \cdot 0{,}7071$

Eucl. XIII, 14.

Errichtet man auf AB im Mittelpuncte C die Senkrechte CE und zieht AE, so ist letztere von gleicher Länge mit der gesuchten Octaederkante; da $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{2\,\overline{AB}^2}{4} = \frac{\overline{AB}^2}{2}$, also

$$AE = AB\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Eucl. XIII, 14 und 18.

III. Für den Würfel

ist: $A = a \sqrt{3}$ (478, IV), also

$$a = \frac{A}{\sqrt{3}} = A \,.\, 0{,}5774$$

und $A^2 = 3\,a^2$, oder $a^2 : A^2 = 1 : 3$ (Eucl. XIII, 15)
Zieht man in unserer 242ten Figur ZB, so ist diese von gleicher Länge mit der gesuchten Kante des Würfels; denn

$$\overline{BZ}^2 = BD \,.\, AB = \frac{AB}{3} \,.\, AB$$
$$= \frac{\overline{AB}^2}{3},$$

also $BZ = AB \sqrt{\tfrac{1}{3}}$
Eucl. XIII, 18.

IV. Für das Ikosaeder

ist $A = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$ (478, III),

also $a = A \,.\, \sqrt{\frac{2}{5 + \sqrt{5}}} = A \,.\, 0{,}5255$

und $a^2 = \frac{2\,A^2}{5 + \sqrt{5}}$

Nimmt man in unserer 242ten Figur AH, welche senkrecht auf der Axe AB, gleich dieser Axe, zieht CTH, und dann AT, so ist diese die Kante des Ikosaeders für die zugehörige Axe AB.

Denn $CK = \tfrac{1}{2}$ KT, da $CA = \tfrac{1}{2}$ AH, also $\overline{AB}^2 = 4\,\overline{CT}^2 = 4\,(\overline{CK}^2 + \overline{KT}^2) = 20\,\overline{CK}^2$ mithin $CK = \tfrac{1}{2}\,AB \sqrt{\tfrac{1}{5}}$. Es ist ferner: $\overline{AT}^2 = AK \,.\, AB = (AC - CK)\,AB = \left(\frac{AB}{2} - \frac{AB}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}}\right) AB = \frac{\overline{AB}^2}{2}\left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{5}}\right) = A^2 \,.\, \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} = \frac{A^2 \,.\, (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2\,(\sqrt{5} + 1)\sqrt{5}}$

$$= \frac{2\,A^2}{5 + \sqrt{5}}$$

Eucl. XIII, 16 und 18.

V. Für das Dodekaeder

ist $A = a \,.\, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$ (478, V, 1.),

also $a = A \,.\, \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}} = A \,.\, \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} = A \,.\, 0{,}3563,$

und $a^2 = A^2 \,.\, \frac{3 - \sqrt{5}}{6}$

Nimmt man daher (Fig. 242) $BD = \frac{AB}{2}$, errichtet die Senkrechte DZ, verbindet B mit Z und theilt die Gerade BZ nach dem äußern und mittlern Verhältnisse z. B. in N, so ist das größere NZ der beiden so erhaltenen Stücke die gesuchte Länge der Kante. Denn es ist:

$$NZ = \frac{ZB}{2} (\sqrt{5} - 1) \text{ (213, Anm. 2)},$$

aber $BZ = AB \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, also

$$NZ = AB \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}} = AB \cdot \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} = a$$

Eucl. XII, 17 und 18.

Anmerkung 1. So sind also durch Construction die Kanten der fünf regelmäßigen, in dieselbe Kugel beschriebenen Polyeder bestimmt.

Anmerkung 2. Es bleibt nun noch übrig, die Constructionen der regelmäßigen Polyeder in die Kugel selbst nachzuweisen.

548. Die fünf regelmäßigen Polyeder in eine Kugel zu beschreiben.

I. Auflösung für das Tetraeder.

Da AZ (Fig. 242), wie wir gesehen haben, die Tetraederkante ist, so wird eine seiner Gränzflächen dasjenige gleichseitige Dreieck sein, welches dem Kreise einbeschrieben ist, dessen Radius ZD; nun ist aber:

$$\overline{ZD}^2 : \overline{AB}^2 = \frac{2\,\overline{AB}^2}{9} : \overline{AB}^2 = 2 : 9,$$

also $ZD : AB = \sqrt{2} : 3$

oder $ZD : \frac{AB}{2} = \sqrt{2} : \frac{3}{2} = 2\sqrt{2} : 3$

Man kennt also den Halbmesser des Kreises, in welchen man ein gleichseitiges Dreieck beschreibt und dessen Ecken mit A verbindet, um das verlangte regelmäßige Tetraeder zu haben.

Eucl. XIII, 13.

II. Auflösung für das Octaeder.

Für das Octaeder ist AE, wie wir oben gesehen haben, die Kante; also EC der Radius des Kreises, in welchen das Quadrat sich beschreiben läßt, das die gemeinschaftliche Grundfläche der beiden vierseitigen Pyramiden bildet, aus denen man das Octaeder zusammengesetzt denken kann. Man beschreibe also einen Normalkreis, der senkrecht auf der Axe steht, in denselben ein Quadrat und verbinde dessen Ecken mit den beiden Endpuncten der Axe, so hat man das verlangte Octaeder.

Eucl. XIII, 14.

III. Auflösung für das Ikosaeder.

AT ist, wie wir wissen, die Kante des Ikosaeders; man beschreibe zunächst einen Nichtnormalkreis auf der Kugel, der senkrecht auf der

Axe und dessen Radius $= KT = 2 KC = 2 AB \sqrt{\frac{1}{20}} = AB . \sqrt{\frac{1}{5}}$ (was ganz auf dasselbe mit der Construction von Euclides hinauskömmt, welcher verlangt, man solle die Axe der Kugel AD (Fig. 124) in F so theilen, daß $AF : FD = 1 : 4$, und BA ziehen; diese letztere sei der Halbmesser des gesuchten Kreises, weil

$$\overline{AB}^2 = AF . AD = \frac{AD}{5} . AD, \text{ also } AB = AD \sqrt{\tfrac{1}{5}})$$

In diesen Kreis beschreibe man ein regelmäßiges Fünfeck BHGDZ (Fig. 228), und verbinde dessen Ecken mit dem nähern Pol der Axe (hier J); man erhält dadurch fünf gleichseitige Dreiecke BJH, HJG ꝛc.

Von dem andern Pole aus beschreibe man einen zweiten Kreis von derselben Größe, lege durch die beiden Pole und die Ecken des Fünfecks BHGDZ fünf Normalkreise; diese werden die Peripherie des zweiten Nichtnormalkreises in fünf gleiche Theile theilen; jeden dieser Bogen halbire man, und verbinde diese Halbirungspuncte unter einander zu einem zweiten regelmäßigen Fünfeck, und jede seiner Ecken sowohl mit dem zweiten Pol als mit den beiden ihr zunächstliegenden Ecken des erstern Fünfecks, und man erhält das verlangte Ikosaeder.
Eucl. XIII, 16.

IV. Auflösung für den Würfel.

Da BZ die Kantenlänge des Würfels, so beschreibe man mit DZ als Radius einen Kreis, der senkrecht auf der Axe BA; in denselben ein gleichseitiges Dreieck, und verbinde dessen Ecken mit dem Pole B, so bilden diese drei von derselben Ecke auslaufende Kanten des Würfels; diese Construction wiederhole man für den zweiten Pol A, d. h. in einer Entfernung von ihm gleich BD beschreibe man einen zweiten auf der Axe senkrechten Kreis, in ihn ein gleichseitiges Dreieck, und zwar so, daß jede seiner Ecken in einerlei Ebene mit einer Ecke des entsprechenden Dreiecks und mit den beiden Polen liegt; verbindet man auch diese Ecken mit dem zugehörigen Pole A, so hat man abermals drei Kanten des Würfels, und kann nun leicht die noch fehlenden ziehen.
Eucl. XII, 15.

V. Auflösung für das Dodekaeder.

Die Construction des Dodekaeders kann von der des Würfels abhängig gemacht werden, indem in jede Kugel beide regelmäßige Körper sich so beschreiben lassen, daß acht von den Ecken des Dodekaeders mit den acht Ecken des Würfels zusammenfallen. Ist nun in eine gegebene Kugel der Würfel auf die vorher angegebene Weise beschrieben, so kann man das Dodekaeder auf folgende Weise erhalten: Man theile die Hälfte der Würfelkante nach dem äußern und mittlern Verhältnisse; und trage das größere der so erhaltenen Stücke vom Mittelpuncte einer der Seitenflächen des Würfels aus nach beiden Seiten hin auf der geraden Linie auf, welche die Halbirungspuncte zweier Gegenseiten verbindet; in diesen Durchschnittspuncten errichte man auf eben dieser Seitenfläche zwei Perpendikel und verlängere sie bis zum Durchschnitt

mit der Kugeloberfläche; die diese beiden Durchschnittspuncte Verbindende ist eine Kante des Dodekaeders; man erhält zugleich noch vier andere, wenn man jeden ihrer Endpuncte mit den beiden ihr zunächst liegenden Ecken des Würfels verbindet. Verfährt man mit den übrigen Seitenflächen des Würfels auf gleiche Weise, so erhält man die sämmtlichen Kanten des Dodekaeders.

Eucl. XIII, 17.

Anmerkung. Will man also die fünf regelmäßigen Polyeder in dieselbe Kugel beschreiben, so müssen alle den Kugeldurchmesser zur Axe haben; es ist dann nur nöthig, die Kanten zu finden. Durch Hülfe dessen, was in dem Vorhergehenden erörtert worden ist, wird man in den Stand gesetzt, folgende Aufgabe zu lösen.

549. Die Oberfläche und den cubischen Inhalt der fünf regelmäßigen in dieselbe Kugel beschriebenen Polyeder zu bestimmen. Der Kugeldurchmesser sei, wie in dem Vorigen, $= A$, die jedesmalige Kantenlänge $= a$; die Oberfläche bezeichnen wir mit O; den Inhalt mit J.

I. Für das Tetraeder.

$$a = A \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} \text{ (547, I)}$$

$$O = a^2 \sqrt{3} = \frac{2\,A^2}{\sqrt{3}} \text{ (480, Zus. 2)}$$

$$J = \frac{a^3}{6\sqrt{2}} = \frac{A^3}{9\sqrt{3}} \text{ (480, Zus. 2)}$$

II. Für das Octaeder.

$$a = \frac{A}{\sqrt{2}} \text{ (547, II)}$$

$$O = 2\,a^2 \sqrt{3} \text{ (480, Zus. 3)} = A^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$J = \frac{A^3}{6}$$

III. Für das Ikosaeder.

$$a = A \cdot \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)} = A \sqrt{\left(\frac{2}{5+\sqrt{5}}\right)} \text{ (547, IV)}$$

$$O = 5\,a^2 \sqrt{3} \text{ (480, Zus. 4)}$$

$$= 5\,A^2 \cdot \frac{(3-\sqrt{5})\sqrt{3}}{5-\sqrt{5}} = A^2 \cdot \frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{3}}{2}$$

$$J = a^3 \cdot \frac{5\,(5+\sqrt{5})}{12} \text{ (480, Zus. 4)}$$

$$= A^3 \cdot \frac{10 \cdot (3-\sqrt{5})\sqrt{(6+2\sqrt{5})}}{12\sqrt{(5-\sqrt{5})} \cdot \sqrt{[2\,(5-\sqrt{5})]}}$$

$$= A^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{5\,(5-\sqrt{5})}\right)} = \frac{A^3}{6} \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

IV. Für den Würfel.

$$a = A \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$
$$O = 2\, A^2$$
$$J = \frac{A^3}{3\sqrt{3}}$$

V. Für das Dodekaeder.

$$a = A \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = A \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{6} \; (547,\ V)$$

$$O = 15\, a^2 \sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)} \; (480,\ \text{Zus. } 5) = 5\, A^2 \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)}$$
$$= 5\, A^2 \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$$

$$J = a^3 \cdot \sqrt{\left(\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\right)}$$
$$= A^3 \cdot \frac{5}{12} \cdot \sqrt{\left[\frac{2\,(3+\sqrt{5})}{15}\right]} = \frac{A^3}{12} \sqrt{\left(\frac{30+10\sqrt{5}}{3}\right)}$$

Zus. 1. Die Oberflächen des Dodekaeders und des Ikosaeders verhalten sich zu einander, wie die Kanten des Würfels und des Ikosaeders. Eucl. XIV, 4.

Bew. $O_{(d)} : O_{(i)} = 5\, A^2 \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)} : 5\, A^2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right) \sqrt{3}$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)}$$

Zus. 2. Die cubischen Inhalte des Dodekaeders und Ikosaeders verhalten sich zu einander, wie die Kanten des Würfels und des Ikosaeders.
Eucl. XIV, 5.

Bew. $J_{(d)} : J_{(i)} = A^3 \cdot \frac{5}{12} \sqrt{\left(\frac{2[3+\sqrt{5}]}{15}\right)} : A^3 \cdot \frac{10}{12} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{5(5-\sqrt{5})}\right)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}\right)} : 2\sqrt{\left(\frac{1}{5-\sqrt{5}}\right)}$$
$$= 1 : 2\sqrt{\left[\frac{3}{(3+\sqrt{5})\,(5-\sqrt{5})}\right]}$$
$$= 1 : 2\sqrt{\left[\frac{3\,.\,(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})\,(3-\sqrt{5})\,(5-\sqrt{5})}\right]}$$
$$= 1 : \sqrt{\left[\frac{3\,(3-\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}\right]}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)}$$

Zus. 3. Bei dem Dodekaeder und Ikosaeder, welche in dieselbe Kugel beschrieben sind, verhalten sich daher die Oberflächen eben so zu einander, wie die cubischen Inhalte.

Zus. 4. Die Kanten des Würfels und Ikosaeders verhalten sich zu einander wie die zwei Geraden, von denen das Quadrat der einen so groß ist als das Quadrat einer beliebigen Geraden und das Quadrat des größern Stücks von ihr zusammen, welches man erhält, wenn man sie nach dem äußern und mittlern Verhältniß schneidet, das Quadrat der andern aber so groß als das Quadrat der genannten Geraden und das Quadrat des kleinern bei der genannten Theilung erhaltenen Stücks zusammen.

Bew. Ist l eine beliebige Gerade, g und k das größere und kleinere Stück, die man bei der Theilung nach dem äußern und mittlern Verhältnisse erhält, so ist (213, Anm. 1 und 2)

$$g = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$k = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$

also

$$\sqrt{(l^2 + g^2)} : \sqrt{(l^2 + k^2)} = \sqrt{\left[l^2 + \frac{l^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2\right]} : \sqrt{\left[l^2 + \frac{l^2}{4}(3 - \sqrt{5})^2\right]}$$

$$= \sqrt{[10 - 2\sqrt{5}]} : \sqrt{[18 - 6\sqrt{5}]}$$

$$= 1 : \sqrt{\left[\frac{3(3 - \sqrt{5})}{5 - \sqrt{5}}\right]}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right)}$$

Zus. 5. Beschreibt man in dieselbe Kugel ein Ikosaeder und ein Dodekaeder, und einen Kreis um ein Dreieck des erstern so wie um ein Fünfeck des letztern, so sind diese beiden Kreise gleich.
Eucl. XIV, 2.

Bew. Der Halbmesser R, des um ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite a, beschriebenen Kreises ist $= a\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; gehört nun dieses gleichseitige Dreieck einem Ikosaeder an, für welches der Durchmesser der umschriebenen Kugel A ist, so ist, wie wir oben sahen:

$$a = A \cdot \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right)}, \text{ also}$$

$$R = A \cdot \sqrt{\left[\frac{3 - \sqrt{5}}{3(5 - \sqrt{5})}\right]}$$

Ist dagegen a' die Seite eines regelmäßigen Fünfecks, und R' der Halbmesser des ihm umschriebenen Kreises, so ist:

$$R' = a' \sqrt{\left(\frac{2}{5 - \sqrt{5}}\right)} \text{ (291, Zus. 2)},$$

also, weil

$$a' = A \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$$

$$R' = A \cdot \sqrt{\left[\frac{2(\sqrt{5}-1)^2}{4 \cdot 3(5-\sqrt{5})}\right]} = \sqrt{\left[\frac{3-\sqrt{5}}{3(5-\sqrt{5})}\right]}$$

also $R = R'$.

Anmerkung. Auf manchen Proportionalzirkeln befindet sich eine Linie mit der Aufschrift: „corporum regularium inscriptio," auf welcher die fünf regelmäßigen Polyeder und die Kugel abgebildet sind. Die Entfernung vom Mittelpuncte des Zirkels bis zum Zeichen der Kugel, ist der Kugeldurchmesser, und die Abstände von eben jenem Mittelpuncte bis zu den Zeichen des Tetraeders, Octaeders, Würfels, Ikosaeders und Dodekaeders bezeichnen die respectiven Längen der Kanten dieser Körper, wenn sie jener Kugel eingeschrieben werden. Diese Abstände müssen demnach in demselben gegenseitigen Verhältnisse stehen wie die Linien AZ, AE, ZB, AT, NZ in Fig. 242.

Fünfter Abschnitt.

Von den Normal- oder Haupt-Kreisen, die sich auf der Oberfläche einer Kugel ziehen lassen, und von der Bestimmung des Inhaltes der durch sie gebildeten sphärischen Dreiecke und Vielecke.

---

550. Lehrsatz. Wenn man im Mittelpuncte C (Fig. 241) einer Kugel in den Ebenen PApP und PMpP zweier sich schneidender Normal- oder Hauptkreise auf ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie oder Axe Pp die beiden Senkrechten CA, CM errichtet, so ist der von denselben gebildete Winkel ACM der Neigungswinkel der beiden Kreisebenen und sein Maaß der Bogen AM des durch die Endpuncte der beiden senkrechten Radien gelegten Hauptkreises.

Bew. Aus 418.

Zus. Errichtet man in einem vom Mittelpuncte verschiedenen Puncte K die Senkrechten KE, KJ und legt durch die Puncte E, J einen Kreis EJF, welcher dem Hauptkreis AMa parallel ist, so kann auch der Winkel EKJ als der Neigungswinkel unserer beiden Kreisebenen und Bogen EJ als dessen Maaß betrachtet werden. Als dieser Neigungswinkel kann endlich auch der Winkel ZPY betrachtet werden, welcher von den beiden Tangenten gebildet wird, die man an die beiden Kreise in ihrem Durchschnittspuncte P zieht.

551. Erklärung. Sphärischer Winkel heißt derjenige Winkel EPJ oder APM, welchen die Bogen zweier sich schneidender Hauptkreise mit einander bilden.

Zus. Ein sphärischer Winkel ist also nichts anders, als der Neigungswinkel der Ebenen der beiden Hauptkreise, zu denen die Schenkel des Winkels als Bogen gehören. Das Maaß für einen sphärischen Winkel bildet also einer der ebenen Winkel, welche im vorhergehenden Lehrsatz und seinem Zusatz angegeben sind.

L. G. VII, 8.

552. Lehrsatz. Ein Scheitel P oder p eines Kugeldurchmessers hat gleiche Entfernung von allen Puncten im Umfange desjenigen Hauptkreises, auf dessen Ebene der Durchmesser senkrecht steht; dasselbe gilt von allen solchen Nebenkreisen, welche mit dem genannten Hauptkreise parallel sind.

L. G. VII, 6.

Bew. Die Bogen PA, PM, PN ꝛc. sind alle als Quadranten gleich, und darum auch gleich die Bogen PE, PJ, PL ꝛc., da AE, MJ, NL ꝛc., als zwischen parallelen Kreisen enthalten, gleich sind.

553. Erklärung. Pol eines Kugelkreises heißt derjenige Punct der Kugeloberfläche, welcher von allen Puncten im Umfange dieses Kreises gleiche Entfernung hat.

L. G. VII, Erkl. 5.

Zus. 1. Jeder Kugelkreis hat zwei Pole; sie sind die beiden Scheitel des auf der Ebene dieses Kreises senkrechten Kugeldurchmessers, also um die Hälfte vom Umfange eines Hauptkreises von einander entfernt.

Zus. 2. Bei einem Hauptkreis steht jeder Pol von jedem Puncte im Umkreise 90° entfernt.

Zus. 3. Der Normalkreisbogen, welcher das Maaß für einen sphärischen Winkel bildet (550, Zus.) hat den Scheitel dieses Winkels zu einem seiner Pole.

554. Lehrsatz. Wenn die Ebenen zweier Hauptkreise PMp und AMa (Fig. 241) senkrecht auf einander stehen, so ist jeder der vier sphärischen Winkel, welche an jedem ihrer Durchschnittspuncte entstehen, gleich einem Rechten, und jeder Kreis geht durch die Pole des andern.

Zus. Stehen die Ebenen zweier Hauptkreise nicht senkrecht auf einander, so sind die vier an jedem ihrer Durchschnittspuncte gebildeten sphärischen Winkel schief; zwei dieser Winkel, welche die Lage von Scheitelwinkeln und gleiche Größe haben, sind spitz, die beiden andern, von denen in Absicht auf ihre gegenseitige Lage und Größe dasselbe gilt, sind stumpf; alle vier zusammen sind stets gleich vier Rechten.

Anmerkung. In diesen Eigenschaften stimmen also sphärische Winkel mit ebenen völlig überein.

555. Lehrsatz. Der sphärische Winkel EPL (Fig. 244), den zwei von einem Puncte P der Kugeloberfläche auslaufende Normalkreisbogen mit einander bilden, ist immer größer als der ebene Winkel EPL, welchen die jenen Kreisbogen zugehörigen Sehnen EP und LP an eben jenem Puncte bilden.

Vorber. zum Bew. Aus E fälle in der Ebene PaA auf die Axe Pp die Senkrechte ET, errichte in T auf Pp in der Ebene PLp die Senkrechte TU; und ziehe von ihrem Durchschnittspuncte mit der Sehne PL eine Gerade nach E.

Bew. Da PE $>$ ET, und PU $>$ TU, die beiden Dreiecke PEU und TEU aber eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, so folgt leicht aus 44, daß Winkel ETU $>$ Winkel EPU, also, weil ETU das Maaß des sphärischen Winkels EPL ist (551, Zus.), unser Satz erwiesen.

Anmerkung. Dieser Satz findet sich schon bei Stevin und zwar in dem Beweise für den 14ten Lehrs. im dritten Buche seiner Cosmographie.

556. Wenn zwei Hauptkreise auf der Sphäre sich schneiden, so
1) geschieht dieß immer in zwei Puncten, welche mit dem Mittelpuncte der Kugel in gerader Linie liegen, oder die Scheitel eines Kugeldurchmessers sind.
2) Beide Kreislinien halbiren sich gegenseitig.
3) Die Kugeloberfläche theilen sie in vier Stücke, von denen je zwei einander gegenüberliegende wie PApMP und pEPLp, so wie pMPEp und PApLP einander gleich sind.

Beweis. Aus der Natur der Kugel und des Hauptkreises.

557. Erklärung. Sphärisches Zweieck heißt jeder Theil der Kugeloberfläche, der, wie PApMP, oder PMpNP von zwei sich schneidenden Normalkreislinien begränzt wird. Die beiden Ecken oder Spitzen P, p bilden die beiden Scheitel des Durchmessers, welcher die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der beiden begränzenden Normalkreise ist.

L. G. VII, Erkl. 9.

Anmerkung. In den Fabriken, wo die künstlichen Erd- und Himmels-Globen verfertigt werden, führen solche Streifen, welche wir sphärische Zweiecke genannt haben, den Namen „Kugelschiffchen." Bekanntlich werden die Land- oder Stern-Charten, mit denen man die Globen überzieht, aus solchen Streifen oder Schiffchen zusammengesetzt, und letztere einzeln auf die Kugel aufgetragen.

558. Erklärung. Kugelsector heißt derjenige Theil einer Kugel, welcher von den Ebenen zweier sich schneidender Hauptkreise und dem durch diese letztere gebildeten sphärischen Zweieck begränzt wird.

L. G. VII, Erkl. 10.

559. Lehrsatz. Der Flächenraum eines sphärischen Zweiecks verhält sich zu der Oberfläche der ganzen Kugel, wie sich der sphärische Winkel an einer der Spitzen des Zweiecks verhält zu vier Rechten. Eben dieses Verhältniß hat auch jeder Kugelsector zum Inhalt der ganzen Kugel.

Bew. Wird auf ganz ähnliche Art bewiesen, wie die frühern Sätze 335 und 336.

Anmerkung 1. Bezeichnet man mit Z den Flächenraum eines sphärischen Zweiecks, mit B den Bogen, der das Maaß für den sphärischen Winkel ist, welcher das einzige bestimmende Stück eines solchen Zweiecks bildet, und die Kugeloberfläche mit S, so ist also, unserm Lehrsatze zufolge,

$$Z = \frac{B}{360^0} \cdot S$$

$$= \frac{4\ BR^2\pi}{360^0} \text{ (320, Zus. 1 und 526)}$$

$$= \frac{B \cdot R^2 \cdot \pi}{90^0}$$

und man erhält also, sobald der Bogen B bekannt ist, den Flächenraum des Zweiecks als bekannten und bestimmten Theil von der Oberfläche der zugehörigen Kugel. Wäre z. B. $B = 30^0$, so hätte man:

$$Z = \frac{30^0 \cdot R^2 \cdot \pi}{90^0} = \frac{R^2\pi}{3} = \frac{4 \cdot R^2 \cdot \pi}{12} = \frac{S}{12}$$

d. h. der Flächenraum desjenigen sphärischen Zweiecks, dessen bestimmender Winkel 30^0 ist, beträgt den zwölften Theil der gesammten Kugeloberfläche; also denselben Theil, welchen 30^0 von 360^0 ausmachen.

Delambre Abregé d'Astronomie Leçon IV, §. 74.

Anmerkung 2. Es ist auch:

$$Z = \frac{B \,.\, R^2 \,.\, \pi}{90^0} = \frac{B \,.\, R^2 \,.\, 3{,}14159265}{324000''} \text{ (325, Anm. 4)}$$

$$= B \,.\, R^2 \,.\, \sin 2'' \text{ (355, Zus. 2)}$$

560. **Erklärung.** **Sphärisches Dreieck** oder **Kugeldreieck** heißt jeder von drei Normalkreisbogen begränzte Theil der Kugeloberfläche. Die begränzenden Bogen heißen die Seiten des Dreiecks.

L. G. VII, 6.

Anmerkung. Auf ganz ähnliche Weise, wie die ebenen Dreiecke, theilt man die sphärischen in gleichseitige, gleichschenkelige, ungleichseitige.

Zus. 1. Die Seiten jedes sphärischen Dreiecks sind also Bogen **gleicher** Kreise.

Zus. 2. Jedes bestimmte gegebene Kugeldreieck gehört zu einer bestimmten Kugel, deren Halbmesser gegeben ist, und von deren Oberfläche das Dreieck einen Theil ausmacht.

Zus. 3. Welchen Theil von der Kugeloberfläche der Inhalt eines auf ihr befindlichen sphärischen Dreiecks ausmacht, hängt ab sowohl von der Länge der die Seiten des Dreiecks bildenden Normalkreisbogen als auch von der Größe der sphärischen von diesen Bogen gebildeten Winkel; so daß auf derselben Sphäre sich nicht zwei sphärische Dreiecke construiren lassen, welche sowohl in ihren Seiten als Winkeln, Stück für Stück übereinstimmten, und verschiedene Theile der Kugeloberfläche bildeten d. h. an Flächeninhalt verschieden wären.

561. **Erklärung.** **Dreiseitige Kugelpyramide** heißt derjenige Theil PELC einer Kugel, welcher von einem sphärischen Dreieck PEL als Grundfläche und den drei Ebenen PCE, ECL, PCL begränzt wird, welche einzelnen durch die Seiten des Dreiecks und den Mittelpunct der Kugel gelegt werden.

Anmerkung. Solche Kugelpyramiden unterscheiden sich also von den gewöhnlichen dreiseitigen Pyramiden, wie wir sie im eilften Buche betrachtet haben, nur dadurch, daß die Grundfläche nicht eben, sondern sphärisch ist, und einen Theil der Kugeloberfläche bildet, so wie die Pyramide selbst einen Theil der Kugel ausmacht.

Zus. Jeder der drei ebenen Winkel, welche die körperliche Ecke der Kugelpyramide bilden, deren Spitze mit dem Mittelpunct der Kugel zusammenfällt, hat zu seinem Maaß die Seite des sphärischen Dreiecks, welche die Ebene des Winkels auf der Sphäre begränzt.

562. **Lehrsatz.** Sind in einem Kugeldreieck die drei Seiten bestimmt, so ist dadurch auch die Größe jedes Winkels bestimmt; eben so kann, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bestimmte Größe haben, der dritten Seite nicht mehr eine beliebige Länge zuertheilt werden, sondern ihre Größe ist durch die gegebenen Stücke völlig bestimmt.

Bew. Fällt man (Fig. 243) aus L in der Ebene LCP auf CP die Senkrechte, errichtet in B auf CP in der Ebene PCE die Senkrechte PD und verbindet D mit L, so ist, weil Bogen PL und somit auch Winkel PCL gegeben, auch sowohl dessen Sinus LB, als Cosinus CB gegeben; in dem rechtwinkeligen Dreieck CBD sind also drei Stücke gegeben, der rechte Winkel CBD, der Winkel BCD, weil Bogen PE bekannt ist, und die Cathete CB; mithin sind auch alle übrigen Stücke

gegeben, also auch BD und CD; es sind also nun in dem Dreieck CDL zwei Seiten, CD, CL, und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben, also das ganze Dreieck vollkommen bestimmt, also auch DL gegeben; demnach sind alle Seiten des ebenen Dreiecks BDL gegeben, also auch seine Winkel, also auch DBL; also auch der sphärische Winkel EPL, für welchen DBL das Maaß ist. Dasselbe läßt sich für die beiden andern Winkel des sphärischen Dreiecks nachweisen. — Sind zwei Seiten PL, PE des sphärischen Dreiecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben, so sind in dem ebenen Dreieck DBL bestimmt LB, DB und W. DBL, also auch DL; mithin in dem Dreieck CLD alle Seiten, also auch die Winkel und auch Seite EL, welche das Maaß für einen derselben ist.

Zus. 1. Werden also auf derselben Sphäre zwei Dreiecke beschrieben, so daß die Seiten des einen einzeln den Seiten des andern gleich sind, so sind auch je zwei gleich gelegene Winkel gleich und beide Dreiecke stimmen in allen ihren Stücken vollkommen überein.

L. G. VII, 14.

Zus. 2. Dasselbe gilt von zwei Dreiecken, die auf derselben Sphäre so beschrieben werden, daß zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in ihnen einzeln gleich sind.

Zus. 3. Aus den beiden vorhergehenden Zusätzen läßt sich leicht folgern, daß, wenn man in einem gleichschenkeligen sphärischen Dreiecke die Spitze mit dem Halbirungspunct der Grundlinie durch einen Normalkreisbogen verbindet,

1) derselbe senkrecht auf der Grundlinie steht;
2) den Winkel an der Spitze halbirt;
3) die Winkel über der Grundlinie von gleicher Größe sind;
4) umgekehrt die Seiten gleich sein müssen, wenn ihre Gegenwinkel gleich sind.

L. G. VII, 15.

563. Lehrsatz. In jedem Kugeldreieck

1) sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte;
2) kann weder eine Seite noch ein Winkel $= 180^\circ$ sein;
3) sind alle drei Seiten zusammen kleiner als 360° oder der Umfang eines Normalkreises.

L. G. VII, 2 und 4.

Beweis. Erster Theil. Aus 561, Zus., und 430.

Zweiter Theil. Wäre einer der Winkel eines sphärischen Dreiecks 180°, so verwandelte sich dasselbe offenbar in ein Zweieck, hörte also auf ein Dreieck zu sein, eben so wäre es, wenn eine der Seiten $= 180^\circ$ wäre.

Dritter Theil. Weil (Fig. 244) $pE + pL > LE$, so ist $pE + pL + PE + PL > LE + PE + PL$, d. i. $360^\circ > LE + PE + PL$.

Anmerkung. Sphärische Dreiecke, in denen eine Seite größer als der halbe Normalumkreis, und der Gegenwinkel daher größer als zwei Rechte ist, lassen sich allerdings construiren, aber man kann die Betrachtung derselben, wenigstens dem Anfänger, ersparen, in so fern durch jedes Dreieck solcher Art zugleich ein anderes bestimmt wird, in welchem sowohl jede Seite als jeder Winkel kleiner als 180° ist, und welches das erstere zur halben Kugeloberfläche ergänzt. Die Untersuchung darf sich auf dieses Ergänzungs-

dreieck beschränken, indem man aus jeder Eigenschaft desselben leicht die entsprechende Eigenschaft des andern Dreiecks herleitet.
L. G. VII, 19, Anm.

564. Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck ist die größte Seite diejenige, welche den größten Gegenwinkel hat, und umgekehrt.

Bew. Es sei im Dreieck BAC (Fig. 245), Winkel BAC $>$ ABC; und mache W. BAL $=$ ABC; alsdann ist BL $=$ AL, also auch BL $+$ LC $=$ AL $+$ LC $>$ AC, oder BC $>$ AC; eben so zeigt man, daß BC $>$ AB.

Ist BC $>$ AB, so muß W. BAC $>$ W. ACB sein, weil das Gegentheil unmöglich ist; denn, wenn W. BAC $=$ W. ACB, so wäre BC $=$ BA, und wäre W. BAC $<$ W. ACB, so müßte BC $<$ BA sein, aber das eine so wie das andere widerstreitet der Voraussetzung. Aus eben dem Grunde ist auch BC $>$ AC.

565. Lehrsatz. Die Summe der drei Winkel eines Kugeldreiecks ist kleiner als sechs Rechte, aber größer als zwei Rechte.
L. G. VII, 19.

Bew. Erster Theil. Aus 563.

Zweiter Theil. Nach Lehrsatz 555 ist jeder Winkel eines sphärischen Dreiecks größer als der ebene Winkel, den die zu seinen Schenkeln zugehörigen Sehnen bilden; also ist auch die Summe aller drei sphärischen Winkel größer als die Summe der Winkel des Sehnendreiecks, also größer als 2 R.

Zus. 1. Den Winkel oder Bogen, um welchen die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks größer ist, als zwei Rechte, nennt man sphärischen Ueberschuß.

Zus. 2. Sphärische Dreiecke unterscheiden sich also wesentlich dadurch von ebenen, daß die Summe ihrer Winkel nicht eine constante und für alle dieselbe Größe ist, also auch nicht durch zwei Winkel der dritte bestimmt wird.

Zus. 3. In einem Kugeldreieck können zwei, ja alle drei Winkel sowohl rechte als stumpfe sein.

Zus. 4. Sind zwei Winkel eines Kugeldreiecks zusammen $< 90^\circ$, so ist der dritte ein stumpfer.

566. Erklärung. Ein sphärisches Dreieck heißt rechtwinkelig, stumpfwinkelig, oder spitzwinkelig, je nachdem wenigstens einer seiner Winkel ein Rechter, oder ein Stumpfer, oder alle drei Winkel spitze sind.

567. Lehrsatz. Verlängert man zwei Seiten (PA, PM Fig. 244) eines Kugeldreiecks (PAM) über die dritte Seite (AM) hinaus, so schneiden sich dieselben nicht eher wieder, als bis jede die Länge eines halben Normalumkreises erreicht hat, und zwar in einem Puncte (p), welcher mit dem andern Durchschnittspunct die Scheitel eines Kugeldurchmessers bildet. Diese so verlängerten Seiten bilden ein sphärisches Zweieck, welches durch AM in zwei Dreiecke getheilt wird, die eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, deren Spitzen mit dem Mittelpunct der Kugel in gerader Linie liegen, und wo die übrigen Seiten und Winkel so beschaffen sind, daß je zwei an einander angränzende sich zu 180° ergänzen.

Bew. Aus der Natur der Sache selbst und aus 554, Zus.

Anmerkung. Ist von den beiden verlängerten Seiten jede 90°, so werden die beiden entstandenen Dreiecke vollkommen mit einander übereinstimmen, die Winkel also, welche die gemeinschaftliche Grundlinie mit den andern Seiten bildet, alle vier Rechte sein; dieß giebt folgenden

Zusatz. Schneidet man auf zwei (nöthigenfalls verlängerten) Seiten eines sphärischen Dreiecks von ihrem gemeinschaftlichen Endpuncte aus Stücke ab, von denen jedes gleich dem vierten Theil eines Normalumkreises ist, und verbindet diese beiden Puncte, so bildet diese Verbindende mit den beiden Seiten rechte Winkel.

568. Lehrsatz. Verfährt man mit je zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks (ACB Fig. 246) so, wie in dem unmittelbar vorhergehenden Zusatz angegeben ist, und verlängert die drei so erhaltenen Normalkreisbogen bis zum gegenseitigen Durchschnitt, so entsteht ein zweites sphärisches Dreieck (OMN), welches zu dem ersten in solcher Beziehung steht, daß jede seiner Spitzen einen Pol für eine der Seiten des Urdreiecks bildet, und zu jeder seiner Seiten eine Ecke des Urdreiecks als Pol gehört.

Bew. Weil CJ = CH = 90°, so ist C Pol für den Kreis MJHN, und O von DABG, mithin auch CM = CN = 90°; aus gleichem Grunde ist: AF = AG = AO = AN = 90° und BD = BE = BM = BO = 90°; also weil AO = BO = 90°, so ist O der Pol von DABG, weil AN = CN = 90°, N der Pol von FCAJ, endlich, weil BM = CM = 90°, M der Pol von ECBH.

569. Erklärung. Das auf die im vorigen Satze angegebene Weise entstandene Dreieck MNO heißt in Beziehung auf das Urdreieck, dessen Polardreieck oder Supplementardreieck.

Anmerkung. Den Grund für die erste Benennung enthält der vorhergehende Lehrsatz, für die zweite der folgende.

570. Lehrsatz. Jede Seite eines Polardreiecks ergänzt einen der Winkel des Urdreiecks, und jeder Winkel des erstern eine Seite des letztern zu 180°.

Bew. Für den Winkel A ist Bogen FG das Maaß, also A + ON = FG + ON = OG + FN = 90° + 90° = 180° und eben so findet man für die übrigen Seiten des Polardreiecks B + MO = 180°, C + MN = 180°.

Für den Winkel M ist das Maaß der Bogen EH, also M + BC = EH + BC = EB + CH = 90° + 90° = 180° und auf gleiche Weise: N + AC = 180°, O + AB = 180°.

Anmerkung. Dreieck ABC kann also auch als das Polardreieck und Supplementardreieck vom Dreieck MON betrachtet werden.

Zus. 1. Ist in einem sphärischen Dreieck die Größe sowohl einer Seite AB als der beiden an ihr liegenden Winkel A und B bestimmt, so ist auch die Größe des dritten Winkels nicht mehr willkührlich, sondern völlig bestimmt.

Bew. In dem zu ABC gehörigen Supplementardreieck sind dann zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bestimmt, also auch die dritte Seite (562), mithin auch deren Supplement d. h. der dritte Winkel des Urdreiecks.

Zus. 2. Sind in zwei sphärischen Dreiecken eine Seite und die daran liegenden Winkel einzeln gleich, so sind auch je zwei der übrigen entsprechenden Stücke gleich und die Dreiecke stimmen in allen ihren Seiten und Winkeln mit einander überein.

571. Lehrsatz. Zieht man auf einer Sphäre drei Normalumkreise beliebig, jedoch so, daß jeder die beiden andern in zwei verschiedenen Puncten schneidet, so theilen sie die Kugeloberfläche in acht sphärische Dreiecke, von denen je zwei, welche einander gegenüberstehen (und darum auch Gegendreiecke genannt werden), vollkommen mit einander übereinstimmen.

Anmerkung 1. Man kann sich schon hinreichend von der Richtigkeit unseres Satzes bei einer in derselben Ebene verzeichneten Figur überzeugen; noch deutlicher fällt Alles in die Augen, wenn man auf einer wirklichen Kugel die Normalkreise construirt; aber auch ohne Figur, aus der Natur der Sache selbst läßt sich die Richtigkeit des Satzes darthun*).

Anmerkung 2. Je zwei solche von diesen acht Dreiecken, welche unmittelbar an einander gränzen, bilden zusammen ein sphärisches Zweieck; und sind daher die frühern hieher gehörigen Sätze auf sie anwendbar.

---

*) Allerdings läßt sich leicht darthun, daß zwei solche Gegendreiecke in allen ihren Seiten und Winkeln, Stück für Stück, übereinstimmen; gleichwohl ist die ohne weiteres daraus gezogene Folgerung, daß solche Dreiecke auch gleichflächig sein müssen, nicht gehörig begründet und darum unzulässig. Der Grund, warum so viele Schriftsteller über diesen Gegenstand, und unter ihnen selbst die besten, wie unser Verf., Legendre, Cagnoli u. a. diese Folgerung sich erlauben, liegt ohne Zweifel darin, daß man sagen kann: offenbar ist der Flächenraum eines sphärischen Dreiecks abhängig von seinen Seiten und Winkeln, und zwar für eine bestimmte Kugelfläche, ganz allein von diesen Seiten und Winkeln; es ist mithin auch nicht der mindeste Grund vorhanden, der uns berechtigen könnte, an eine Verschiedenheit des Flächenraums zu denken bei solchen sphärischen Dreiecken auf derselben Kugeloberfläche, in denen alle Seiten sowohl als alle Winkel einzeln gleich sind. Daß inzwischen dieser Schluß trotz aller anscheinenden Unfehlbarkeit dennoch möglicherweise ein Trugschluß sein könnte, geht aus Folgendem hervor: Eben so wie der Flächenraum ist auch die Gestalt eines sphärischen Dreiecks von seinen Seiten und Winkeln abhängig; ganz mit demselben Rechte also, mit welchem man aus der Uebereinstimmung zweier Dreiecke in ihren Seiten und Winkeln auf die Gleichheit ihres Flächenraumes schließt, dürfte man auch auf die Gleichheit ihrer Gestalt, und mithin auf ihre Congruenz schließen. Daß dieser letztere Schluß aber in vielen Fällen, und namentlich bei Gegendreiecken irrig sein würde, ist bekannt und außer Zweifel; es muß daher auf einem andern Wege besonders nachgewiesen werden, daß der erste Schluß nicht auch irrig ist.

Zu einem gegebenen sphärischen Dreieck ABC (Fig. 152 zum Anhang) erhält man das Gegendreieck DEF, wenn man die zu seinen Ecken gehörigen Kugelhalbmesser AK, BK, CK zieht, dieselben bis zum zweiten Durchschnitt mit der Sphäre in D, E, F verlängert, und je zwei dieser Durchschnittspuncte durch Normalkreisbogen verbindet.

Wegen der Congruenz der Dreiecke ABK, DEK, ferner ACK, DFK ist AB ⌗ DE, AC ⌗ DF, und, weil die Sehnendreiecke ABC und DEF congruiren, W. BAC = W. EDF, also die Ebenen dieser Sehnendreiecke parallel; also die auf die eine aus dem Mittelpuncte gefällte Senkrechte KL, schneidet verlängert auch die andere unter rechten Winkeln, daher, wenn man BL und EM zieht, $\triangle$ KLB $\cong$ KME, also KL = KM, d. h. die Ebenen dieser Sehnendreiecke oder die durch die Ecken der beiden sphärischen Gegendreiecke gelegten Ebenen haben gleiche Entfernungen vom Mittelpuncte der Kugel, mithin sind nicht nur die Kreise ANBOCP und DQERFS, welche die Durchschnitte dieser Ebenen mit der Kugel darstellen, sondern auch die zu diesen Kreisen als Grundflächen gehörigen Kugelmützen gleich. Aus dem Bisherigen ergiebt sich ferner, daß die Bogen BOC und ERF als zu gleichen Sehnen gleicher Kreise gehörig gleich sind; außerdem wissen wir schon, daß die Normalkreisbogen BUC und EVF gleich sind, darum müssen nun nothwendig die beiden Sphärenstücke BOCUB und ERFVE gleich sein, da sie sich unter allen Umständen so übereinander legen lassen, daß BUC genau mit EVF und eben so BOC mit ERF zusammenfällt, also beide Flächen sich decken; dasselbe gilt von den beiden andern Paaren von Sphärenstücken AWCPA, DXFSD und AYBNA, DZEQD. Zieht man nun von jeder der beiden gleichen Kugelmützen die Summe der drei paarweise gleichen Sphärenstücke ab, so bleiben gleiche Reste; und diese sind eben unsere beiden Gegendreiecke.

Dieser elementare Beweis für die Gleichflächigkeit zweier Gegendreiecke ist von dem Prof. Gerling, der ihn in der Monatlichen Correspondenz XXVII, pag. 297 mittheilte, nachdem schon vorher in eben dieser schätzbaren Zeitschrift XXVI, pag. 601, Mollweide auf das Unzureichende der bisherigen elementaren Beweise aufmerksam gemacht hatte. Anmerk. des Uebers.

Zus. Haben drei Normalkreise einer Kugel eine solche gegenseitige Lage, daß jeder senkrecht auf den beiden andern steht, so sind die acht sphärischen Dreiecke, in welche durch die Umkreise die Kugeloberfläche zertheilt wird, alle von gleichem Flächeninhalt, indem alle drei Winkel eines jeden Dreiecks rechte, und alle Seiten Quadranten sind.

Anmerkung 3. Gleich wie unter den ebenen Winkeln der Rechte als Maaß für die übrigen dient, so könnte man auch die dreiseitige körperliche Ecke, welche durch drei auf einander senkrecht stehende Normalkreisebenen am Mittelpuncte der Kugel gebildet wird, als Maaß für die körperlichen Ecken gebrauchen.

Anmerkung 4. So wie nun aber für den ebenen rechten Winkel der zwischen seinen Schenkeln beschriebene Quadrant als Maaß dient, so kann als Maaß für die in der vorigen Anmerkung genannte körperliche Ecke der Theil der Kugeloberfläche oder das sphärische Dreieck gebraucht werden, welches durch die Gränzflächen der Ecke bestimmt wird, und welches, wie wir gesehen haben, den achten Theil der Sphäre ausmacht, während der dem rechten Winkel entsprechende Bogen den vierten Theil des ganzen Umkreises bildet. Wollte man also eben so wie man den Quadranten in 90 Bogengrade theilt, das sphärische Dreieck, welches als Maaß für die dreiseitige rechtwinkelige Ecke angesehen werden kann, in 90 Flächengrade theilen, so würde die ganze Sphäre 720 solcher Flächengrade enthalten; dieselben würden bei verschiedenen Kugeln im zweifach hohen Verhältniß ihrer Durchmesser stehen. S. 573, Anm.

572. Lehrsatz. Zieht man auf der Oberfläche einer Halbkugel MAPapAP zwei halbe Normalumkreise PMp und AMa, die sich im Puncte M schneiden, so sind von den vier so entstandenen sphärischen Dreiecken zwei in M sich gegenüberstehende wie AMP und aMp zusammen so groß als das sphärische Zweieck, dessen bestimmender Winkel eben der Winkel bei M ist, den beide Dreiecke gleich haben.

L. G. VII, 22.

Bew. Denn verlängert man die Bogen Ma und Mp bis sie sich zum zweitenmal in m schneiden, so ist MpmaM ein Zweieck mit dem bestimmenden Winkel M, aber Dreieck mpa das Gegendreieck von MPA, also beide gleichflächig (571, Anm.), also auch Mpa + MPA = Mpa + mpa = dem Zweieck MpmaM.

573. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Kugeldreiecks (ABC Fig. 245) verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie der Ueberschuß seiner Winkelsumme über zwei Rechte zu acht Rechten.

L. G. VII, 23.

Vorbereitung. Verlängere die Seiten AB, AC, BC des Dreiecks, bis sie dem Normalumkreis DEFGHJ begegnen.

Bew. Bezeichnen wir, wie schon früher, die Kugeloberfläche mit S, den Inhalt des sphärischen Zweiecks, dessen bestimmender Winkel A, mit $Z_{(A)}$ 2c., so ist:

$$Z_{(A)} : S = A : 4\,R$$
$$Z_{(B)} : S = B : 4\,R$$
$$Z_{(C)} : S = C : 4\,R$$

also auch $Z_{(A)} + Z_{(B)} + Z_{(C)} : S = A + B + C : 4\,R$

Aber nach dem vorigen Satze ist:

$$Z_{(A)} = DAE + HAG$$
$$Z_{(B)} = GBF + JBD$$
$$Z_{(C)} = HCJ + ECF$$

also

$$Z(A) + Z(B) + Z(C) = 2\,ABC + ABC + HAG + ECF + DBJ + GACF + DBCE + HABJ$$
$$= 2\,ABC + \frac{S}{2}$$

also

$$2\,ABC + \frac{S}{2} : S = A + B + C : 4\,R$$
$$4\,ABC + S : S = A + B + C : 2\,R$$
$$4\,ABC : S = A + B + C - 2\,R : 2\,R$$
$$ABC : S = A + B + C - 2\,R : 8\,R$$

Anmerkung 1. Diesen Lehrsatz stellte zuerst Albert Girard auf in seinem Buche: Invention nouvelle en Algebre Amsterd. 1629., und zwar in folgenden Worten: „Ein Kugeldreieck, aus drei Bogen von größten Kreisen gebildet, enthält so viel Flächengrade, als der Ueberschuß seiner Winkelsumme über zwei Rechte Bogengrade enthält." Girard theilte nämlich die Kugeloberfläche in 720 gleiche Theile, die er Flächengrade nannte. S. oben 571, Anm. 4.

Anmerkung 2.

$$\triangle\,ABC = \frac{A + B + C - 2\,R}{8\,R}\,S$$
$$= \frac{A + B + C - 2\,R}{720^0}\,4\,r^2\pi \text{ (wo r den Kugelradius bezeichnet)}$$
$$= \frac{A + B + C - 180^0}{180^0}\,.\,r^2\pi$$
$$= \frac{(A + B + C - 180^0)\,.\,r^2\,.\,3{,}14159265}{648000''}$$
$$= (A + B + C - 180^0)\,.\,r^2\,.\,\sin 1'' \text{ (355, Zus. 2)}$$

ein Ausdruck, welcher den Flächeninhalt eines Kugeldreiecks in Theilen vom Quadrat des Kugelradius darstellt.

Delambre Abregé d'Astronomie, Leçon IV, §. 74.

Anmerkung 3. Aus dem Ausdruck:

$$\triangle\,ABC = \frac{(A + B + C - 180^0)\,r^2\pi}{180^0}$$

ergiebt sich leicht:

$$A + B + C - 180^0 = \frac{\triangle\,ABC}{r^2\pi}\,.\,180^0$$

ein Ausdruck, durch welchen der sphärische Ueberschuß (565, Zus. 1) eines Kugeldreiecks mittelst seines Flächenraums dargestellt wird.

574. Erklärung. Sphärisches Vieleck heißt jeder durch mehr als drei Normalkreisbogen begränzte Theil der Kugeloberfläche.

L. G. VII, Erkl. 8.

575. Erklärung. Kugelpyramide heißt jeder Theil einer Kugel, welcher von einem sphärischen Vieleck (574) als Grundfläche und von den durch die Seiten dieser Grundfläche und den Mittelpunct der Kugel gelegten Ebenen als Seitenflächen begränzt wird.

L. G. VII, Erkl. 11.

576. Lehrsatz. Die Summe der Seiten eines sphärischen Vielecks ist kleiner als der Umfang eines Normalkreises.

L. G. VII, 5.

Beweis. Aus 431.

577. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines sphärischen Vielecks verhält sich zu der Kugeloberfläche, wie der Ueberschuß seiner Winkelsumme über so viel Rechte als das Doppelte der um zwei verminderten Seitenzahl Einheiten hat, zu acht Rechten.

L. G. VII, 24.

Bew. Ein sphärisches neck läßt sich wie ein ebenes in n — 2 Dreiecke zerlegen, durch Diagonalen, die von derselben Ecke auslaufen; auf jedes dieser Dreiecke wendet man den Lehrsatz 576 an.

Anmerkung. Bezeichnet also Σ die Summe aller Winkel eines sphärischen necks, F aber dessen Flächeninhalt, so ist:

$$F : S = \Sigma - (n - 2)\, 2\, R : 8\, R.$$

Anhang zum zehnten, eilften und zwölften Buch.

Allgemeine Eigenschaften der Polyeder.

866. Erklärung. Polyeder heißt jeder von Ebenen begränzte Körper; diese begränzenden Ebenen heißen Gränzflächen oder Seiten des Polyeders; die gemeinschaftlichen Durchschnittslinien je zweier an einander stoßender Gränzflächen Kanten; die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte von je drei oder mehrern Seiten Ecken; die Neigungswinkel je zweier Seiten Flächenwinkel oder Keile; die Winkel der einzelnen Vielecke, welche die Gränzflächen bilden, ebene Winkel der Oberfläche, auch schlechthin ebene Winkel.

867. In jedem Polyeder ist die Anzahl aller Kanten halb so groß als die Anzahl aller ebenen Winkel der Oberfläche.

Zus. 1. Daher ist die Zahl, welche die Menge sämmtlicher ebenen Winkel der Oberfläche eines Polyeders bezeichnet, stets eine gerade Zahl.

Zus. 2. Sind sämmtliche Seiten eines Polyeders Vielecke von ungerader Seitenzahl, so muß die Anzahl dieser Seiten selbst nothwendig eine gerade sein.

Zus. 3. Bilden die Seiten eines Polyeders Vielecke von zum Theil gerader, zum Theil ungerader Seitenzahl, so muß die Anzahl dieser letztern selbst gerade sein.

Zus. 4. Wird ein Polyeder von m Dreiecken, m^{I} Vierecken, m^{II} Fünfecken, m^{III} Sechsecken, m^{IV} Siebenecken ꝛc. begränzt, so muß

$$m + m^{II} + m^{IV} + m^{VI} + \dots$$

stets eine gerade Zahl sein.

868. In keinem Polyeder ist die Anzahl aller ebenen Winkel der Oberfläche kleiner als die dreifache Anzahl der Seiten.

Zus. In keinem Polyeder ist daher $F > \frac{2}{3}K$ wenn F und K respective die Anzahl der Seiten und Kanten bezeichnen.

869. In keinem Polyeder ist die Anzahl aller ebenen Winkel der Oberfläche kleiner als die dreifache Anzahl der Ecken.

Zus. 1. In keinem Polyeder ist daher $E > \frac{2}{3}K$, wenn E die Eckenzahl bezeichnet.

Zus. 2. In einem Polyeder kann also weder F noch E größer als $\frac{2}{3}K$ sein.

870. In jeder beliebigen Pyramide ist die Anzahl der Gränzflächen und Ecken zusammen genommen um zwei größer als die Kantenzahl.

Bew. Es sei die Grundfläche der Pyramide ein meck; alsdann ist: $E = m + 1$, $F = m + 1$ und $K = 2m$, also $E + F = K + 2$.

871. Wenn zwei beliebige Pyramiden, die ein Paar congruente Seitenflächen haben, so an einander gelegt werden, daß diese sich decken, so ist in dem so entstandenen neuen Polyeder die Summe der Gränzflächen und Ecken um zwei größer als die Menge der Kanten.

Bew. Ist die eine Pyramide mseitig und die andere nseitig, so ist

1. entweder, wenn keines der Gränzflächenpaare, die den congruenten Seiten zunächst anliegen, eine solche gegenseitige Lage hat, daß seine beiden Ebenen in eine einzige zusammenfallen:

$$F = m + 1 + n + 1 - 2 = m + n$$
$$E = m + 1 + n + 1 - 3 = m + n - 1$$
$$K = 2m + 2n - 3$$
also $E + F = K + 2$

2. oder, wenn ein Paar der genannten Seitenflächen nur eine Ebene bildet,

$$F = m + 1 + n + 1 - 3 = m + n - 1$$
$$E = m + 1 + n + 1 - 3 = m + n - 1$$
$$K = 2m + 2n - 4$$
also auch jetzt $E + F = K + 2$

3. oder wenn jedes Paar der anliegenden Seitenflächen dieselbe Ebene bildet,

$$F = m + 1 + n + 1 - 4 = m + n - 2$$
$$E = m + 1 + n + 1 - 3 = m + n - 1$$
$$K = 2m + 2n - 5$$
also $E + F = K + 2$

4. oder, wenn nicht blos ein Paar Seitenflächen eine einzige Ebene, sondern auch ein Paar ihrer Kanten eine einzige gerade Linie bilden, so werden dann auch die beiden Grundflächen nur eine Ebene ausmachen, daher ist

$$F = m + 1 + n + 1 - 4 = m + n - 2$$
$$E = m + 1 + n + 1 - 4 = m + n - 2$$
$$K = 2m + 2n - 6$$
also $E + F = K + 2$

5. oder endlich, wenn für beide Paare der anliegenden Seitenflächen das Statt findet, was wir so eben (4) nur für ein Paar annahmen,

$$F = m + 1 + n + 1 - 5 = m + n - 3$$
$$E = m + 1 + n + 1 - 5 = m + n - 3$$
$$K = 2m + 2n - 8$$
also $E + F = K + 2$

und somit die allgemeine Gültigkeit unseres Satzes erwiesen.

Anmerkung. Man hätte diese allgemeine Gültigkeit auch aus dem ersten Fall durch folgende allgemeine Betrachtungen herleiten können:

1. Wenn in einem beliebigen Polyeder zwei an einander anliegende Gränzflächen ihre Lage so ändern, daß ihr Neigungswinkel die Größe von zwei Rechten erreicht, d. h. daß sie eine einzige Ebene bilden, so wird das Polyeder in diesem neuen Zustande zwar eine Gränzfläche aber zugleich auch eine Kante weniger als vorher haben, hatte also das Polyeder im ersten Zustande die Eigenschaft, daß $E + F = K + 2$, so wird es dieselbe auch noch im zweiten besitzen. Dasselbe gilt, wenn n Paare an einander stoßender Gränzflächen ihre Lage auf die angegebene Weise ändern, denn Gränzflächenzahl und Kantenzahl werden zugleich sich dadurch um n vermindern.

2. Wenn man zwei Pyramiden mit zwei Seitenflächen, die congruent sind, an einander legt, so kann es geschehen, daß von den dreiseitigen körperlichen Ecken an den Grundflächen derselben zwei solche, die mit ihren Scheiteln zusammen fallen, einen einzigen Flächenwinkel bilden. Alsdann bleiben offenbar da, wo man vorher vier Gränzflächen hatte, nur zwei (welche eben den genannten Flächenwinkel bilden), wo man vier Kanten hatte, nur eine einzige (die Kante des entstandenen Flächenwinkels), und außerdem verschwindet die vorher einzige körperliche Ecke ganz. Die Verminderungen also, welche Ecken, Gränzflächen und Kanten in diesem besondern Falle noch außer der gewöhnlichen erleiden, sind folgende:

der Ecken werden weniger	1
der Gränzflächen werden weniger	2
der Kanten werden weniger	3

also ist der Verlust, den die Kanten erleiden, so groß als die Verluste, die Ecken und Gränzflächen erfahren, zusammen, also auch jetzt noch $E + F = K + 2$.

Allgemein wenn in zwei beliebigen Polyedern n Paare solcher dreiseitigen Ecken vorhanden wären, welche bei dem Zusammenlegen der Polyeder mit zwei congruenten Gränzflächen, einfache Flächenwinkel bildeten, so würden dadurch der Ecken noch n, der Gränzflächen noch $2n$ und der Kanten noch $3n$ weniger werden, als außerdem immer und nothwendig schon geschieht; mithin der Ueberschuß der Summe von Ecken und Gränzflächen über die Kanten sich unverändert erhalten.

872. Wenn man mit einem Polyeder, welches dadurch entstanden ist, daß man n Pyramiden auf die im vorigen Satze angegebene Weise verbindet, und in welchem die

Summe der Ecken und Gränzflächen die Anzahl der Kanten um zwei übertrifft, noch eine $(n+1)$te Pyramide auf eben diese Weise verbindet, so ist auch in dem neuen, so erhaltenen Polyeder, $E+F=K+2$.

Bew. Wenn wir in dem ersten unserer beiden in Rede stehenden Polyeder die Anzahl der Ecken, Gränzflächen und Kanten respective mit E, F, K, in dem andern mit E', F', K', und in dem aus der Verbindung von beiden entstehenden Polyeder mit E'', F'', K'' bezeichnen, so ist, wenn die beiden verbundenen Polyeder nur mit einem Paare ihrer Gränzflächen zusammenfallen, und überhaupt Gränzflächen, Ecken und Kanten die möglich kleinsten Verminderungen erleiden, offenbar:

$$E''=E+E'-3$$
$$F''=F+F'-2$$
$$K''=K+K'-3$$
$$\text{also } E''+F''=E+F+E'+F'-5$$
$$=K+2+K'+2-5$$
$$=K+K'-3+2$$
$$=K''+2$$

Decken sich aber in unsern beiden Polyedern außer dem einen Paare der Gränzflächen, mit denen sie zunächst an einander gelegt werden, auch noch r andere Paare, und man bezeichnet die diesem Falle zugehörige Menge der Ecken, Gränzflächen und Kanten des neuen Polyeders mit E''', F''', K''', so ist dann

$$F'''=F''-r$$
$$E'''=E''-2r$$
$$K'''=K''-3r$$
$$\text{also auch } E'''+F'''=K'''+2$$

Ganz ohne Einfluß auf die Richtigkeit unseres Satzes, bleibt wie in der Anmerk. zum vorigen Satze ausführlich gezeigt worden ist, der Umstand, wenn bei dem Zusammenlegen der Polyeder eine größere Anzahl von Kanten als nöthig ist, verschwinden, und wenn eine beliebige Anzahl Paare dreiseitiger körperlicher Ecken in ihrer Verbindung sich zu einfachen Flächenwinkeln umgestalten; es ist also dadurch die Richtigkeit unseres Satzes für alle Fälle erwiesen.

873. In jedem Polyeder, welches so beschaffen ist, daß es sich von einem Puncte innerhalb aus in lauter Pyramiden zerlegen läßt, oder, was auf dasselbe hinauskömmt, innerhalb dessen sich ein Punct finden läßt, von dem aus man keine Linie ziehen kann, welche der Oberfläche des Polyeders in mehr als zwei Puncten begegnet — in jedem solchen Polyeder ist die Menge der Ecken und Gränzflächen zusammen um zwei größer als die Anzahl der Kanten.

Bew. Aus dem vorigen Satze.

Anmerkung 1. Dieser Lehrsatz ist von Euler. Er stellte ihn, nebst mehrern andern, zuerst auf in der Abhandlung: „Elementa doctrinae Solidorum" (Novi Comment. A. P. Tom. IV), jedoch ohne ihn bewiesen zu haben; fateri equidem cogor, sagt er, me hujus theorematis firmam demonstrationem adhuc eruere non potuisse. Später fand Euler einen Beweis und theilte ihn in einer zweiten Abhandlung „demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida, hedris planis inclusa, sunt praedita" mit, die in demselben Bande der Petersburger Denkschriften sich findet und unmittelbar auf die erste folgt.

Anmerkung 2. Ein nicht unwichtiges Verdienst um diesen wichtigen Satz, den man als die Grundlage der ganzen Polyedrometrie ansehen kann, erwarb sich der Genfer Mathematiker Simon L'Huilier, indem er zuerst darauf aufmerksam machte, daß derselbe nicht so allgemein und unbedingt für alle Polyeder gelte, wie man ihn gewöhnlich ausspreche. Die desfallsige Abhandlung „Memoire sur la Polyedrometrie" die auch die Grundzüge des vorher aufgestellten Beweises enthält, wird im Auszuge mitgetheilt von Gergonne in den Annal. de Math. III, p. 169 sqq. Ueber eben diesen Gegenstand verbreitet sich auch die Abhandlung von Hessel im Crelle'schen Journal VIII, p. 13 sqq. Er macht den zweckmäßigen Vorschlag, alle Polyeder, in welchen $E+F=K+2$ ist, Euler'sche zu nennen, und sie dadurch von denen zu unterscheiden, für welche der Satz nicht gilt. Zu den nicht Eulerschen Polyedern gehören folgende:

1. alle diejenigen, die in ihrem Innern einen hohlen Raum umschließen d. h. von zwei Oberflächen so begränzt werden, daß die eine von der andern ganz umschlossen wird; in ihnen übertrifft die Summe der Ecken und Gränzflächen die Kantenzahl um mehr als 2.

2. die Polyeder, welche ein- oder mehreremale ringförmig durchbrochen sind; in ihnen kann die Summe von Ecken und Gränzflächen der Kantenzahl nicht nur gleich, sondern sogar kleiner als diese werden.

3. diejenigen, in denen einzelne Seitenflächen ringförmige Vielecke d. h. solche Figuren bilden, wie sie der zwischen zwei Vielecken, von denen das eine ganz innerhalb des andern liegt, enthaltene Raum zeigt; hier ist, wie im ersten Falle, der Ueberschuß von E + F über K größer als 2.

Anmerkung 3. Da die verschiedenen Arten der möglichen Polyeder bedingt werden durch die verschiedenen Mengen ihrer Gränzflächen, Ecken und Kanten, so ist jedes Eulersche Polyeder seiner Art oder Classe nach vollkommen bestimmt, wenn man die Anzahl sowohl seiner Ecken als Gränzflächen kennt; denn man kennt alsdann unserm in Rede stehenden Satze zufolge auch das dritte Element, worauf es hierbei ankömmt, die Kantenzahl. Der Name für ein Polyeder ist daher auch vollkommen bezeichnend und bestimmend, wenn er dessen Ecken und Gränzflächen ihrer Zahl nach bestimmt. So würde man z. B. die dreiseitige Pyramide mit dem Namen vierseitiges Viereck belegen, das dreiseitige Prisma aber als fünfseitiges Sechseck bezeichnen müssen, 2c.

Anmerkung 4. Wegen seiner Wichtigkeit haben in neuerer Zeit mehrere Mathematiker sich mit unserm Satz beschäftigt, und Beweise für ihn gegeben. Außer den vorhin schon erwähnten von Euler und L'Huilier, verdienen noch genannt zu werden die Beweise von Legendre, (Elem. de geom. VII, 25) Cauchy (Journal de l'ecole polytechnique, XVI), Gergonne (Annal. III, p. 178 sqq.) Steiner (Crelle Journal I, p. 364), und Grunert (Crelle J. II, p. 367). Die Beweise von Gergonne und Steiner fallen im Wesentlichen zusammen. Zwar geschieht, außer bei Gergonne, bei keinem der übrigen Beweise ausdrückliche Erwähnung der Ausnahmen, welche der betreffende Lehrsatz erleidet; man darf aber darum nicht annehmen, daß die Verfasser für ihre Beweise allgemeine und unbedingte Gültigkeit in Anspruch nehmen wollten. Vielmehr liegt dem Legendre'schen Beweise ausdrücklich die Voraussetzung zum Grunde, daß das zur Betrachtung kommende Polyeder sich von einem Puncte innerhalb desselben aus in lauter Pyramiden zerlegen lasse.

Anmerkung 5. Der Beweis von Cauchy ist im Wesentlichen folgender: Wenn zwei ebene Vielecke so aneinander gränzen, daß mehrere ihrer Seiten und Winkelspitzen zusammenfallen, so ist der gemeinschaftlichen Ecken immer eine mehr als der Seiten, also umgekehrt der nicht gemeinschaftlichen Seiten stets eine mehr als der Ecken. Bezeichnet man daher für eine beliebige erste Gränzfläche eines Polyeders die Anzahl der Winkelspitzen und Seiten, die sie mit den vorhergehenden Gränzflächen nicht gemein hat, respective mit e_1 und k_1, und verbindet mit e_2, k_2, e_3, k_3 2c. dieselbe Bedeutung für die zweite, dritte 2c. Gränzfläche, so ist offenbar:

$$k_1 = e_1$$
$$k_2 = e_2 + 1$$
$$k_3 = e_3 + 1$$
$$k_4 = e_4 + 1$$

Für die letzte aller Gränzflächen giebt es offenbar weder eine Winkelspitze noch eine Seite, die sie nicht mit den frühern gemein hätte; die Zahl der obigen Gleichungen ist daher immer um 1 kleiner als die Flächenzahl, also = F − 1, wenn diese = F; wir erhalten also:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + F - 2$$

Nun ist aber $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots$ nichts anders als die Menge aller Kanten, so wie $e_1 + e_2 + e_3 + \ldots$ die Anzahl aller Ecken, also $K = E + F - 2$, d. i. $E + F = K + 2$. Diese Schlußweise ist offenbar nicht allgemein gültig, indem sie z. B. für alle diejenigen Polyeder nicht paßt, in denen mehr als eine solcher Endflächen vorhanden ist, die alle Seiten und Winkelspitzen mit den vorhergehenden Gränzflächen gemein haben, d. h. für alle diejenigen, welche in die erste der vorher erwähnten drei Ausnahmclassen gehören.

Anmerkung 6. Steiner'scher Beweis. Nimmt man außerhalb des Polyeders einen Punct an, der mit keiner seiner Gränzflächen in einerlei Ebene liegt, und projicirt von ihm aus die Oberfläche des Körpers auf eine beliebige Ebene, so entsteht offenbar ein Netz, welches so viel Vielecke derselben Art, so viel gerade Linien, und so viel Puncte enthalten muß als das Polyeder respective Gränzflächen, Kanten und Ecken hat, also F, K und E. Man kann unter diesen Umständen zwei Hälften oder Seiten unseres Polyeders unterscheiden, eine, die dem Centralpuncte, und eine, die der Projectionsebene zugewandt ist; beide haben diejenigen Ecken gemeinschaftlich, die in dem Netze der Projection als die äußern Gränzpuncte erscheinen; alle innern Puncte des Netzes bilden die Projectionen von den Ecken der einen und andern der genannten Hälften, die sie nicht mit einander gemein haben. In dem Projectionsnetze für jede Hälfte machen nun die in ihm vorkommenden Winkel einerseits die Winkel des von den Gränzpuncten gebildeten Vielecks, andererseits die um die innern Puncte rund herum liegenden Winkel aus; alle zusammen betragen also so vielmal 4 R als es innere Puncte giebt und so vielmal 2 R als es Gränzpuncte giebt weniger 4 R; die Winkel der Projectionen beider Hälften d. h. die Winkel unseres ganzen Netzes zusammen fassen mithin so vielmal 4 R in sich als es Puncte in dem Netze oder Ecken in dem Polyeder giebt, weniger 8 R. Da es nun die Natur unserer Projectionsweise mit sich bringt, daß die Summe aller Winkel des Projectionsnetzes gleich der Summe aller ebenen Winkel der Oberfläche des Polyeders ist, so erhält man, wenn letztere Summe durch $\Sigma\omega$ bezeichnet wird, die Gleichung:

$$\Sigma\omega = 4\,R\,.\,E - 8\,R$$

Da nun aber auch in jeder Gränzfläche die Summe aller Winkel doppelt so viel Rechte

beträgt, als die Figur Seiten hat weniger 4 R, also in allen Gränzflächen zusammen doppelt so viel Rechte als alle diese Flächen zusammen Seiten haben d. h. viermal so viel Rechte als das Polyeder Kanten hat, weniger so vielmal 4 R als es Gränzflächen giebt, so hat man auch:

$$\Sigma\omega = 4\,R \,.\, K - 4\,R \,.\, F,$$

also auch

$$4\,R \,.\, K - 4\,R \,.\, F = 4\,R \,.\, E - 8\,R$$

und daraus: $K - F = E - 2$ oder $E + F = K + 2$.

Unser Projectionsnetz hört, wie man leicht sieht, auf, die Bedingungen zu erfüllen, auf die sich der vorstehende Beweis stützt, wenn das betrachtete Polyeder zu den oben erwähnten Ausnahmen gehört.

Anmerkung 7. Der folgende einfache Beweis ist vom Professor Grunert. Wenn man von einem beliebigen zusammenhängenden Figurennetz, das aus F beliebigen geradlinigen Vielecken gebildet wird, E Eckpuncte und K gerade Linien enthält, eine der äußern Figuren, welche e Eckpuncte mit den übrigen Vielecken nicht gemein hat, hinwegnimmt, und mit F', E', K' respective die Anzahl der Vielecke, Eckpuncte und Kanten in dem übrig gebliebenen Netze bezeichnet, so folgt aus dem, was oben in Anmerk. 5 erörtert worden, daß:

$$F' = F - 1$$
$$E' = E - e$$
$$K' = K - (e + 1),$$

also auch $E' + F' - K' = E + F - K$

ist; es ändert sich also der Ueberschuß der Zahl, welche die Summe von Eckpuncten und Figuren bezeichnet, über die Anzahl der geraden Linien dadurch nicht im Geringsten, daß man eine Figur von dem Netze wegnimmt, mithin bleibt jener Ueberschuß auch ungeändert, wenn man noch eine zweite, dritte, vierte rc. Figur hinwegnimmt. Setzt man aber dieses Wegnehmen so lange fort bis nur noch eine einzige Figur übrig ist, so ist dann offenbar, weil $E = K$, und $F = 1$, der in Rede stehende Ueberschuß der Einheit gleich, und mithin ist allgemein $E + F - K = 1$. Hat also ein Polyeder E Ecken, F Gränzflächen und K Kanten, und man denkt sich eine der Gränzflächen hinweg, so entsteht offenbar ein Netz, in welchem $F - 1$ Vielecke, E Eckpuncte, und K gerade Linien sich finden, es ist also

$$E + F - 1 - K = 1$$

d. i. $E + F = K + 2$

Gegen die allgemeine Gültigkeit dieses Beweises läßt sich dasselbe erinnern, was vorher in Anm. 6 gesagt worden ist.

874. In jedem Euler'schen (873, Anm. 2) Polyeder schließt die Summe aller ebenen Winkel der Oberfläche so vielmal vier Rechte in sich, so viel die um zwei verminderte Eckenzahl Einheiten hat.

Bew. Es ist: $\Sigma\omega = (K - F)\,4\,R$ (873, Anm. 7) $= (E - 2)\,4\,R$.

875. In keinem Euler'schen Polyeder kann die um sechs vermehrte Anzahl der Kanten größer als das Dreifache der Gränzflächenzahl oder der Eckenzahl sein.

868 und 869 — 873.

Zus. 1. Bezeichnen daher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ...... beliebige ganze Zahlen, Null mit eingeschlossen, so ist in jedem Euler'schen Polyeder:

$$3\,F = K + 6 + \alpha$$
$$3\,E = K + 6 + \beta$$

Zus. 2. Da in allen Polyedern $\frac{3}{2}\,F + \gamma = K = \frac{3}{2}\,E + \delta$ ist (868, Zus. und 869, Zus.), so ergiebt sich aus Zus. 1. auch:

$$F = 4 + \tfrac{2}{3}\,(\alpha + \gamma)$$
$$E = 4 + \tfrac{2}{3}\,(\beta + \delta)$$

d. h. in einem Polyeder kann die Anzahl der Gränzflächen eben so wenig als die der Ecken kleiner als 4 sein.

Zus. 3. Die dreiseitige Pyramide ist daher das einfachste unter allen möglichen Polyedern, und mithin für die Stereometrie dasselbe, was das Dreieck für die ebene Geometrie ist.

Anmerkung. An diesem einfachsten Polyeder lassen sich nicht weniger als 44 verschiedene bestimmende Stücke unterscheiden, nämlich 1) vier Gränzflächen, 2) ihre sechs Flächenwinkel, 3) sechs Kanten, 4) 15 Kantenwinkel d. h. solche Winkel, welche je zwei dieser Kanten mit einander bilden, 5) 12 Winkel, welche die Kanten mit den Gränzflächen bilden, 6) der cubische Inhalt des Tetraeders. Erwägt man nun, wie überaus zahlreich und mannigfaltig die Eigenschaften der Dreiecke sind, so wird man sich leicht überzeugen, daß schon das einfachste Polyeder einen beinahe unerschöpflichen Stoff zur Betrachtung und Untersuchung liefert.

Zus. 4. In jedem Eulerschen Polyeder ist:

$$K = 6 + \tfrac{3}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

Niemals kann daher die Kantenzahl eines solchen Polyeders kleiner sein als 6.

876. Es giebt kein Euler'sches Polyeder, in welchem entweder $E + 4 > 2F$, oder $F + 4 > 2E$ wäre.

Zus. 1. In allen solchen Polyedern ist daher:

$$2E = F + 4 + \alpha$$
$$\text{und } 2F = E + 4 + \beta$$

Zus. 2. In keinem Euler'schen Polyeder kann demnach die Anzahl der Ecken größer als $2F - 4$ und kleiner als $\frac{F}{2} + 2$, so wie auch die Anzahl der Gränzflächen nie größer als $2E - 4$, und nicht kleiner als $\frac{E}{2} + 2$ sein kann.

Zus. 3. In keinem Eulerschen Polyeder kann die Anzahl der Kanten größer als $3F - 6$, und kleiner als $\frac{3}{2}F$ sein.

Zus. 4. Dagegen kann die Menge der Gränzflächen nie größer als $\frac{2}{3}K$ und nie kleiner als $\frac{K}{3} + 2$ sein.

877. Wenn ein beliebiges Euler'sches Polyeder zu seinen Gränzflächen a Dreiecke, b Vierecke, c Fünfecke, d Sechsecke ꝛc. hat, und wenn unter seinen Ecken α dreiseitige, β vierseitige, γ fünfseitige, δ sechsseitige ꝛc. sich finden, so ist:

$$F = a + b + c + d + e + f + g + \ldots.$$
$$E = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \ldots..$$
$$2K = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + 8f + 9g + \ldots.$$
$$2K = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + 7\varepsilon + 8\zeta + 9\eta + \ldots.$$

also, weil $E + F = K + 2$

$$\left.\begin{aligned} 2(a+b+c+d+e+\ldots.) &= 4+\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+5\varepsilon+\ldots. \\ 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots) &= 4+a+2b+3c+4d+5e+\ldots. \end{aligned}\right\} (\mathfrak{A})$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} a+c+e+g+\ldots &= 2[\alpha+\beta+\gamma+\delta-2-(b+c)-2(d+e)-3(f+g)-\ldots] \\ \alpha+\gamma+\varepsilon+\eta+\ldots &= 2[a+b+c+d-2-(\beta+\gamma)-2(\delta+\varepsilon)-3(\zeta+\eta)-\ldots] \end{aligned}\right\} (\mathfrak{B})$$

Hieraus folgt:

878[a]. Bei jedem Euler'schen Polyeder können die Gränzflächen mit ungerader Seitenzahl nur in gerader Anzahl vorhanden sein.

878[b]. Bei jedem Euler'schen Polyeder können die Ecken mit ungerader Kantenzahl nur in gerader Anzahl vorhanden sein.

879. Durch successive Elimination von a und α aus unsern beiden Gleichungen ($\mathfrak{A}$), erhält man:

$$\left.\begin{aligned} 3a+2b+c &= 12+(\varepsilon+2\zeta+3\eta+\ldots)+2(b+2c+3d+4e+\ldots.) \\ 3\alpha+2\beta+\gamma &= 12+(e+2f+3g+\ldots)+2(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\ldots) \end{aligned}\right\} (\mathfrak{C})$$

und folgert hieraus:

880[a]. Es giebt kein Euler'sches Polyeder, in welchem jede Gränzfläche mehr als fünf Seiten hätte.

881[a]. Jedes Euler'sche Polyeder, das weder vierseitige noch fünfseitige Gränzflächen hat, muß wenigstens vier dreiseitige haben.

882[a]. Jedes Euler'sche Polyeder, dem dreiseitige und fünfseitige Gränzflächen fehlen, hat wenigstens sechs vierseitige.

883[a]. Kein Euler'sches Polyeder, dem dreiseitige und vierseitige Gränzflächen fehlen, kann weniger als zwölf fünfseitige haben.

880[b]. Es giebt kein Euler'sches Polyeder, in welchem jede Ecke mehr als fünf Kanten hätte.

881[b]. Jedes Euler'sche Polyeder, das weder vierkantige noch fünfkantige Ecken hat, muß wenigstens vier dreikantige haben.

882[b]. Jedes Euler'sche Polyeder, dem dreikantige und fünfkantige Ecken fehlen, hat wenigstens sechs vierkantige.

883[b]. Kein Euler'sches Polyeder, dem dreikantige und fünfkantige Ecken fehlen, kann weniger als zwölf fünfkantige haben.

884a. In jedem Euler'schen Polyeder, welches von lauter Dreiecken begränzt wird, und keine andern als dreiseitige und sechsseitige Ecken hat, muß die Anzahl der dreiseitigen vier betragen.

885a. Hat ein Euler'sches Polyeder, welches von lauter Dreiecken begränzt wird, keine andern Ecken als vierkantige und sechskantige, so beträgt die Anzahl der vierkantigen sechs.

886a. Hat ein Euler'sches, von lauter Dreiecken begränztes, Polyeder keine andern Ecken als fünfkantige und sechskantige, so ist die Anzahl der fünfkantigen zwölf.

884b. In jedem Euler'schen Polyeder, welches lauter dreikantige Ecken hat, und zu seinen Gränzflächen keine andern als Dreiecke und Sechsecke, müssen der Dreiecke vier sein.

885b. Hat ein Euler'sches Polyeder, dessen Ecken sämmtlich dreikantig sind, keine andern Gränzflächen, als Vierecke und Sechsecke, so ist die Anzahl der Vierecke sechs.

886b. Hat ein Euler'sches, in lauter dreikantige Ecken ausgehendes, Polyeder keine andern Gränzflächen als Fünfecke und Sechsecke, so ist die Anzahl der Fünfecke zwölf.

887. Eliminirt man aus einer unsern obigen Gleichungen (X) b, so verschwindet zugleich auch β, und man erhält:

$$a + \alpha = 8 + c + 2d + 3e + 4f + \ldots\ldots + \gamma + 2\delta + 3\varepsilon + 4\zeta + \ldots\ldots \quad (\mathfrak{D})$$

Hieraus folgt:

888 Es giebt kein Euler'sches Polyeder, in welchem dreiseitige Gränzflächen, und dreikantige Ecken zugleich ganz fehlen; vielmehr muß in jedem solchen Polyeder die Zahl von beiden zusammen wenigstens acht betragen.

889a. Jedes Euler'sche Polyeder, welches kein Dreieck unter seinen Gränzflächen hat, enthält wenigstens acht dreikantige Ecken.

890a. Wenn ein Euler'sches, von lauter Vierecken begränztes, Polyeder keine andern Ecken hat als dreikantige und vierkantige, so ist die Anzahl der dreikantigen acht.

889b. Jedes Euler'sche Polyeder, welches unter seinen Ecken keine dreikantige hat, enthält wenigstens acht dreiseitige Gränzflächen.

890b. Wenn ein Euler'sches, in lauter vierkantige Ecken ausgehendes, Polyeder keine andern Gränzflächen hat als Dreiecke und Vierecke, so ist die Anzahl der Dreiecke acht.

891. Durch Elimination von c und γ aus unsern obigen Gleichungen (X) ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} 4a + 2b + \alpha &= 20 + 2(d + 2e + 3f + 4g + \ldots) + 2\beta + 5\gamma + 8\delta + 11\varepsilon + \ldots \\ 4\alpha + 2\beta + a &= 20 + 2(\delta + 2\varepsilon + 3\zeta + 4\eta + \ldots) + 2b + 5c + 8d + 11e + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (\mathfrak{E})$$

Hieraus folgt:

892a. Hat ein Euler'sches Polyeder unter seinen Gränzflächen weder Dreiecke noch Vierecke, so hat es unter seinen Ecken wenigstens zwanzig dreikantige.

893a. Wenn ein Euler'sches, von lauter Fünfecken begränztes, Polyeder keine andern als dreikantige Ecken hat, so ist die Anzahl dieser letztern zwanzig.

892b. Hat ein Euler'sches Polyeder unter seinen Ecken weder dreikantige noch vierkantige, so hat es unter seinen Gränzflächen wenigstens zwanzig Dreiecke.

893b. Wenn ein Euler'sches, in lauter fünfkantige Ecken ausgehendes, Polyeder keine andern Gränzflächen als Dreiecke hat, so ist die Anzahl dieser letztern zwanzig.

Anmerkung 1. Die vorstehenden Sätze sind theils von Euler in den beiden oben angeführten Abhandlungen, theils von Legendre in der achten Anmerk. zum achten Buche seiner Elemens de Geometrie, theils und besonders von Gergonne in den Annal. de Math. XV, p. 157 sqq. zuerst aufgestellt worden.

Anmerkung 2. Da die vorstehenden Sätze alle, wie man sieht, unmittelbare Folgerungen aus dem Euler'schen Lehrsatze sind, welcher in Beziehung auf Ecken und Gränzflächen vollkommen symmetrisch ist, d. h. der sich nicht ändert, wenn man E und F unter einander verwechselt, so bringt es die Natur der Sache mit sich, daß unsere Sätze paarweise erscheinen, und daß man aus jedem den mit ihm zu demselben Paare gehörigen zweiten herleitet, indem man die Wörter Ecken und Gränzflächen durchweg mit einander vertauscht.

Anmerkung 3. Die in der vorhergehenden Anmerk. näher bezeichnete Correlation geometrischer Lehrsätze hat man erst in der neuesten Zeit sorgsamer zu beachten angefangen, und man weiß jetzt schon, daß dieser merkwürdige Dualismus durch die ganze Geometrie hindurchgeht. Zuerst scheint auf ihn aufmerksam gemacht zu haben der verdiente Herausgeber der schätzbaren Annales de Mathematiques, in seiner Abhandlung: „Considerations philosophiques sur les elemens de la science de l'etendue" Annal. de M. XVI, p. 209. Die erste und bisher einzige Schrift, in welcher sich der Anfang einer

consequenten Durchführung dieses Dualismus findet, ist die auch in so vielen andern Beziehungen ausgezeichnete: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander ꝛc. von Jacob Steiner 1ter Theil. Berlin 1832."

894. Solcher Polyeder, in denen alle Gränzflächen gleich viel Seiten und alle Ecken gleich viel Kanten haben, kann es nicht mehr als fünf geben.

Bew. Die Gränzflächen solcher Polyeder können nur entweder Dreiecke, oder Vierecke, oder Fünfecke; und eben so die Ecken nur dreikantig, oder vierkantig, oder fünfkantig sein. (A. 880)

Nur in dem Falle, wo die Gränzflächen dreiseitig sind, können die Ecken entweder auch dreikantig (Tetraeder), oder vierkantig (Octaeder), oder fünfkantig (Ikosaeder) sein; sind dagegen die Gränzflächen vierseitig oder fünfseitig, so können dem frühern Satze A. 888 zufolge die Ecken nur dreikantig sein (Hexaeder, Dodekaeder).

Anmerkung. Man vergleiche hiermit den Lehrsatz 476 im eilften Buche.

895. In jedem Tetraeder enthält die Summe aller vier Körperwinkel doppelt so viel Flächengrade (571, Anm. 4) als der Ueberschuß sämmtlicher Flächenwinkel oder Keile über vier Rechte Bogengrade in sich faßt.

Bew. Bezeichnen wir die einzelnen Ecken beziehungsweise mit A, B, C, D, so daß nämlich diese Symbole Zahlen bedeuten, die sich auf den sphärischen Octanten als Einheit beziehen, die respectiven Gegenflächen dieser Ecken mit a, b, c, d, den Neigungswinkel von a und b mit (a,b) und auf ähnliche Weise die fünf übrigen, wo diese Symbole Zahlen bezeichnen, welche den Quadranten zur gemeinschaftlichen Einheit haben, so ist:

$$A = (b,c) + (b,d) + (c,d) - 2 \text{ (573, Anm. 1)}$$
$$B = (a,c) + (a,d) + (c,d) - 2$$
$$C = (a,b) + (a,d) + (b,d) - 2$$
$$D = (a,b) + (a,c) + (b,c) - 2$$

Also wenn wir die Summe aller Körperwinkel mit S, die aller Flächenwinkel mit Σ bezeichnen,

$$S = 2\,\Sigma - 8 = 2\,(\Sigma - 4)$$

896. In jeder nseitigen Pyramide enthält die Summe aller Körperwinkel so viel Flächengrade als derjenige ebene Winkel Bogengrade hat, welcher gleich ist dem doppelten Ueberschuß aller Flächenwinkel oder Keile der Pyramide über die Winkelsumme eines ebenen Vielecks von $n+1$ Seiten.

Bew. Eine nseitige Pyramide läßt sich durch Ebenen, welche man durch die Spitze und durch Diagonalen der Grundfläche legt, in $(n-2)$ Tetraeder zerlegen; bezeichnet man durch $S_1, S_2, S_3 \ldots S_{n-2}$ die respectiven Summen der Körperwinkel und durch $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \ldots \Sigma_{n-2}$ die entsprechenden Summen der Flächenwinkel dieser einzelnen Tetraeder, durch S und Σ aber die respectiven Summen eben dieser Winkel für die ganze Pyramide, so ist:

$$S_1 = 2\,(\Sigma_1 - 4)$$
$$S_2 = 2\,(\Sigma_2 - 4)$$
$$\vdots$$
$$S_{n-2} = 2\,(\Sigma_{n-2} - 4)$$

also $S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2} = 2\,[\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_{n-2} - (n-2)4]$;

ferner $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots S_{n-2}$

und weil an jeder der $n-3$ Diagonalen der Grundfläche der Pyramide zwei Flächenwinkel liegen, die zusammen zwei Rechte betragen, und die nur in den einzelnen Tetraedern aber nicht in der ganzen Pyramide vorkommen,

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \ldots \Sigma_{n-2} - (n-3)\,2$$

mithin

$$S = 2\,[\Sigma + (n-3)\,2 - (n-2)\,4]$$
$$= 2\,[\Sigma - (n-1)\,2].$$

897. In jedem Euler'schen Polyeder d. h. in jedem Polyeder, welches sich von einem Puncte aus, den man innerhalb desselben annimmt, in lauter Pyramiden zerlegen läßt, enthält die Summe aller Körperwinkel eben so viel Flächengrade, als Bogengrade der ebene Winkel enthält, welcher gleich ist dem doppelten Ueberschuß der Summe aller Flächenwinkel oder Keile des Polyeders über die Winkelsumme desjenigen Vielecks, das eben so viel Seiten als das Polyeder Gränzflächen hat.

Bew. Nehmen wir an, das Polyeder enthalte nach der Zerlegung a dreiseitige, b vierseitige, c fünfseitige u. s. w. Pyramiden, so ist, wenn die Summe der Körperwinkel in denselben respective durch

(S_3), (S_4), (S_5) ....., die Summen der Flächenwinkel aber durch

(Σ_3), (Σ_4), (Σ_5) ...., durch S und Σ endlich die Summen der Ecken und Keile des Polyeders bezeichnet werden,

$$(S_3) = 2\,[(\Sigma_3) - 2 \,.\, 2\,a]$$
$$(S_4) = 2\,[(\Sigma_4) - 3 \,.\, 2\,b]$$
$$(S_5) = 2\,[(\Sigma_5) - 4 \,.\, 2\,c]$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

Die Summe der Körperwinkel aller Pyramiden ist nun offenbar kleiner als die Summe der Körperwinkel des von jenen gebildeten Polyeders und zwar um alle die Winkel, welche um den Punct herum liegen, von welchem aus das Polyeder zerlegt wurde, und welche mithin zusammen acht (körperliche) Rechte betragen. Eben so gehören die Keile, die bei den einzelnen Pyramiden erscheinen, nicht sämmtlich dem ganzen Polyeder an, sondern es fehlen diesem alle diejenigen, welche um die sämmtlichen den Punct innerhalb mit den Ecken verbindenden Geraden herumliegen, also zusammen so vielmal 4 R betragen, so viel Verbindungslinien d. h. so viel Ecken in dem Polyeder vorhanden sind; es sei die Anzahl dieser letztern E. Demnach erhalten wir

$$S = (S_3) + (S_4) + (S_5) + \ldots\ldots - 8$$
$$\Sigma = (\Sigma_3) + (\Sigma_4) + (\Sigma_5) + \ldots\ldots - 4\,E,$$

also

$$S + 8 = 2\,[\Sigma + 4\,E - 2\,(2\,a + 3\,b + 4\,c + 5\,d \ldots\ldots)]$$
$$S = 2\,[\Sigma + 2\,(2\,E - 2\,a - 3\,b - 4\,c - 5\,d - \ldots - 2)]$$

Aber der frühern Gleichung (A) in A. 877 zufolge ist:

$$2\,E = 4 + a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + \ldots\ldots$$

also

$$S = 2\,[\Sigma - 2\,(a + b + c + d + \ldots - 2] = 2\,[\Sigma - 2\,(F - 2)]$$

wenn man nämlich mit F die Anzahl der Gränzflächen bezeichnet.

Zus. 1. In jedem Euler'schen Polyeder enthält die Summe aller Keile mehr Bogengrade als die halbe Summe aller Ecken Flächengrade.

Zus. 2. Wenn man von der Zahl, welche die Menge der rechten Winkel bezeichnet, die die doppelte Summe aller Keile eines Euler'schen Polyeders in sich schließt, die Zahl abzieht, welche die Menge der sphärischen Oktanten angiebt, die die Summe der Ecken dieses Polyeders in sich faßt, so ist dieser Unterschied viermal so groß als der Ueberschuß der Kanten über die Ecken; also in Zeichen ausgedrückt:

$$2\,\Sigma - S = 4\,(K - E)$$

Zus. 3. Ist ein Polyeder von lauter necken begränzt, so ist $K = \frac{n\,.\,F}{2}$, also

$$F - 2 = K - E = \frac{n\,.\,F}{2} - E, \text{ also}$$

$$F - 2 = \frac{2\,(E - n)}{n - 2}$$

$$\text{und } 2\,\Sigma - S = \frac{8\,.\,(E - n)}{n - 2},$$

also wenn es lauter Dreiecke sind

$$S = 2\,\Sigma - 8\,(E - 3)$$

und wenn es Vierecke sind:

$$S = 2\,\Sigma - 4\,(E - 4)$$

Zus. 4. Ist ein Polyeder regelmäßig, jeder seiner Körperwinkel = W, jeder seiner Keile = w, so ist:

$$S = E\,.\,W,\ \Sigma = K\,.\,w, \text{ also}$$
$$2\,Kw - E\,.\,W = 4\,(F - 2) = 4\,(K - E)$$

Zus. 5. Demnach ist:

für das regelmäßige Tetraeder:	$12\,w - 4\,W = 8$,	also $3\,w - W = 2$
— — — — Octaeder:	$24\,w - 6\,W = 24$,	also $4\,w - W = 4$
— — — — Ikosaeder:	$60\,w - 12\,W = 72$,	also $5\,w - W = 6$
— — — — Hexaeder:	$24\,w - 8\,W = 16$,	also $3\,w - W = 2$
— — — — Dodekaeder:	$60\,w - 20\,W = 40$,	also $3\,w - W = 2$

Die drei regulären Polyeder, Tetraeder, Würfel und Dodekaeder stimmen also in der Eigenschaft überein, daß in jedem der Körperwinkel so viel sphärische Octanten in sich faßt, um so viel rechte Winkel das Dreifache eines Flächenwinkels zwei Rechte übertrifft.

Anmerkung. Der Grund dieser Uebereinstimmung liegt in den dreikantigen Ecken dieser Polyeder.

898. In jedem Euler'schen Polyeder ist die Zahl, welche die Menge der rechten Winkel bezeichnet, die die doppelte Summe sämmtlicher Keile und die einfache Summe aller ebenen Winkel der Oberfläche zusammen in sich schließen, größer als die Zahl, welche bestimmt, wie viel sphärische Octanten sämmtliche Ecken zusammen in sich schließen, und zwar größer um das Vierfache der um zwei verminderten Kantenzahl; also wenn man die Summe der ebenen Winkel der Oberfläche mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet:

$$2\,\Sigma + \mathfrak{S} = S + 4\,(K - 2)$$

Bew. Aus den beiden frühern Sätzen, denen zufolge

$$2\,\Sigma - S = 4\,(K - E)$$

$$\text{und } \mathfrak{S} = 4\,(E - 2)$$

ist.

Zus. In jedem Tetraeder ist daher:

$$2\,\Sigma + \mathfrak{S} - S = 16$$

899. In jedem Euler'schen, von lauter necken begränzten, Polyeder ist:

$$S - 2\,\Sigma + \frac{2\,\mathfrak{S}}{n-2} = 8$$

Bew. Aus dem frühern Satze A. 897 in Verbindung damit, daß $\mathfrak{S} = (2\,n - 4)\,F$ ist.

Zus. Ist also das Polyeder von lauter Dreiecken begränzt, so ist:

$$S - 8 = 2\,(\Sigma - \mathfrak{S})$$

900. Für jedes Euler'sche Polyeder ist, wenn man mit S' die Summe aller derjenigen äußern d. h. durch Erweiterung der Gränzflächen über die Ecken hinaus entstandenen Körperwinkel bezeichnet, welche nicht Scheitelwinkel der innern Körperwinkel, und von denen auch nicht zwei Scheitelwinkel unter einander sind,

$$S' + 2\,\Sigma = 4\,K$$

Bew. Aus dem frühern Satze A. 897 in Verbindung damit, daß $2\,(S + S') = 8\,E$.

Zus. In jedem Euler'schen Polyeder ist daher $S' + 2\,\Sigma$ eine durch 4 theilbare Zahl.

Anmerkung. Die letztern Sätze (895 — 900) sind vom Professor **Grunert**, und mitgetheilt in dem **Crelle'schen Journal V, pag. 37 sqq.**

901. Erklärung. Fällt man aus den Ecken eines ebenen Vielecks auf eine beliebige Ebene Senkrechte, so bildet dasjenige Vieleck, welches zu seinen Ecken die Fußpuncte dieser Senkrechten hat, die orthographische Projection des erstern.

902. Lehnsatz. Der Flächenraum eines Vielecks verhält sich zu dem seiner orthographischen Projection, wie der sinus totus zum Cosinus des Neigungswinkels der Ebenen beider Vielecke.

Bew. Aus dem frühern Satze A. 393 weiß man, daß der Inhalt eines Vielecks dargestellt werden kann als die halbe Summe mehrerer Rechtecke, deren bestimmende Seitenpaare erhalten werden, indem man aus den Ecken Senkrechte auf eine beliebige Gerade in der Ebene des Vielecks fällt. Erweitert man nun im vorliegenden Falle beide Ebenen, nämlich die des Vielecks und die Projectionsebene bis zum gegenseitigen Durchschnitt, fällt auf diese Gerade von den Spitzen beider Vielecke aus Senkrechte, so fallen die Fußpuncte je zwei solcher, die von entsprechenden Ecken auslaufen, zusammen (421, Zus. 7.), bilden also auch denselben Winkel — den Neigungswinkel beider Ebenen — und haben darum auch dasselbe Verhältniß zu einander — die Senkrechte in dem Urviel-

eck verhält sich zu der entsprechenden in der Projection wie sin. tot zum Cosinus des Neigungswinkels. Von den beiden Rechtecksummen, die den Flächeninhalt des einen und andern Vielecks darstellen, haben je zwei entsprechende eine Seite gemeinschaftlich, während die beiden andern eines der genannten Senkrechtenpaare bilden; je zwei entsprechende Rechtecke verhalten sich also wie die zu ihnen gehörigen Senkrechten d. h. wie der sin. tot. zum Cosinus des Neigungswinkels, also haben auch die beiden Rechtecksummen d. h. die beiden in Rede stehenden Vielecke dasselbe Verhältniß zu einander.

Zus. 1. Der Flächenraum der orthographischen Projection eines Vielecks wird Null, wenn die Ebene des letztern auf der Projectionsebene senkrecht steht, indem dann die Fußpuncte aller Projicirenden in derselben geraden Linie liegen.

Zus. 2. Die orthographische Projection eines Vielecks wird dagegen diesem Vieleck selbst congruent, wenn beide Ebenen parallel laufen.

903. Bezeichnet man die Gränzflächen eines Polyeders (mit ausspringenden Ecken) durch F_1, F_2, F_3, ... F_n und bezeichnet man den Winkel, welchen zwei Gränzflächen nach der innern Seite des Polyeders hin mit einander bilden durch die Stellenzeiger dieser Gränzflächen, so daß z. B. der Neigungswinkel der ersten und zweiten durch (1,2), der der ersten und dritten durch (1,3) u. s. f. dargestellt wird, so ist:

$$F_1 = F_2 \cos(1,2) + F_3 . \cos(1,3) + F_4 \cos(1,4) + \ldots + F_n \cos(1,n) \quad (\mathfrak{A})$$
$$F_2 = F_1 . \cos(2,1) + F_3 \cos(2,3) + F_4 \cos(2,4) + \ldots + F_n \cos(2,n) \quad (\mathfrak{B})$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$F_n = F_1 \cos(n,1) + F_2 \cos(n,2) + F_3 \cos(n,3) + \ldots + F_{n-1} \cos(n,n-1) \quad (\mathfrak{N})$$

Anleitung zum Bew. Projicirt man orthographisch auf die Ebene einer Gränzfläche alle übrigen Gränzflächen, so erhält man ein zusammenhängendes Netz von Figuren, deren algebraische Summe stets der in der Projectionsebene liegenden Gränzfläche gleich ist, und von denen jede einzelne zu derjenigen Gränzfläche, deren Projection sie ist, sich verhält wie der sin. tot. zum Cosinus des Neigungswinkels der beiderseitigen Ebenen ꝛc.

904. In jedem Polyeder ist das Quadrat einer Gränzfläche gleich der Summe der Quadrate aller übrigen vermindert um die doppelte Summe der Producte, die man erhält, wenn man je zwei dieser übrigen Gränzflächen multiplicirt unter einander und mit dem Cosinus des Neigungswinkels ihrer Ebenen; also z. B. F_1^2 =

$$F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 - 2\,[F_2 . F_3 \cos(2,3) + F_2 F_4 \cos(2,4) \ldots + F_{n-1} F_n \cos(n-1,n)]$$

Anleit. zum Bew. Man multiplicire die Gleichungen ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$) .... ($\mathfrak{N}$) des vorigen Satzes respective durch F_1, F_2 .... F_n und ziehe alsdann von der einen die Summe aller übrigen ab.

Nähere Betrachtung einzelner einfacher Polyeder.

---

905. Bezeichnet man die Seitenflächen eines beliebigen dreiseitigen Prisma mit P_1, P_2, P_3, ihre gegenseitigen Neigungswinkel respective mit (1,2), (1,3) und (2,3), so ist:

$$P_1 = P_2 \cos(1,2) + P_3 . \cos(1,3)$$
$$P_2 = P_1 . \cos(2,1) + P_3 . \cos(2,3)$$
$$P_3 = P_1 . \cos(3,1) + P_2 . \cos(3,2)$$

Bew. Aus S. 903 in Verbindung damit, daß die Projectionen der beiden Endflächen stets an Größe gleich, aber nothwendig von entgegengesetzter Beziehung sind.

906. In jedem beliebigen nseitigen Prisma ist jede Seitenfläche gleich der algebraischen Summe der orthographischen Projectionen aller übrigen Seitenflächen auf jene erstere.

907. In jedem nseitigen Prisma ist:

$$P_1^2 = P_2^2 + P_3^2 + \ldots + P_n^2 - 2\,[P_2 P_3 \cos(2,3) + \ldots + P_{n-1} P_n \cos n-1,n)]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$P_n^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_{n-1}^2 - 2\,[P_1 P_2 \cos(1,2) + \ldots + P_{n-2} P_{n-1} \cos(n-2,(n-1)]$$

Zus. 1. In jedem $n$seitigen Prisma ist:

$$P_1 P_2 \cos(1,2) + P_1 P_3 \cos(1,3) + \ldots\ldots + P_{n-1} P_n \cos(n-1,n) = \tfrac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2 + \ldots P_n^2)$$

Zus. 2. Ist in einem dreiseitigen Prisma einer der Seitenflächenwinkel, z. B. der Gegenwinkel von P' ein rechter, so ist:

$$P_1^2 = P_2^2 + P_3^2$$

908. In jedem dreiseitigen Prisma verhalten sich die Seitenflächen, wie die Sinusse ihrer Gegenkeile.

909. In jedem dreiseitigen Prisma verhält sich die Summe zweier Seitenflächen zu ihrem Unterschiede, wie die Tangente der halben Summe ihrer Gegenkeile zur Tangente des halben Unterschiedes derselben.

Zus. 1. Die größere von zwei Seitenflächen hat den größern Gegenkeil, und umgekehrt.

Zus. 2. Die größte unter allen Seitenflächen hat den größten Gegenkeil und umgekehrt.

Zus. 3. Gleiche Seitenflächen haben gleiche Gegenkeile und umgekehrt.

910. Legt man durch eine der Seitenkanten eines dreiseitigen Prisma eine Ebene so, daß sie den zu dieser Kante gehörigen Keil halbirt, und verlängert diese halbirende Ebene bis zum Durchschnitt mit der dem halbirten Keil gegenüberliegenden Seitenfläche, so verhalten sich die den genannten Keil einschließenden Seitenflächen wie die ihnen anliegenden Stücke der Gegenfläche.

Zus. Hat ein dreiseitiges Prisma zwei gleiche Seitenflächen, so halbirt die Ebene, welche den von ihnen eingeschlossenen Keil halbirt, auch zugleich die dritte Seitenfläche.

911. Legt man durch eine der Seitenkanten eines dreiseitigen Prisma eine Ebene so, daß sie die Gegenfläche in zwei Stücke theilt, die sich verhalten, wie die ihnen anliegenden beiden andern Seitenflächen, so wird der von den letztern eingeschlossene Keil durch jene Ebene halbirt.

Zus. Hat ein dreiseitiges Prisma zwei gleiche Seitenflächen, so halbirt die durch ihre gemeinschaftliche Kante gelegte Ebene, welche die Gegenfläche halbirt, auch zugleich den von den beiden erstern eingeschlossenen Keil.

912. In einem dreiseitigen Prisma steht diejenige Ebene, welche den von zwei gleichen Seitenflächen eingeschlossenen Keil halbirt, senkrecht auf der dritten Seitenfläche.

Zus. Mehrere Umkehrungen dieses Satzes.

913. Legt man in einem dreiseitigen Prisma durch die Seitenkanten Ebenen, die man bis zum Durchschnitt mit den gegenüberliegenden Seitenflächen erweitert, und bezeichnet die beiden Stücke, in welche dadurch P_1 getheilt wird, mit P_1', P_1'', und die Gegenkeile derselben mit $(2,3)'$, und $(2,3)''$ und eben so bei den beiden andern Seitenflächen jedoch mit Berücksichtigung des Umstandes, daß P_1', P_2', P_3'' drei solche Stücke werden, die keine Seitenkante gemeinschaftlich haben, so ist, wenn diese drei Ebenen eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben

$$P_1' \cdot P_2' \cdot P_3' = P_1'' \cdot P_2'' \cdot P_2'''$$

und $\sin(1,2)' \cdot \sin(1,3)' \cdot \sin(2,3)' = \sin(1,2)'' \cdot \sin(1,3)'' \cdot \sin(2,3)''$

Frage: Bleibt unser Satz noch richtig, wenn die Ebenen nicht alle die Seitenflächen selbst, durch deren Gegenkanten sie gehen, sondern ihre Erweiterungen treffen?

914. Umkehrung des vorigen Satzes.

915. Legt man durch die drei Seitenkanten eines dreiseitigen Prisma drei Ebenen so, daß sie die gegenüberstehenden Seitenflächen halbiren, so haben dieselben eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

Zus. Diese Durchschnittslinie ist diejenige Gerade, welche die Schwerpuncte der beiden Endflächen verbindet.

916. Die drei Ebenen, welche durch die Seitenkanten eines dreiseitigen Prisma so gelegt werden, daß sie die an diesen Kanten anliegenden Keile halbiren, haben eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

Zus. Diese Durchschnittslinie hat gleiche Entfernung von den drei Seitenflächen und ist die Axe des Cylinders, welcher sich in das Prisma beschreiben läßt.

Frage: Wie müßten die schneidenden Ebenen gelegt werden, damit ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie die Axe des um das Prisma beschriebenen Cylinders würde?

917. Die drei Ebenen, welche man durch die Seitenkanten eines dreiseitigen Pris-

ma so legt, daß sie auf den gegenüberstehenden Seitenflächen senkrecht stehen, haben eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

A. 23 und A. 32.

Zus. Ist das Prisma gerade d. h. stehen die Seitenflächen senkrecht auf den Endflächen, so ist die gemeinschaftliche Durchschnittslinie unserer drei Ebenen die Gerade, welche die Höhendurchschnitte beider Endflächen verbindet.

918. Bezeichnet man in einem dreiseitigen Prisma diejenigen Kantenebenen, d. h. die durch die Seitenkanten nach den gegenüberstehenden Seitenflächen gelegten Ebenen, welche die drei Seitenflächen P_1, P_2, P_3 halbiren, respective mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, so ist:

$$P_1^2 + P_2^2 = 2\left(\mathfrak{P}_3^2 + \frac{P_3^2}{2}\right)$$

$$P_1^2 + P_3^2 = 2\left(\mathfrak{P}_2 + \frac{P_2^2}{2}\right)$$

$$P_2^2 + P_3^2 = 2\left(\mathfrak{P}_1^2 + \frac{P_1^2}{2}\right)$$

Zus. Daher ist: $\mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2 + \mathfrak{P}_3^2 = \frac{3}{4}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)$

919. Durch die drei Kantenebenen, welche senkrecht auf den Seitenflächen stehen, werden letztere so getheilt, daß (nach der in A. 913 angegebenen Bezeichnung)

$$P_1'^2 + P_2'^2 + P_3'^2 = P_1''^2 + P_2''^2 + P_3''^2$$

Frage: Läßt sich unser Satz umkehren?

920. Legt man in einem dreiseitigen Prisma drei Paare Kantenebenen so, daß jedes Paar mit den beiden Seitenflächen, mit welchen es gemeinschaftliche Kante hat, beliebige aber gleiche Neigungswinkel bildet, erweitert je zwei solche dieser Ebenen, welche, von den Kanten derselben Seitenfläche ausgehend, die Oeffnungen der Neigungswinkel, die sie mit dieser bilden, sich gegenseitig zukehren, bis zum Durchschnitt, und legt nun drei neue Ebenen durch je eine dieser Durchschnittslinien und die gegenüberliegende Seitenkante des Prisma, so haben diese drei Ebenen immer eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

Anleit. zum Bew. Zwölfmalige Anwendung des frühern Satzes A. 908 in Verbindung mit A. 914.

921. Verbindet man die Ecken einer der Endflächen eines dreiseitigen Prisma mit den Halbirungspuncten der Gegenseiten der andern Endfläche, so haben diese drei Geraden stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct; in ihm wird jede der drei Linien in zwei Stücke getheilt, von denen das eine das Dreifache des andern ist.

Zus. 1. Dieser Durchschnittspunct liegt auf der Geraden, welche die Schwerpuncte, oder Mittelpuncte der mittlern Entfernungen (A. 325) beider Endflächen verbindet.

Zus. 2. Verbindet man die Ecken jeder Endfläche mit den Halbirungspuncten der Gegenseiten der andern, so wird durch die beiden gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte, welche die beiden Ternionen von Linien haben, die Gerade, welche die Schwerpuncte beider Endflächen verbindet, in drei Stücke getheilt, von denen das mittlere doppelt so groß ist, als jedes der beiden äußern.

922. Die drei Geraden, welche die Ecken einer der Endflächen eines dreiseitigen Prisma mit den Schwerpuncten der gegenüberliegenden Seitenflächen verbinden, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, und werden in demselben in zwei Stücke getheilt, von denen das eine doppelt so groß als das andere ist.

A. 195.

Zus. 1. Auch der Durchschnittspunct dieser drei Linien liegt auf der Geraden, welche die Schwerpuncte beider Endflächen verbindet.

Zus. 2. Verbindet man die Ecken jeder Endfläche mit den Schwerpuncten der Gegenseitenflächen, so theilen die beiden Durchschnittspuncte dieser beiden Ternionen von Verbindenden die Gerade, welche die Schwerpuncte beider Endflächen verbindet, in drei gleiche Theile.

923. In jedem vierseitigen Prisma haben die Geraden, welche die Halbirungspuncte der Seiten einer Endfläche mit den Schwerpuncten der diesen Seiten gegenüberliegenden Seitenflächen verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct; und halbiren sich in demselben gegenseitig.

Zus. Verbindet man die Halbirungspuncte der Seiten jeder Endfläche mit den

Schwerpuncten der Gegenseitenflächen, so liegen die gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der einen und andern Quaternion dieser Linien mit den Schwerpuncten der beiden Endflächen in gerader Linie; und zwar sind die beiden Durchschnittspuncte von einander doppelt so weit entfernt als jeder von dem Schwerpuncte der nähern Endfläche.

924. Verbindet man in einem vierseitigen Prisma die Halbirungspuncte je zwei solcher Kanten, welche Seiten verschiedener Endflächen sind und einander gegenüber liegen, so hat auch diese Quaternion von Verbindenden stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, und halbiren sich die einzelnen Linien in demselben gegenseitig.

Zus. Auch dieser Durchschnittspunct liegt auf der die Schwerpuncte beider Endflächen verbindenden Geraden, und zwar gleich weit von den beiden Durchschnittspuncten entfernt, welche im vorigen Satze betrachtet wurden, so daß durch alle drei die die Schwerpuncte Verbindende in vier gleiche Theile getheilt wird.

Frage: Sind bei diesem und dem vorhergehenden Lehrsatz die Diagonalen der Endflächen durchaus unzulässig?

925. Erklärung. Mittelpunct der mittlern Entfernungen oder Schwerpunct eines Polyeders heißt derjenige Punct, dessen Entfernung von einer beliebigen Ebene das arithmetische Mittel der algebraischen Summe der Entfernungen sämmtlicher Ecken des Polyeders von eben dieser Ebene ist.

Zus. Zieht man daher sowohl aus dem Schwerpuncte als aus den sämmtlichen Ecken eines Polyeders nach einer beliebigen Ebene Parallelen von einer beliebigen Richtung, so ist die erstere das arithmetische Mittel der algebraischen Summe aller übrigen.

926. Für jedes beliebige Prisma fällt der Mittelpunct der mittlern Entfernungen zusammen mit dem Halbirungspuncte der Geraden, welche die Schwerpuncte beider Endflächen verbindet.

927. Wenn man von einem dreiseitigen Prisma durch eine Ebene, welche man durch drei auf den Seitenkanten beliebig genommene Puncte legt, ein Stück abschneidet, so ist der übrig bleibende prismatische Stumpf inhaltsgleich mit der Summe dreier Pyramiden, welche mit dem Stumpfe selbst gemeinschaftliche Grundfläche und zu ihren respectiven Spitzen die drei vorhergenannten Puncte der Seitenkanten haben.

Anleit. zum Bew. Es sei BACFDE (Fig. 158) das dreiseitige Prisma, EGH die abstumpfende Ebene. Legt man durch H die Ebene HJK ∥ der Grundfläche BAC, und zieht GJ und EK, so ist:

$$\begin{aligned} BACHGE &= BACHKJ + EKHJ + EKHG \\ &= BACHKJ + EKHJ + JKHG, \text{ da } GKE = GKJ \text{ und } CF \parallel ABED \\ &= JBAC + KBAC + HBAC + EKHJ + JKHG \ (465) \\ &= EBAC + GBAC + HBAC \end{aligned}$$

928. Jeder dreiseitige prismatische Stumpf ist inhaltsgleich mit dem Prisma, welches mit dem Stumpfe gemeinschaftliche Grundfläche hat, und dessen Höhe gleich der Entfernung des Schwerpunctes der abstumpfenden Endfläche von der Grundfläche.

929. In jedem dreiseitigen prismatischen Stumpf verhalten sich die beiden Endflächen zu einander, wie die Entfernungen des Schwerpunctes jeder Endfläche von der andern.

930. Schneidet man ein dreiseitiges Prisma durch eine gegen die Endflächen beliebig geneigte Ebene, und erweitert letztere bis zum Durchschnitt mit den Seitenflächen, so fällt der Schwerpunct des so entstandenen Dreiecks zusammen mit dem Puncte, in welchem die Ebene dieses Dreiecks von der die Schwerpuncte der Endflächen des Prisma verbindenden Geraden geschnitten wird.

Zus. Wird das Prisma von einer beliebigen Anzahl Ebenen geschnitten, so liegen die Schwerpuncte aller so entstandenen Dreiecke unter sich und mit den Schwerpuncten der Endflächen in gerader Linie.

931. Jede durch den Schwerpunct eines dreiseitigen Prisma gelegte und bis zum Durchschnitt mit den Seitenflächen erweiterte Ebene theilt das Prisma in zwei inhaltsgleiche Stümpfe.

932. Werden die Seitenflächen eines dreiseitigen Prisma durch eine beliebige Ebene geschnitten, so verhalten sich die beiden Stümpfe, in welche dadurch das Prisma getheilt wird, wie die beiden Stücke, in welche durch eben diese Ebene die Gerade getheilt wird, welche die Schwerpuncte beider Endflächen verbindet.

Zus. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in eine unendliche Menge von Paaren solcher Stümpfe theilen, welche dasselbe Inhaltsverhältniß zu einander haben.

933. Wenn man in einem Parallelepipedum durch je zwei gegenüberstehende von vier parallelen Kanten Ebenen — gewöhnlich Diagonalebenen genannt, weil ihre Durchschnittslinien mit zwei parallelen Seitenflächen deren Diagonalen bilden — legt, so ist die Summe ihrer Quadrate so groß als die Summe der Quadrate der vier Gränzflächen, deren gegenseitige Durchschnittslinien die erwähnten vier parallelen Kanten bilden.

Frage: Welchem bekannten Satze der Planimetrie entspricht der vorstehende?

Zus. Daher ist die Summe der Quadrate aller sechs Diagonalebenen eines Parallelepipedums doppelt so groß als die Summe der Quadrate sämmtlicher Gränzflächen.

934. Die sechs Diagonalebenen jedes Parallelepipedums haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

935. Die vier Geraden, welche je zwei Gegenecken eines Parallelepipedums verbinden, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, und halbiren sich gegenseitig in demselben.

936. Die Summe der Quadrate der im vorigen Satze genannten vier Geraden ist gleich der Quadratsumme aller Kanten.

937. Jede durch den Schwerpunct eines Parallelepipedums gehende, und durch zwei Gegenflächen desselben begränzte Gerade, wird in jenem Puncte halbirt.

Frage: Welchem bekannten Satze der Planimetrie entspricht der vorstehende?

938. Verbindet man den Schwerpunct eines Parallelepipedums mit den acht Ecken desselben, so sind die sechs vierseitigen Pyramiden, in welche dadurch das Parallelepipedum zerlegt wird, unter einander inhaltsgleich.

939. Bezeichnet man die vier, ein Tetraeder begränzenden, Dreiecke mit T_1, T_2, T_3, T_4, so ist:

$$T_1 = T_2 \cos(1,2) + T_3 \cos(1,3) + T_4 \cdot \cos(1,4)$$
$$T_2 = T_1 \cos(2,1) + T_3 \cos(2,3) + T_4 \cos(2,4)$$
$$T_3 = T_1 \cos(3,1) + T_2 \cos(3,2) + T_4 \cos(3,4)$$
$$T_4 = T_1 \cos(4,1) + T_2 \cos(4,2) + T_3 \cos(4,3)$$

940. In jedem Tetraeder ist das Quadrat einer seiner Gränzflächen gleich der Summe der Quadrate der drei übrigen, vermindert um die doppelte Summe der Producte, die man erhält, wenn man je zwei dieser drei übrigen Gränzflächen durch einander und jedes dieser Producte durch den Cosinus des den Factoren zugehörigen Neigungswinkels multiplicirt.

Zus. 1. Wird daher die Ecke, welche der Gränzfläche T_1 gegenüberliegt, aus drei ebenen rechten Winkeln gebildet, so ist:

$$T_1^2 = T_2^2 + T_3^2 + T_4^2$$

Anmerkung. Dieser Satz, welcher offenbar für das Tetraeder das ist, was der Pythagoräische Lehrsatz fürs Dreieck, wurde zuerst bekannt gemacht von Tinseau in den Denkschriften der Pariser Akademie (Mem. presentés Tom. IX), aber später nahm de Gua in seiner Abhandlung „Essai de Tetraedrometrie“ in den Mem. de l'Acad. A. 1783 das Recht der ersten Entdeckung für sich in Anspruch.

Zus. 2. In jedem Tetraeder ist:

$$T_1T_2 \cos(1,2) + T_1T_3 \cos(1,3) + T_1T_4 \cos(1,4) + T_2T_3 \cos(2,3) + T_2T_4 \cos(2,4) + T_3T_4 \cos(3,4) = \tfrac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2)$$

Frage: Welchem Satze der ebenen Trigonometrie entspricht der vorstehende?

Zus. 3. Bilden die Gränzflächen eines Tetraeders zwei Paare gleichflächiger Dreiecke, so ist die Summe der Cosinusse der Neigungswinkel, welche die eine Fläche des ersten Paares mit den beiden Flächen des andern Paares bildet, so groß als die Summe der Cosinusse von den Neigungswinkeln, welche die zweite Fläche des ersten Paares mit denen des andern Paares bildet.

Zus. 4. Sind alle vier Gränzflächen eines Tetraeders unter einander gleichflächig, so sind auch die sämmtlichen Keile von gleicher Größe; und mithin auch die Ecken.

Zus. 5. Bezeichnet man in einem solchen Tetraeder, wo alle sechs Keile von gleicher Größe sind, diese letztere mit α, so folgt leicht aus unserm Hauptsatze, daß

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{3}, \text{ also } \alpha = 70^\circ\ 31'\ 44''$$

wie schon früher (478) im eilften Buche auf anderm Wege gefunden wurde.

941. Erklärung. Sind die vier Ecken eines Tetraeders A, B, C, D, so soll von den Gränzflächen diejenige die erste heißen und mit T_1 bezeichnet werden, welche der ersten Ecke A gegenübersteht, also BCD, die zweite T_2 diejenige, welche der Ecke

B gegenübersteht, also ACD u. s. w. Die sechs Kanten zerfallen in drei Paare von Gegenkanten d. h. solche, die keinen gemeinschaftlichen Endpunct haben. Die drei ersten Kanten sollen die Seiten der Gränzfläche ABC sein und nach gewohnter Weise durch a, b, c, ihre Gegenkanten aber respective durch a_1, b_1, c_1 bezeichnet werden; es ist demzufolge $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $DA = a_1$, $DB = b_1$, und $DC = c_1$.

942. Bezeichnet man durch $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_5$, $\mathfrak{D}_6$, diejenigen Dreiecke, welche entstehen, wenn man successive durch die einzelnen Kanten a, b, c, a_1, b_1, c_1 eines Tetraeders und die Halbirungspuncte ihrer Gegenkanten Ebenen legt, so ist:

$$\mathfrak{D}_1^2 = \frac{2\,(T_4^2 + T_1^2) - (T_2^2 + T_3^2) + 2\,T_2 \cdot T_3 \cos(2,3)}{4}$$

$$\mathfrak{D}_2^2 = \frac{2\,(T_4^2 + T_2^2) - (T_1^2 + T_3^2) - 2\,T_1 \cdot T_3 \cos(1,3)}{4}$$

etc.

943. In jedem Tetraeder ist:

$$\mathfrak{D}_1^2 + \mathfrak{D}_2^2 + \mathfrak{D}_3^2 + \mathfrak{D}_4^2 + \mathfrak{D}_5^2 + \mathfrak{D}_6^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2$$

944. Halbirt man die Seiten einer Tetraedergränzfläche, und legt durch je zwei dieser Halbirungspuncte und die Gegenecke Ebenen, so ist das von diesen Ebenen und dem vierten Theile der vorher genannten Gränzfläche gebildete Tetraeder so beschaffen, daß die Summe der Quadrate seiner Gränzflächen viermal so klein als die Quadratsumme der drei übrigen Gränzflächen des Urtetraeders.

945. Verfährt man mit allen vier Gränzflächen so, wie im vorigen Satze mit der einen, so ist die Quadratsumme aller Gränzflächen der vier so entstandenen Tetraeder dreiviertelmal so groß als die Quadratsumme der Gränzflächen des Urtetraeders.

Frage: An welche bekannte Eigenschaft des Dreiecks erinnert der vorstehende Satz?

946. In jedem Tetraeder haben die sechs Ebenen, welche man durch je eine Kante so legt, daß immer die zugehörige Gegenkante halbirt wird, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Zus. 1. Dieser Durchschnittspunct fällt zusammen mit demjenigen, in welchem sich die vier geraden Linien schneiden, welche die Puncte der mittlern Entfernungen der einzelnen Gränzflächen mit deren Gegenecken verbinden.

Zus. 2. Jede der vorher genannten Geraden wird in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte so getheilt, daß der obere d. h. zwischen Ecke und Durchschnittspunct enthaltene Abschnitt das Dreifache des untern ist.

947. Zieht man sowohl von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte der im vorigen Satze genannten Kantenebenen, oder der im ersten Zusatze erwähnten Linien, als auch von den Ecken des Tetraeders nach einer beliebigen Ebene gerade Linien, von denen je zwei einander parallel sind, so ist jene erstere das arithmetische Mittel der algebraischen Summe der vier letztern.

X. 323.

Zus. Jener Durchschnittspunct ist also der Mittelpunct der mittlern Entfernungen für das Tetraeder.

948. Verbindet man die Puncte der mittlern Entfernungen der vier Seitenflächen eines Tetraeders unter einander durch gerade Linien, so hat das durch diese Verbindungslinien gebildete Tetraeder folgende Eigenschaften:

1) seine Kanten sind parallel den einzelnen Kanten des Urtetraeders;
2) dasselbe gilt von seinen Gränzflächen;
3) es ist dem Urtetraeder symmetrisch ähnlich;
4) es hat mit dem Urtetraeder einen gemeinschaftlichen Mittelpunct der mittlern Entfernungen;
5) sein Inhalt ist $\frac{1}{27}$ vom Inhalte des Urtetraeders.

949. Wenn man durch die Halbirungspuncte von je drei solchen Kanten eines Tetraeders, welche von derselben Ecke auslaufen, Ebenen legt, so hat das von diesen und den Seitenflächen des Tetraeders begränzte sechseckige Octaeder folgende Eigenschaften:

1) Je zwei Gegenflächen sind parallel und congruent.
2) Sein Mittelpunct der mittlern Entfernungen fällt zusammen mit dem des Tetraeders.
3) Sein Inhalt ist die Hälfte von dem des Tetraeders.

950. Die drei Geraden, welche die Halbirungspuncte von je zwei Gegenkanten

eines Tetraeders verbinden, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct und halbiren sich gegenseitig in demselben.

Anl. zum Bew. Je zwei dieser Linien sind Diagonalen eines Parallelogramms.

Frage: Welcher bekannten Eigenschaft der Vierecke entspricht der vorstehende Satz?

951. Jedes Tetraeder wird durch diejenige Ebene, welche man durch die Halbirungspuncte zweier Paare von Gegenkanten legt, halbirt.

Anleit. zum Bew. Man kann jedes der so erhaltenen Tetraederstücke in ein Tetraeder und in ein dreiseitiges Prisma zerlegen, die einzeln inhaltsgleich sind, und zwar die Tetraeder, weil sie Achtel des Urtetraeders sind, und die beiden Prismen, weil sie das Dreifache von Tetraedern bilden, welche den vorhergenannten gleich sind.

952. Wenn man sowohl von dem Halbirungspuncte derjenigen Geraden, welche die Halbirungspuncte zweier Gegenkanten eines Tetraeders verbindet, als auch von den vier Ecken des letztern nach einer beliebigen Ebene gerade Linien zieht, von denen je zwei einander parallel sind, so ist jene erstere das arithmetische Mittel der algebraischen Summe dieser letztern.

X. 323.

Zus. 1. In jedem Tetraeder schneiden sich daher die drei Geraden, welche die Halbirungspuncte von je zwei Gegenkanten verbinden, im Mittelpuncte der mittlern Entfernungen.

Zus. 2. In jedem Tetraeder haben diejenigen sieben Geraden, von denen vier die Puncte der mittlern Entfernung der einzelnen Gränzflächen mit den Gegenecken, und die drei übrigen die Halbirungspuncte von je zwei Gegenkanten verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

953. Die drei Parallelogramme, welche die Halbirungspuncte je zweier Paare Gegenkanten eines Tetraeders zu Ecken haben, sind so beschaffen, daß die vierfache Summe ihrer Quadrate gleich der Quadratsumme der Gränzflächen des Tetraeders ist.

Anleit. zum Bew. Auf die dreiseitigen Prismen, von denen jedes zu seinen Seitenflächen eines der in Rede stehenden Parallelogramme, und die Hälften zweier Gränzflächen des Tetraeders hat, wendet man den frühern Satz X. 907 und auf das so gewonnene Resultat X. 940 an.

Frage: An welchen Satz im Anhange zum zweiten Buche erinnert der vorstehende?

954. In jedem Tetraeder ist die Summe der Quadrate der sechs Dreiecke, welche durch je eine Kante und den Halbirungspunct der Gegenkante gelegt werden, viermal so groß als die Summe der Quadrate der drei Parallelogramme, welche die Halbirungspuncte von je zwei Paaren gegenüberliegender Kanten zu Ecken haben.

955. Das Quadrat der Geraden, welche eine der Ecken eines Tetraeders mit dem Schwerpunct der Gegenfläche verbindet, ist gleich dem Ueberschuß der Quadratsumme der drei Kanten, welche mit der in Rede stehenden Geraden von derselben Ecke auslaufen, über den dritten Theil der Quadratsumme der drei übrigen.

X. 200.

956. In jedem Tetraeder ist die neunfache Summe der Quadrate derjenigen vier Geraden, welche die Ecken mit den Schwerpuncten der Gegenflächen verbinden, so groß als die vierfache Quadratsumme aller Kanten.

957. In jedem Tetraeder ist die Summe der Quadrate derjenigen vier Geraden, welche den Punct der mittlern Entfernung mit den Ecken verbinden, viermal so klein als die Quadratsumme aller Kanten.

Zus. Daher ist die Summe der Quadrate der Geraden, welche den Schwerpunct des Tetraeders mit den Schwerpuncten der Seitenflächen verbinden, der sechs und dreißigste Theil von der Quadratsumme der Kanten.

958. In jedem Tetraeder ist die Quadratsumme aller Kanten die mittlere Proportionalfläche zwischen der Summe der Quadrate derjenigen zwölf Geraden, welche in jeder Gränzfläche die Spitzen mit den Halbirungspuncten der Gegenseiten verbinden und zwischen der Summe der Quadrate der obern d. h. zwischen den Spitzen und den Schwerpuncten der Seitenflächen enthaltenen, Abschnitte eben dieser Linien.

959. In jedem Tetraeder ist die Summe der drei Producte, von denen jedes ein Paar Gegenkanten und den Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels zu Factoren hat, gleich Null, also

$$aa_1 \cos(a,a_1) + bb_1 \cos(b,b_1) + cc_1 \cos(c,c_1) = 0$$

Anleit. zum Bew. Man verbindet die Halbirungspuncte sämmtlicher Kanten unter einander und wendet auf die Dreiecke, in welche die entstandenen Parallelogramme durch ihre Diagonalen getheilt werden, den frühern Lehrsatz 396 an.

Anmerkung. Es ist nöthig, den minder Geübten ausdrücklich darauf aufmerksam zu machen, wie unser Lehrsatz die stillschweigende Voraussetzung enthält, daß die Bezeichnung der von je zwei Gegenkanten gebildeten Winkel durch die vorher gebrauchten Symbole mit Gleichmäßigkeit geschehe. Wie bekannt, versteht man, wenn man von dem Winkel zweier Geraden im Raume spricht, keinen andern, als denjenigen, welchen mit einer dieser beiden Linien die durch einen ihrer Puncte mit der andern gezogene Parallele bildet. Denkt man sich demgemäß in einem Tetraeder durch jede der drei Kanten, welche die Seiten seiner Grundfläche bilden, Parallelen mit den Gegenkanten gezogen, so muß man von den sechs so entstandenen Winkeln diejenigen drei zur Bezeichnung der Gegenkanten-Winkel gebrauchen, welche sämmtlich entweder zur linken oder zur rechten Hand einem Beobachter erscheinen, vor dessen Augen sich das Tetraeder gleichmäßig so dreht, daß es successive ihm alle seine drei Seitenflächen zuwendet.

Zus. Sind in einem Tetraeder zwei Gegenkanten-Winkel Rechte, so gilt dasselbe auch von dem dritten.

Anmerkung. Ein Tetraeder, in welchem alle drei Gegenkanten-Winkel Rechte sind, wollen wir künftig der Kürze halber ein rechtkantiges Tetraeder nennen.

960. In jedem rechtkantigen (Anmerk. zum vorherg. Lehrs.) Tetraeder sind die drei Geraden, welche die Halbirungspuncte je zweier Gegenkanten verbinden, von gleicher Länge.

X. 950.

961. In jedem rechtkantigen Tetraedee sind die Quadratsummen je zweier Gegenkanten von gleicher Größe, und umgekehrt.

Frage: Von welchem Satze im Anhange zum zweiten Buche kann der vorstehende als eine Erweiterung angesehen werden?

962. In jedem rechtkantigen Tetraeder haben die beiden Senkrechten, welche man aus den Endpuncten einer Kante auf deren Gegenkante fällt, einen gemeinschaftlichen Fußpunct.

Anleit. zum Bew. Die Ebene, welche man durch eine der Senkrechten und die Kante legt, aus deren Endpuncte jene gefällt ist, steht senkrecht auf der Gegenkante.

963. Umgekehrt, haben je zwei Senkrechte, die man aus den Endpuncten einer Kante auf ihre Gegenkante fällt, einen gemeinschaftlichen Fußpunct, so ist das Tetraeder rechtkantig.

964. Fällt man in einem rechtkantigen Tetraeder Senkrechte aus den Ecken auf die Gegenflächen, so fallen deren Fußpuncte zusammen mit den Höhendurchschnitten dieser Gegenflächen.

Zus. Für jede stumpfwinkelige Seitenfläche eines solchen Tetraeders fällt daher der Fußpunct des zu ihr gehörigen Höhenperpendikels nicht auf sie selbst, sondern auf ihre Erweiterung.

965. In jedem rechtkantigen Tetraeder haben die vier Höhen d. h. die aus den Ecken auf die Gegenflächen gefällten Senkrechten einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct und die Rechtecke aus den Segmenten, in welche jede der Höhen in diesem Durchschnittspuncte getheilt wird, sind gleichflächig.

966. Umgekehrt, jedes Tetraeder ist rechtkantig, dessen Höhen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben.

967. Wenn sowohl das eine oder das andere Paar der Kanten, die von den beiden Endpuncten derselben dritten Kante auslaufen, von gleicher Länge sind, z. B. $AB = AC$ und $DB = DC$, so ist der Winkel, welchen diese dritte Kante DA mit ihrer Gegenkante BC bildet, ein rechter.

Zus. Jedes regelmäßige Tetraeder ist daher auch rechtkantig.

968. Lehnsatz. Wenn zwei beliebige gerade Linien im Raume gegeben sind, die sich nicht schneiden, so läßt sich immer eine dritte Gerade so ziehen, daß sie jene beiden erstern unter rechten Winkeln schneidet.

Bew. Liegen die in Rede stehenden Geraden in derselben Ebene und sind mithin parallel, so leuchtet die Richtigkeit unserer Behauptung von selbst ein. Im entgegengesetzten Falle nehme man auf jeder der beiden Linien einen beliebigen Punct und ziehe durch ihn eine Parallele mit der andern. Legt man durch das eine und andere Paar dieser Geraden zwei Ebenen, so sind diese parallel; beide durchschneide man mit einer dritten Ebene so, daß sie auf jeder von ihnen senkrecht steht, und zur Durchschnittslinie mit einer von ihnen die in dieser letztern liegende ursprünglich gegebene Gerade hat. Auf der Durchschnittslinie der senkrechten Ebene mit der andern der parallelen Ebenen und

zwar in dem Puncte, wo sie von der in ihr liegenden zweiten der ursprünglich gegebenen Geraden geschnitten wird, errichte man eine Senkrechte, so ist diese offenbar die gesuchte Gerade.

Zus. 1. Es giebt nur eine einzige Gerade, welche auf zwei nicht in derselben Ebene liegenden Geraden zugleich senkrecht steht.

Zus. 2. Durch das Stück dieser gemeinschaftlichen Senkrechten, welches zwischen ihren beiderseitigen Fußpuncten enthalten ist, wird die gegenseitige Entfernung der beiden Geraden, auf denen sie senkrecht steht, gemessen.

969. In jedem rechtkantigen Tetraeder haben die drei Geraden, welche auf je zwei Gegenkanten zugleich senkrecht stehen, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Zus. 1. Dieser Durchschnittspunct fällt mit dem Höhendurchschnitt zusammen.

Zus. 2. Jede der sieben, in Einem Puncte sich schneidenden, Linien wird in demselben in zwei solche Segmente getheilt, daß die aus ihnen gebildeten Rechtecke sämmtlich unter einander gleichflächig sind.

Zus. 3. Ist ein rechtkantiges Tetraeder zugleich auch rechteckig d. h. stehen von drei Seitenflächen je zwei auf einander senkrecht, so fällt der Durchschnittspunct unserer sieben Geraden mit dem Scheitel der rechten Ecke zusammen. Die auf je zwei Gegenkanten Senkrechten fallen mit Höhenperpendikeln der einzelnen Seitenflächen zusammen rc.

970. In jedem rechtkantigen Tetraeder sind die sechs Winkel, welche die vier Höhen in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte bilden, einzeln den sechs Keilen des Tetraeders gleich.

Frage: Welchem bekannten, die Dreiecke betreffenden, Lehrsatze kann der vorstehende als entsprechend angesehen werden?

971. In jedem rechtkantigen Tetraeder beträgt die Summe der sechs Keile und der zwölf Neigungswinkel der Kanten gegen die Gränzflächen zwölf Rechte.

972. Legt man durch je zwei Gegenkanten eines Tetraeders zwei parallele Ebenen, und erweitert sie bis sich je zwei nicht parallele schneiden, so ist das so entstandene, dem Tetraeder umschriebene Parallelepipedum dreimal so groß als das Tetraeder.

973. Wird (auf die im vorigen Satze angegebene Weise) um ein rechtkantiges Tetraeder ein Parallelepipedum beschrieben, so sind alle Gränzflächen des letztern gleichseitig, also Rhomben, der Körper also ein Rhomboeder.

974. In jedem Tetraeder haben die vier Senkrechten, welche man auf den Gränzflächen in den Mittelpuncten der ihnen umschriebenen Kreise errichtet, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Bew. Errichtet man die genannten Senkrechten auf zwei Seitenflächen, so müssen dieselben sich stets begegnen, weil sie, ohne jemals parallel sein zu können, immer in derselben Ebene liegen, in derjenigen nämlich, welche man durch den Halbirungspunct der den beiden in Rede stehenden Seitenflächen gemeinschaftlichen Kante so legt, daß sie senkrecht auf dieser letztern steht. Fällt man von dem Durchschnittspuncte unserer Senkrechten noch zwei andere auf die beiden übrigen Seitenflächen, so läßt sich mit Leichtigkeit zeigen, daß deren Fußpuncte die Mittelpuncte der diesen Seitenflächen umschriebenen Kreise sind.

Zus. 1. Der Durchschnittspunct unserer vier Senkrechten hat gleiche Entfernung von den vier Ecken des Tetraeders, ist also der Mittelpunct der Kugel, welche sich um das Tetraeder beschreiben läßt.

Zus. 2. Um jedes beliebige Tetraeder läßt sich eine Kugel beschreiben.

975. In jedem rechtkantigen Tetraeder liegen der Höhendurchschnitt, der Mittelpunct der mittlern Entfernungen und der Mittelpunct der umschriebenen Kugel in gerader Linie.

Anleit. zum Bew. Legt man durch ein Höhenperpendikel und die mit ihm von derselben Ecke nach dem Schwerpunct der Gegenfläche gezogene Gerade eine Ebene, so liegt in dieser außer dem Höhendurchschnitt und dem Schwerpunct des Tetraeders, den frühern Sätzen X. 349, Zus. und X. 975 zufolge, auch der Mittelpunct der umschriebenen Kugel. Legt man also durch eine zweite Ecke eine eben solche Ebene, die auf der Gegenfläche senkrecht steht, durch deren Schwerpunct und mithin auch durch den Mittelpunct des umschriebenen Kreises geht, so muß auch in dieser Ebene Höhendurchschnitt, Schwerpunct und Mittelpunct der umschriebenen Kugel des Tetraeders liegen; diese drei Puncte gehören also unsern beiden Ebenen zugleich an, liegen also auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie beider, also in einer Geraden.

Zus. In jedem rechtkantigen Tetraeder haben die vier Ebenen, welche man einzeln

durch die Ecken des Tetraeders so legt, daß sie auf den Gegenflächen senkrecht stehen und durch deren Schwerpuncte gehen, eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

976. In jedem rechtkantigen Tetraeder bildet der Schwerpunct den Halbirungspunct der geraden Linie, welche den Höhendurchschnitt mit dem Kugelmittelpunct verbindet; der Schwerpunct ist also gleichweit vom Höhendurchschnitt und vom Kugelmittelpunct entfernt.

Bew. Es bezeichne H den Höhendurchschnitt, S den Schwerpunct, M den Kugelmittelpunct des Tetraeders. Aus diesen Puncten fälle man auf eine der Seitenflächen des Tetraeders z. B. die Gegenfläche von A, die Senkrechten Mm, Hh, Sx, so ist m Mittelpunct des äußern Kreises und h Höhendurchschnitt dieser Seitenfläche; ihr Schwerpunct sei s, so ist nicht nur msh eine Gerade, sondern auch sh = 2 ms (A. 349, Zus.). Da ferner sSA eine Gerade, und zwar sA = 4 sS (A. 946, Zus. 2), so ist auch sh = 4 sx, also ms = 2 sx, mithin ms + sx = sh — sx d. i. mx = mh, also auch MS = SH.

977. In jedem rechtkantigen Tetraeder ist die Entfernung des Kugelmittelpunctes von einer der Gränzflächen halb so groß als der Unterschied der beiden durch den Höhendurchschnitt gebildeten Segmente desjenigen Höhenperpendikels, das zu eben dieser Seitenfläche gehört.

Anmerkung. Man hätte unsern Satz auch so aussprechen können: Die Entfernung des Kugelmittelpunctes von einer der Gränzflächen ist gleich der Entfernung des Höhendurchschnitts von dem Halbirungspuncte des zu jener Seitenfläche gehörigen Höhenperpendikels.

978. In jedem rechtkantigen Tetraeder liegt der Halbirungspunct eines Höhenperpendikels, und der Mittelpunct des um die zu demselben gehörige Seitenfläche beschriebenen Kreises mit dem Schwerpunct des Tetraeders in gerader Linie und zwar ist letzterer gleichweit von den beiden erstern entfernt.

979. In jedem rechtkantigen Tetraeder ist der Ueberschuß des Quadrates eines Höhenperpendikels über das Quadrat der doppelten Entfernung des Kugelmittelpunctes von der zu jenem Perpendikel gehörigen Grundfläche eine constante Größe.

980. In jedem rechtkantigen Tetraeder ist der Höhendurchschnitt von dem Halbirungspuncte einer Kante eben so weit entfernt als der Kugelmittelpunct vom Halbirungspunct der Gegenkante.

Anleitung zum Bew. Die vier genannten Puncte bilden stets die Spitzen eines Vierecks, das ein Parallelogramm ist, da seine Diagonalen im Schwerpuncte des Tetraeders sich gegenseitig schneiden und halbiren.

981. In jedem rechtkantigen Tetraeder bildet die Summe der Quadrate der Entfernungen des Höhendurchschnitts von den Halbirungspuncten zweier Gegenkanten eine constante Größe.

Anleitung zum Bew. Diese Entfernungen bilden anliegende Seiten in Parallelogrammen, deren Diagonalen gleich sind.

982. In jedem rechtkantigen Tetraeder ist die Quadratsumme der obern d. h. zwischen den Ecken und dem Höhendurchschnitt enthaltenen Abschnitte der Höhenperpendikel um das Quadrat der Entfernung des Höhendurchschnitts vom Kugelmittelpuncte größer als die Quadratsumme der drei die Halbirungspuncte von je zwei Gegenkanten verbindenden Geraden.

983. In jedem rechtkantigen Tetraeder ist die Quadratsumme der obern Abschnitte der Höhenperpendikel gleich dem Quadrat des Durchmessers der umschriebenen Kugel.

93 — A. 956 — A. 946, Zus. 2 — A. 982.

984. Verbindet man den Höhendurchschnitt eines rechtkantigen Tetraeders mit dessen Ecken, so sind die vier Tetraeder, in welche dadurch das ursprüngliche zerlegt wird, sämmtlich gleichfalls rechtkantig, und ihre Höhendurchschnitte fallen mit den einzelnen Ecken des Urtetraeders zusammen.

Frage: An welche bekannte Eigenschaft des Dreiecks erinnert der vorstehende Satz?

985. In jedem rechtkantigen Tetraeder ist die Quadratsumme von einem Höhenperpendikel und vom Durchmesser des um die zugehörige Grundfläche beschriebenen Kreises eine constante Größe.

986. Errichtet man auf den vier Seitenflächen eines rechtkantigen Tetraeders und zwar in den Mittelpuncten der Kreise, welche durch die Fußpuncte der Höhenperpendikel dieser Seitenflächen gehen, Senkrechte, so schneiden diese vier Geraden sich stets im Schwerpuncte des Tetraeders.

A. 976. — A. 519.

Zus. Die Halbirungspuncte der Kanten und die Fußpuncte der Höhenperpendikel der Seitenflächen liegen daher auf der Oberfläche derselben Kugel, deren Mittelpunct der Schwerpunct des Tetraeders ist.

987. In jedem rechtkantigen Tetraeder haben die vier Senkrechten, welche man auf den vier Seitenflächen in deren Schwerpuncten errichtet, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, welcher mit dem Schwerpuncte des Tetraeders, dem Kugelmittelpunct und dem Höhendurchschnitt in gerader Linie liegt, und zwar so, daß er vom zweiten dieser drei Puncte doppelt und vom dritten viermal so weit entfernt ist als vom ersten.

988. In jedem rechtkantigen Tetraeder haben auch die vier Senkrechten einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, welche man auf den Seitenflächen in den Halbirungspuncten derjenigen Geraden errichtet, die in jeder Seitenfläche den Höhendurchschnitt mit dem Schwerpuncte verbinden. Die Lage dieses Punctes ist immer so beschaffen, daß die Gerade, welche ihn mit dem Durchschnittspuncte der auf den Seitenflächen in ihren Schwerpuncten errichteten Senkrechten verbindet, durch den Schwerpunct des Tetraeders halbirt wird.

989. Verbindet man die Schwerpuncte der Gränzflächen eines rechtkantigen Tetraeders, so hat das von diesen Verbindenden gebildete Tetraeder folgende Eigenschaften:

1) Es ist gleichfalls rechtkantig, also
2) liegen auch in ihm Schwerpunct, Höhendurchschnitt und Kugelmittelpunct in gerader Linie, und zwar
3) fallen die Schwerpuncte beider Tetraeder zusammen.
4) Die Senkrechten, welche man auf den Seitenflächen des Urtetraeders in deren Schwerpuncten errichtet, bilden die Höhenperpendikel, ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunct also den Höhendurchschnitt des neuen Tetraeders, daher
5) fallen die beiden Geraden, auf denen Höhendurchschnitt, Schwerpunct, und Kugelmittelpunct des einen und andern Tetraeders liegen, zusammen, und zwar
6) ist das Stück dieser Geraden, welches in dem Urtetraeder zwischen zwei von diesen Puncten enthalten ist, dreimal so groß als das entsprechende Stück im neuen Tetraeder, also
7) ist der Kugelmittelpunct des neuen Tetraeders doppelt so weit vom Höhendurchschnitt des Urtetraeders entfernt als vom Schwerpunct, mithin
8) ist dieser Kugelmittelpunct des neuen Tetraeders kein anderer, als der Durchschnittspunct der Senkrechten, welche man auf den Seitenflächen des Urtetraeders in den Halbirungspuncten derjenigen Geraden errichtet, die den Schwerpunct und Höhendurchschnitt dieser Seitenflächen verbinden, demnach
9) ist dieser Kugelmittelpunct des neuen Tetraeders auch gleichweit von den Fußpuncten der vier Höhenperpendikel des Urtetraeders, oder mit andern Worten: die Kugel, welche man um das Tetraeder beschreibt, dessen Ecken die Schwerpuncte des Urtetraeders bilden, ist auch zugleich dem Tetraeder umschrieben, dessen Ecken mit den Fußpuncten der Tetraederhöhen oder, was dasselbe, mit den Höhendurchschnitten der Seitenflächen zusammenfallen; also
10) ist in jedem rechtkantigen Tetraeder der Halbmesser derjenigen Kugel, welche man um das die Fußpuncte der Tetraederhöhen zu Ecken habende Tetraeder beschreibt, dreimal so klein, als der Radius der um das Urtetraeder beschriebenen Kugel.

990. Construirt man in ein rechtkantiges Tetraeder ein zweites so, daß dessen Ecken mit den Schwerpuncten der Seitenflächen des erstern zusammenfallen, darauf in dieses zweite auf eben diese Weise ein drittes, in dieses ein viertes u. s. f., so liegen sowohl die Höhendurchschnitte als auch die Kugelmittelpuncte aller in gerader Linie.

991. In jedem rechtkantigen Tetraeder liegt jede Ecke mit den Höhendurchschnitten der drei in dieser Ecke zusammenlaufenden Gränzflächen, mit den Fußpuncten der Senkrechten, die man auf die drei von eben dieser Ecke auslaufenden Kanten von den Gegenecken aus fällt, und mit dem Höhendurchschnitt des Tetraeders in der Oberfläche derselben Kugel.

Zus. 1. Der Mittelpunct dieser Kugel fällt zusammen mit dem Halbirungspuncte vom obern Abschnitte des von eben dieser Ecke auslaufenden Höhenperpendikels des Tetraeders.

Zus. 2. Das achteckige Hexaeder, welches die in unserm Hauptsatze genannten acht Puncte zu Ecken hat, wird von lauter Kreisvierecken begränzt. Man könnte daher den

Hauptsatz auch so aussprechen: Errichtet man auf jeder der Gränzflächen des genannten Hexaeders im Mittelpuncte ihres äußern Kreises ein Perpendikel, so haben diese sechs Senkrechte stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Anmerkung. Auf diese in der That bemerkenswerthen Eigenschaften des rechtkantigen Tetraeders hat, so viel ich weiß, zuerst der französische Mathematiker Ferriot aufmerksam gemacht in der schätzbaren Abhandlung: Analogies entre le triangle et le tetraedre in den Annal. de Math. II. p. 133 sqq. Später, aber, wie es scheint, ohne Ferriot's Abhandlung gekannt zu haben, und daher unabhängig von ihr hat ein deutscher Mathematiker, der Professor C. W. Feuerbach, die Eigenschaften des Tetraeders überhaupt und besonders auch des rechtkantigen zum Gegenstand besonderer Untersuchung gemacht und einen Theil der gewonnenen Resultate mitgetheilt in der kleinen aber reichhaltigen Schrift: „Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide" Nürnberg 1827 in 4.

992. Sind in einem Tetraeder je zwei Gegenkanten von gleicher Länge — wir wollen der Kürze halber ein solches Tetraeder ein gleichkantiges nennen — so schneiden sich je zwei von den drei Geraden, welche die Halbirungspuncte je zweier Gegenkanten verbinden, unter rechten Winkeln, und steht mithin jede derselben senkrecht auf der durch die beiden andern gelegten Ebene.

993. In jedem gleichkantigen Tetraeder sind die vier Geraden, welche man von den Ecken nach den Schwerpuncten der Gegenflächen zieht, von gleicher Länge. A. 955.

994. In jedem gleichkantigen Tetraeder fällt der Mittelpunct der umschriebenen Kugel zusammen mit dem Schwerpuncte.

995. In jedem gleichkantigen Tetraeder stehen die Geraden, welche die Halbirungspuncte je zweier Gegenkanten verbinden, stets auf diesen Gegenkanten senkrecht, oder mit andern Worten, der Schwerpunct eines solchen Tetraeders ist auch zugleich der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der auf je zwei Gegenkanten senkrecht stehenden Geraden. A. 994.

Anmerkung. Die drei Puncte, Schwerpunct, Höhendurchschnitt, und Kugelmittelpunct, welche beim rechtkantigen Tetraeder in gerader Linie liegen, fallen beim gleichkantigen ganz zusammen.

996. In jedem gleichkantigen Tetraeder sind die Keile, die an gleichen Kanten liegen, von gleicher Größe, oder, was dasselbe ist, liegen den gleichen Kanten gleiche Keile gegenüber.

Anleit. zum Bew. Fälle aus dem Kugelmittelpunct Senkrechte auf die Gränzflächen und verbinde deren Fußpuncte mit den Halbirungspuncten der Kanten.

Frage: An welche bekannte Eigenschaft des Dreiecks erinnert die vorstehende des Tetraeders?

997. In jedem gleichkantigen Tetraeder bildet jede Kante gleiche Winkel mit ihren beiden Gegenflächen.

Zus. Daher kann unter den zwölf Winkeln, welche die Kanten mit den Gränzflächen bilden, auch nicht ein einziger sein, der einem Rechten gleich wäre.

998. Der Kugelmittelpunct eines gleichkantigen Tetraeders ist nicht nur gleichweit von je zwei Gegenkanten entfernt, sondern hat auch gleiche Entfernung von den vier Gränzflächen.

Zus. Daher fallen in einem gleichkantigen Tetraeder die Mittelpuncte der äußern und innern Kugel zusammen.

Frage: An welche bekannte Eigenschaft des Dreiecks erinnert der Inhalt des vorstehenden Zusatzes?

999. In jedem gleichkantigen Tetraeder hat jeder der Kugelhalbmesser, die man nach den Ecken zieht, gleiche Neigung gegen die in eben dieser Ecke zusammenlaufenden Seitenflächen.

1000. In jedem gleichkantigen Tetraeder ist das Quadrat vom Halbmesser der umschriebenen Kugel um das Quadrat des Radius von dem um eine der Seitenflächen beschriebenen Kreis größer als das Quadrat des Halbmessers der eingeschriebenen Kugel.

1001. Das Parallelepipedum, welches man um ein gleichkantiges Tetraeder beschreibt (A. 973), hat zu seinen sämmtlichen Gränzflächen Rechtecke, ist also ein gerades und rechtwinkeliges.

1002. Jedes gleichkantige Tetraeder ist dreimal so klein als das gerade und rechtwinkelige Parallelepipedum, welches zu seinen bestimmenden Kanten die drei Geraden hat, welche die Halbirungspuncte von je zwei Gegenkanten verbinden.

Anleitung zum Bew. Weil das um das Tetraeder beschriebene Parallelepipedum zu seinen drei bestimmenden Kanten die drei genannten Verbindenden hat, indem diese auch zugleich auf je zwei Gegenkanten senkrecht stehen.

1003. Ist ein Tetraeder gleichkantig und rechtkantig zugleich, so ist es ein regelmäßiges.

Anleit. zum Bew. Weil das ihm umschriebene Parallelepipedum ein Würfel ist.

1004. In jedem regelmäßigen Tetraeder ist das Quadrat jeder die Halbirungspunkte zweier Gegenkanten verbindenden Geraden halb so groß als das Quadrat einer Kante, und daher (A. 1002) wird der cubische Inhalt des Tetraeders, wenn man dessen Kante $= a$ setzt, durch $\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ dargestellt.

Anmerkung. Dieser Ausdruck für den Inhalt eines Tetraeders wurde schon früher (480, Zus. 2) auf anderm Wege gefunden.

1005. Der cubische Inhalt jedes beliebigen Tetraeders wird dargestellt durch den sechsten Theil des Productes, welches zwei Gegenkanten, die auf ihnen beiden zugleich senkrecht stehende Gerade und den Sinus des Winkels eben dieser Gegenkanten zu Factoren hat.

Anleit. zum Bew. Denn beschreibt man um das Tetraeder ein Parallelepipedum, so wird durch das Product aus zwei Gegenkanten des Tetraeders und dem Sinus ihres Winkels der doppelte Flächenraum derjenigen Gränzfläche des Prllpd. dargestellt, zu welcher als Grundlinie die gemeinschaftliche Senkrechte der beiden Gegenkanten die Höhe bildet.

Zus. 1. Bilden daher zwei Paare von Gegenkanten gleiche Winkel, so verhalten sich die Rechtecke aus ihnen umgekehrt wie ihre gemeinschaftlichen Senkrechten.

Zus. 2. Jedes rechtkantige Tetraeder ist der sechste Theil von dem geraden und rechtwinkeligen Parallelepipedum, welches aus einem Paare seiner Gegenkanten und ihrer gemeinschaftlichen Senkrechten construirt wird.

1006. Bezeichnen t_1 und t_2 die den Ecken A und B eines Tetraeders ABCD gegenüberliegenden Gränzflächen, (also, nach der schon früher eingeführten Bezeichnung, c_1 die Tetraederkante, welche beiden gemeinschaftlich ist, und (1,2) den von ihnen gebildeten Keil) dagegen T den cubischen Inhalt des Tetraeders, so ist:

$$T = \frac{2\,t_1 \,.\, t_2 \,.\, \sin(1,2)}{3\,c_1}$$

Anleit. zum Bew. Es sei p_1 das zu t_1 als Grundfläche gehörige Höhenperpendikel des Tetraeders, π_1 aber die zur Grundlinie c_1 gehörige Höhe in dem Dreieck t_2, so ist:

$$T = \frac{t_1 \,.\, p_1}{3} = \frac{t_1 \,.\, \pi_1 \,.\, \sin(1,2)}{3} = \frac{2\,t_1 \,.\, t_2 \,.\, \sin(1,2)}{3\,c_1}$$

Frage 1. Wie wird unser vorstehender Satz in Worten, unabhängig von einer Figur ausgesprochen, heißen?

Frage 2. An welchen bekannten Ausdruck den Flächenraum eines Dreiecks betreffend, erinnert der vorstehende Satz?

1007. Der cubische Inhalt jedes Tetraeders wird dargestellt durch den sechsten Theil des Productes, welches eine der Kanten, die beiden auf sie aus den Gegenecken gefällten Senkrechten und den Sinus des ihr anliegenden Keils zu Factoren hat.

1008. Der cubische Inhalt jedes Tetraeders wird dargestellt durch den sechsten Theil des Productes, welches folgende Factoren hat:

1. drei von derselben Ecke auslaufende Kanten;
2. die Sinusse der Winkel, welche eine Kante mit den beiden andern bildet;
3. den Sinus des an jener erstern Kante liegenden Keils;

Zus. Also nach der vorher eingeführten Bezeichnung ist:

$$\begin{aligned} 6\,T &= abc_1 \,.\, \sin(a,b) \,.\, \sin(a,c_1) \,.\, \sin(1,4) \\ &= abc_1 \,.\, \sin(a,b) \,.\, \sin(b,c_1) \,.\, \sin(2,4) \\ &= abc_1 \,.\, \sin(a,c_1) \,.\, \sin(b,c_1) \,.\, \sin(1,2) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

1009. Der cubische Inhalt jedes Tetraeders wird dargestellt durch den sechsten Theil des Productes, welches aus folgenden Factoren gebildet ist:

1. Drei aus derselben Ecke auslaufende Kanten;
2. Der Sinus, den zwei dieser Kanten bilden;
3. Der Sinus des Neigungswinkels, den die dritte Kante mit der durch die beiden

erstern gelegten Ebene d. h. mit der Gränzfläche bildet, zu der diese beiden andern Kanten als Seiten gehören.

Zus. Bezeichnet man also den Neigungswinkel, den die Kante a mit der Gränzfläche t_2 bildet, durch (a,2) und auf ähnliche Weise die übrigen, so ist:

$$6\,T = abc_1 \,.\, \sin(a,b) \,.\, \sin(c_1,4) = abc_1 \sin(a,c_1) \,.\, \sin(b,1)$$
$$= abc_1 \,.\, \sin(b,c_1) \,.\, \sin(a,2)$$
etc.

1010. In jedem Tetraeder verhalten sich die Sinusse von drei in derselben Ecke zusammenlaufenden Kantenwinkeln, wie die Sinusse der ihnen gegenüberliegenden in eben diese Ecke auslaufenden Keile. Also:

$$\sin(a,b) : \sin(a,c_1) : \sin(b,c_1) = \sin(1,2) : \sin(2,4) : \sin(1,4)$$
etc.

1011. In jedem Tetraeder verhalten sich die Sinusse zweier in dieselbe Ecke auslaufenden Kantenwinkel umgekehrt wie die Sinusse der Neigungswinkel, die ihre Ebenen mit der dritten Kante dieser Ecke bilden.

1012. Zieht man in einem beliebigen Tetraeder ABCD von den Ecken nach den Gegenflächen vier Gerade AA′, BB′, CC′, und DD′ so, daß sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct O haben, so ist immer

$$\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} + \frac{OD_1}{DD_1} = 1 \text{ und}$$
$$\frac{OA}{A_1A} + \frac{OB}{B_1B} + \frac{OC}{C_1C} + \frac{OD}{D_1D} = 3$$

465., Zus. 5.

Frage: Welche Lage muß der gemeinschaftliche Durchschnittspunct unserer vier Geraden haben, damit

$$\frac{OA_1}{AA_1} = \frac{OB_1}{BB_1} = \frac{OC_1}{CC_1} = \frac{OD_1}{DD_1} = \tfrac{1}{4} \text{ und}$$
$$\frac{OA}{A_1A} = \frac{OB}{B_1B} = \frac{OC}{C_1C} = \frac{OD}{D_1D} = \tfrac{3}{4} \text{ sei?}$$

1013. Wenn man von den Ecken A, B, C, D eines Tetraeders nach den Gegenflächen vier Gerade AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 so zieht, daß sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct O haben, und mit jeder von ihnen eine Parallele durch den Schwerpunct derjenigen Gränzfläche, nach welcher sie gezogen ist, so schneiden auch diese vier Geraden sich stets in einem einzigen Puncte; beide Durchschnittspuncte liegen mit dem Schwerpuncte des Tetraeders in gerader Linie und zwar der erstere dreimal so weit von ihm entfernt als der letztere.

Anleit. zum Bew. Die Schwerpuncte der den Ecken A, B, C, D gegenüberliegenden Gränzflächen seien respective S_1, S_2, S_3, S_4, der Schwerpunct des Tetraeders aber S. Je zwei der von den Schwerpuncten der Gränzflächen auslaufenden Geraden müssen sich schneiden, weil sie in derselben Ebene liegen und einzeln parallel sind mit zwei sich schneidenden Geraden; gesetzt es sei der Punct O_1, in dem sich die von S_1 und S_2 aus gezogenen Geraden schneiden; alsdann ist Dreieck $S_1S_2O_1$ ähnlich dem Dreieck ABO und zwar so, daß jede Seite des erstern dreimal so klein als die entsprechende des letztern ist (A. 948). Zieht man jetzt AS_1, so wird diese von OO_1 als mit ihr in derselben Ebene liegend geschnitten, und zwar so, daß der obere Abschnitt d r e i m a l so groß als der untere ist, weil $AO = 3\,S_1O_1$ ist; dieser Durchschnittspunct von AS_1 und OO_1 ist mithin der Schwerpunct des Tetraeders (A. 946, Zus. 2) ꝛc.

Anmerkung. Hiernach ist das zu berichtigen, was in den Annal. de Mathem. Tom. VII, p. 172 irrig in Beziehung auf unsern Satz behauptet wird.

Frage: Welche unter den früher angeführten besondern Eigenschaften des rechtkantigen Tetraeders ist es, die man als einen besondern Fall des vorstehenden allgemeinern Satzes betrachten muß?

1014. Umkehrung des vorigen Satzes.

1015. Wenn man auf zwei Kanten eines Tetraeders, die nicht Gegenkanten sind, z. B. auf b und c_1, von ihren nicht gemeinschaftlichen Endpuncten also hier von A_1 und D aus, zwei Stücke AK und DL so abschneidet, daß AK = mb und DL = nc_1 und auf ihren Gegenkanten, also auf b_1 und c von eben jenen Ecken aus zwei andere

Stücke DM und AN so, daß DM = $(1 - m)b_1$ und AN = $(1 - n)c$, so haben die Geraden KL und MN stets eine solche Lage gegen die Kante DA, daß sie beide entweder mit ihr parallel sind, oder sie in demselben Puncte schneiden.

Beweis. Parallel sind, wie man leicht sieht, die genannten drei Geraden zu zwei und zwei, wenn $m = n$. Findet kein Parallelismus Statt, so möge die verlängerte DA geschnitten werden von NM (verlängert) in Z, von KL in Z'; alsdann folgt unmittelbar aus unserm frühern Satz X. 355, daß:

$$ZA : ZD = m \,.\, (1 - n) : n\,(1 - m) = Z'A : Z'D, \text{ also auch}$$
$$ZA : Z'A = DA : DA$$

mithin fallen die beiden Puncte Z und Z' zusammen.

Frage: In wiefern kann man diesen Satz als eine Erweiterung des frühern X. 356 betrachten?

Zus. 1. Daher liegen die vier Puncte KNLM stets in derselben Ebene; und mithin schneiden sich auch stets die beiden Geraden KM und LN, welche die Theilpuncte je zweier Gegenkanten verbinden.

Zus. 2. In diesem Durchschnittspuncte wird jede dieser beiden Geraden KM und LN nach demselben Verhältniß getheilt wie die beiden Gegenkanten, die sie nicht verbindet; also, wenn O dieser Durchschnittspunct, NO = m . ND und MO = n . MK.

Anleitung zum Bew. Durch ein Paar unserer Gegenkanten und durch die Gerade, welche das andere Paar verbindet, lassen sich, wie leicht zu sehen, stets drei parallele Ebenen legen, von denen nach S. 427 die mittlere alle zwischen den beiden äußern gezogenen Geraden nach demselben Verhältniß theilt, rc.

Anmerkung. Einen andern Beweis unseres Satzes giebt Legendre, in den Elem. de geom. V, 18.

Frage: Welcher frühere Satz dieses Anhanges kann als ein besonderer Fall des vorstehenden allgemeinern betrachtet werden?

Zus. 3. Nimmt man $m = n$, so wird das Viereck KNLM ein Paralleltrapez.

Frage: Wie wird man die beiden parallelen Seiten, unabhängig von einer Figur, mit Worten bezeichnen?

1016. Schneidet man auf zwei Gegenkanten eines Tetraeders von denjenigen ihrer Endpuncte aus, mit welchen sie an derselben dritten Kante anliegen, successive Stücke ab, welche den $m$ten, m^{I}ten, m^{II}ten u. s. w. Theil der eignen Länge dieser Kanten ausmachen, und verbindet je zwei zusammengehörige dieser Durchschnittspuncte, so liegen diejenigen Puncte dieser sämmtlichen Verbindenden, in denen sie (von der einen oder der andern der durch sie verbundenen Tetraederkanten aus gerechnet) nach demselben Verhältniß getheilt werden, in gerader Linie.

Anleitung zum Bew. Auf derjenigen nämlich, welche die beiden Puncte verbindet, durch welche zwei andere Gegenkanten nach demselben Verhältnisse wie die Verbindenden getheilt werden.

1017. Theilt man von zwei Gegenkanten eines beliebigen Tetraeders jede in m gleiche Theile und von zwei andern Gegenkanten jede in n gleiche Theile und verbindet je zwei sich entsprechende Theilpuncte des einen und andern Paares, so schneidet jede Verbindende der einen Reihe sämmtliche Verbindende der andern Reihe und wird in diesen Durchschnittspuncten in lauter gleiche Theile getheilt.

Zus. Also wird jede der m Geraden, welche die eine Reihe der Verbindenden bilden, in n gleiche Theile und jede der n Verbindenden der andern Reihe in m gleiche Theile getheilt.

Anmerkung. Entsprechende Puncte sind für jedes Kantenpaar die ersten, die zweiten, die dritten u. s. w. von der einen oder andern der beiden Kanten aus gerechnet, welche das zweite getheilte Gegenkantenpaar bilden.

1018. Wenn man jede von vier solchen Tetraederkanten, welche zwei Gegenkantenpaare bilden, in n gleiche Theile theilt, und je zwei entsprechende (von der einen des dritten ungetheilten Kantenpaares aus gerechnet) Theilpuncte des einen und andern Paares verbindet, so schneiden sich je zwei zusammengehörige Verbindende, und ihre Durchschnittspuncte liegen sämmtlich in gerader Linie.

Zus. 1. Jedes Paar unserer Geraden halbirt sich in seinem Durchschnittspunct gegenseitig.

Zus. 2. Die Vierecke, deren Gegenecken sie verbinden, sind also Parallelogramme, wie man sich auch auf anderm Wege leicht überzeugen kann.

1019. Erklärung. Ein Parallelepipedum heißt in ein Tetraeder beschrieben, wenn eine seiner Gränzflächen mit einer der Gränzflächen des letztern in derselben Ebene

liegt, — beide Flächen mögen die Grundflächen der zugehörigen Polyeder sein — wenn ferner eine von den der Grundfläche des Parallelepipedums gegenüberliegenden Kanten in der Ebene einer der Seitenflächen des Tetraeders, und die Endpuncte ihrer Gegenkante einzeln auf den beiden andern Seitenflächen oder ihren Erweiterungen liegen.

Anmerkung 1. Ist es daher überhaupt möglich (s. den folgenden Lehrsatz) einen Würfel in ein Tetraeder zu beschreiben, so ist die Anzahl der verschiedenen Würfel, die sämmtlich dieser Bedingung Genüge leisten, im Allgemeinen nicht geringer als vier und zwanzig. Auf jeder der Gränzflächen des Tetraeders nämlich lassen sich sechs verschiedene Würfel construiren, je nachdem sie nämlich mit dem Tetraeder auf einerlei Seite dieser Gränzfläche liegen oder auf verschiedenen, und in dem einen wie in dem andern Falle mit einer der Gegenkanten der Grundfläche in der einen, andern oder dritten Seitenfläche des Tetraeders liegen.

Anmerkung 2. Nicht bei jedem Tetraeder lassen sich alle, nach der vorigen Anmerkung überhaupt möglichen Würfel, auch wirklich construiren. Der Sorgfalt und dem Nachdenken des Anfängers bleibt es überlassen, durch Hülfe dessen, was in dem folgenden Lehrsatze über die Construction eines Würfels in ein Tetraeder mitgetheilt wird, das Nähere in dieser Beziehung selbst zu erforschen.

1020. Beschreibt man in eine der Gränzflächen eines Tetraeders ein Quadrat, und über demselben als Grundfläche, abwärts (d. h. auf der entgegengesetzten Seite von der, auf welcher das Tetraeder liegt) einen Würfel und verbindet die der genannten Tetraedergränzfläche gegenüberliegende Ecke mit den vier der Grundfläche gegenüberliegenden Ecken des Würfels, so bilden die Durchschnittspuncte dieser Verbindenden mit der mehrerwähnten Gränzfläche des Tetraeders, die vier Ecken desjenigen Quadrates, welches die Grundfläche eines Würfels ist, der sich dem Tetraeder einbeschreiben läßt.

Anleit. zum Bew. Verbindet man nicht nur die genannten Durchschnittspuncte unter einander, sondern errichtet auch in ihnen Senkrechte auf der Grundfläche und verlängert dieselben bis zum Durchschnitt mit den Seitenflächen des Tetraeders oder deren Erweiterungen, so läßt sich aus der Aehnlichkeit der entstandenen Dreiecke sehr leicht die Richtigkeit unserer Behauptung darthun.

Anmerkung. So wie wir diejenige Gränzfläche des Tetraeders, auf welcher der in dasselbe beschriebene Würfel errichtet ist, der Kürze halber die Grundfläche genannt haben, so mag auch diejenige Seite dieser Gränzfläche, auf welcher das in die Grundfläche beschriebene Quadrat steht, Grundlinie heißen.

1021. Bezeichnet x die Kantenlänge eines Würfels, welcher einem Tetraeder so einbeschrieben ist, daß er von diesem wirklich umschlossen wird, a die Grundlinie (Anmerk. zum vor. S.), h die Höhe der Grundfläche, und endlich H die zu dieser letztern gehörige Tetraederhöhe, so ist:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h} + \frac{1}{H}$$

Zus. 1. Ist daher eine der Gränzflächen eines Tetraeders rechtwinkelig, so sind von den drei in dasselbe beschriebenen und von ihm wirklich umschlossenen Würfeln, welche auf dieser Gränzfläche stehen, zwei von gleichem cubischen Inhalt.

Zus. 2. Hat eine der Ecken eines Tetraeders zu ihrem Maaß einen sphärischen Octanten, so sind von den zwölf in dasselbe beschriebenen und von diesem wirklich umschlossenen Würfeln sechs unter einander inhaltsgleich.

Frage: Wie lassen sich diese sechs inhaltsgleichen Würfel in Worten bezeichnen, so daß man sie von den sechs übrigen unterscheiden kann?

1022. Wenn man von einer Ecke D eines Tetraeders DABC aus auf den drei von ihr auslaufenden Kanten DA, DB, DC respective die Stücke DE, DF, DG so abschneidet, daß die Vierecke AEFB, BFGC und CGEA nicht nur unter einander, sondern auch der der Ecke D gegenüberliegenden Gränzfläche ABC gleichflächig sind, so ist die durch die drei Puncte E, F, G gelegte Ebene in ihrer unbegränzten Erweiterung der geometrische Ort aller derjenigen Puncte, für welche die algebraische Summe ihrer Entfernungen von den Gränzflächen des Tetraeders eine constante Größe ist.

Anleit. zum Bew. Bezeichnet man den Inhalt des Tetraederstumpfes ABCGEF durch T, den Flächenraum des Dreiecks ABC durch $\triangle$, und nimmt in unserer durch E, F, G gelegten Ebene einen beliebigen Punct, so läßt sich leicht zeigen, daß die algebraische Summe seiner Entfernungen von den vier Gränzflächen des Tetraeders $= \frac{T}{\triangle}$ also eine constante Größe ist.

Anmerkung 1. Mit Recht kann man die Frage aufwerfen, wie findet man die Puncte E, F, G, oder, was dasselbe ist, die Längen DE, DF, DG? Man bezeichne diese letztern respective durch x, y, z, die Flächen der Dreiecke DBC, DAC, DAB, CAB durch α, β, γ, δ, so ist:

1032. Bezeichnen p^I, p^{II}, p^{III}, p^{IV} die Höhen eines Tetraeders, welche respective zu den Grundflächen t^I, t^{II}, t^{III}, t^{IV} gehören, so ist für jedes Tetraeder

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{p^I} + \frac{2}{p^{II}} + \frac{2}{p^{III}} + \frac{2}{p^{IV}} = \frac{1}{r^I} + \frac{1}{r^{II}} + \frac{1}{r^{III}} + \frac{1}{r^{IV}}$$

1033. Sind in einem Tetraeder je zwei Gegenkanten von gleicher Größe, so ist jede der vier äußern Berührungskugeln achtmal so groß als die innere.

1034. In jedem rechteckigen d. h. mit einer Ecke, die zu ihrem Maaß einen sphärischen Octanten hat, versehenen Tetraeder, ist die Summe der reciproken Werthe vom Durchmesser der innern Berührungskugel und derjenigen äußern, welche die der rechten Ecke gegenüberliegende Seitenfläche von außen berührt, so groß als die Summe der reciproken Werthe von den die rechte Ecke bildenden Kanten, also, wenn z. B. A die rechte Ecke, $\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r^I} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a_I}$

1035. In jedem rechteckigen Tetraeder ist die Summe der reciproken Werthe von den Halbmessern derjenigen drei äußern Berührungskugeln, welche die drei auf einander senkrechten Seitenflächen an ihren Außenseiten berühren, größer als die Summe der reciproken Werthe der drei die rechte Ecke bildenden Kanten und zwar um das Dreifache des reciproken Werthes von dem aus der rechten Ecke gefällten Höhenperpendikel des Tetraeders.

1036. Legt man durch eine Kante eines Tetraeders eine Ebene so, daß sie den zu derselben gehörigen Keil halbirt, so theilt diese Ebene sowohl die Gegenkante als auch jede der Gegenflächen in zwei Stücke, die sich verhalten, wie die ihnen anliegenden den halbirten Keil einschließenden Gränzflächen.

Zus. Sind daher zwei Gränzflächen eines Tetraeders von gleichem Inhalt, so halbirt die Ebene, welche den von ihnen eingeschlossenen Keil halbirt, zugleich auch beide Gegenflächen und die Gegenkante desselben.

1037. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

1038. Wenn in einem Tetraeder zwei Gränzflächen gleichschenkelig sind und zwar so, daß die gemeinschaftliche Seite in beiden die Grundlinie, so wird diese letztere stets rechtwinkelig geschnitten und halbirt von derjenigen Ebene, welche den an ihrer Gegenkante liegenden Keil in zwei gleiche Theile theilt.

Anmerkung 1. Man hätte unsern Satz auch so aussprechen können: Sind zwei Gränzflächen eines Tetraeders congruent, und zwar so, daß die entsprechenden Seiten nicht Gegenkanten des Tetraeders bilden, so schneidet die Ebene, welche den von ihnen gebildeten Keil halbirt, dessen Gegenkante unter rechten Winkeln und im Halbirungspuncte.

Anmerkung 2. Bilden die entsprechenden Seiten der congruenten Gränzflächen Gegenkanten des Tetraeders, so geht die den Keil halbirende Ebene zwar durch den Halbirungspunct der Gegenkante, steht aber nicht nothwendig auf dieser senkrecht.

Frage: An welche bekannte Eigenschaft des Dreiecks erinnert der vorstehende Satz?

1039. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

1040. Die Gerade, welche von der Ecke eines Tetraeders aus so gezogen wird, daß sie gleiche Neigung gegen die an dieser Ecke anliegenden Seitenflächen hat, (A. 1026) trifft die Gegenfläche dieser Ecke in einem Puncte, von welchem aus durch Gerade, die man nach den Ecken dieser Fläche zieht, dieselbe in drei Dreiecke getheilt wird, deren Flächenräume sich zu einander verhalten, wie die an sie angränzenden Seitenflächen des Tetraeders; also, wenn z. B. die in Rede stehende Gerade, von der Ecke A aus nach der Gegenfläche DBC gezogen, dieser letztern im Puncte E begegnet, so ist, behaupte ich:

$$\triangle EBC : \triangle ECD : \triangle EDB = \triangle ABC : \triangle ACD : \triangle ADB.$$

A. 1036 — 201.

Anmerkung. Andere Beweise, als den hier angedeuteten, findet man in Annal. de Math. III, p. 317 sqq.

1041. Werden die an zwei Gegenkanten liegenden Außenkeile eines Tetraeders halbirt und die halbirenden Ebenen bis dahin erweitert, daß sie, wenn es möglich ist, sich schneiden, so ist dieser Durchschnitt der geometrische Ort aller derjenigen Puncte, für welche die algebraische Summe der Entfernungen von den Gränzflächen des Tetraeders gleich Null ist.

Anmerkung. Nicht immer und nothwendig schneiden sich zwei Ebenen, welche zwei sich gegenüberliegende Außenkeile eines Tetraeders halbiren, sondern sie laufen z. B. dann, wenn je zwei Gegenkanten gleich sind, parallel.

1042. Werden je zwei sich gegenüberliegende d. h. an zwei Gegenkanten liegende Außenkeile eines Tetraeders halbirt und jedes Paar der halbirenden Ebenen bis zum Durchschnitt, wenn er möglich ist, verlängert, so liegen diese drei Durchschnittslinien in derselben Ebene, in derjenigen nämlich, welche der geometrische Ort aller derjenigen Puncte ist, für welche die algebraische Summe ihrer Entfernungen von den Gränzflächen des Tetraeders gleich Null ist.

A. 1023 nebst Zus.

1043. Lehnsatz. Werden in einem Dreieck aus den Spitzen nach den Gegenseiten gerade Linien so gezogen, daß sie einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben und jede in demselben in zwei solche Segmente getheilt wird, daß das aus ihnen gebildete Rechteck für alle drei Linien dieselbe Größe hat, so sind jene drei Geraden die Höhenperpendikel des Dreiecks.

Indirecter Beweis.

1044. In jedem rechteckigen Tetraeder ist der Fußpunct des Höhenperpendikels, das aus dem Scheitel der rechten Ecke auf die Gegenfläche gefällt wird, der Höhendurchschnitt dieser Gegenfläche.

Anleit. zum Bew. Man lege durch das Perpendikel und je eine der drei auf einander senkrechten Tetraederkanten Ebenen und zeige durch Hülfe des vorhergehenden Lehnsatzes, daß die Durchschnitte derselben mit der der rechten Ecke gegenüberliegenden Gränzfläche deren Höhenperpendikel sind.

1045. Legt man durch einen beliebigen Punct N einer Tetraederkante BD (Fig. 153) zwei Ebenen NEF und NGH, welche einzeln parallel denjenigen Seitenflächen des Tetraeders sind, die die Gegenkante von BD zur gemeinschaftlichen Seite haben, so ist immer, wenn man die beiden Tetraeder NFED und NGHB mit T′ und T″, das Urtetraeder aber mit T bezeichnet,

$$\sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''} = \sqrt[3]{T}$$

Bew. Denn es sei $NB = nb_1$, also $ND = (1-n)\,b_1$, so ist $T' = (1-n)^3\,T$, und $T'' = n^3 T$, also ꝛc.

Zus. 1. Ist $n = \frac{1}{2}$, so ist:

$$\sqrt[3]{T'} = \sqrt[3]{T''} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{T}$$

Zus. 2. Verführe man mit jedem der beiden Tetraeder T′, T″ eben so wie mit dem Urtetraeder T, so hätte man $\sqrt[3]{T_3} + \sqrt[3]{T_4} = \sqrt[3]{T'}$ und $\sqrt[3]{T_5} + \sqrt[3]{T_6} = \sqrt[3]{T''}$, also auch $\sqrt[3]{T_3} + \sqrt[3]{T_4} + \sqrt[3]{T_5} + \sqrt[3]{T_6} = \sqrt[3]{T}$

Zus. 3. Nimmt man auf einer Tetraederkante n beliebige Puncte, legt durch jeden derselben zwei Ebenen, respective parallel den beiden Seitenflächen, deren gemeinschaftlicher Durchschnitt die Gegenkante ist, so sind die $n+1$ Tetraeder T_1, T_2, T_3, ... T_{n+1}, die zu einzelnen Kanten die $n+1$ Stücke haben, in welche die Kante des Urtetraeders durch die auf ihr genommenen n Puncte zerlegt worden, so beschaffen, daß:

$$\sqrt[3]{T_1} + \sqrt[3]{T_2}\,\sqrt[3]{T_3} + \ldots\ldots + \sqrt[3]{T_{n+1}} = \sqrt[3]{T}$$

1046. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze und bezeichnet man den Inhalt des siebeneckigen Hexaeders AEFCHGN mit Q, so ist stets:

$$Q = 3\,[\sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''}]\,\sqrt[3]{T'\,.\,T''}$$

Bew. $Q = T - T' - T'' = 3\,n\,(1-n)\,T$

$$= 3\,\sqrt[3]{T}\,.\,(1-n)\,\sqrt[3]{T}\,.\,n\,\sqrt[3]{T}$$

$$= 3\,[\sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''}]\,.\,\sqrt[3]{T'\,.\,T''}\ \text{(A. 1045)}$$

Anmerkung. Ein anderer weniger einfacher Beweis unseres Satzes findet sich in den Annal. de Math. XVIII, p. 115 sqq.

1047. Legt man durch einen beliebigen Punct O auf einer Gränzfläche DBC eines beliebigen Tetraeders DABC drei Ebenen, EOFG, HOJK und LOMN, welche respective parallel sind den drei übrigen Gränzflächen, ABC, DAC, DAB, so wird durch sie das Urtetraeder in drei ihm ähnliche Tetraeder, T′, T″, T‴, drei siebeneckige Hexaeder, und in ein Parallelepipedum P zerlegt, und zwar so, daß stets:

$$P^3 = 216\,.\,T'\,.\,T''\,.\,T'''$$

ist.

Anleit. zum Bew. Es sei BH = m . BD, DE = n . BD, also (wenn $m + n > 1$) $EH = m + n - 1$, $CM = (2 - m - n)$ CD, $FM = (1 - m)$ CD ꝛc. Es ist nun aber offenbar:

$$P = DEFG + BHJK + CLMN - T' - T'' - T'''$$
$$= [n^3 + m^3 + (2 - m - n)^3 - (m + n - 1)^3 - (1 - n)^3 - (1 - m)^3] T$$
$$= 6 [- 1 + 2m + 2n - m^2 - n^2 - 3mn + m^2 n + mn^2] T$$
$$= 6 (1 - m) (1 - n) (m + n - 1) T$$
$$P^3 = 216 (1 - m)^3 T . (1 - n)^3 T . (m + n - 1)^3 T$$
$$= 216 . T' . T'' . T'''$$

1048. Legt man durch einen beliebigen Punct innerhalb eines Tetraeders vier Ebenen, respective parallel mit den vier Gränzflächen des Tetraeders, so wird das Urtetraeder durch sie in vierzehn Polyeder zerlegt, unter denen vier dem ursprünglichen ähnliche Tetraeder T′, T″, T‴, T⁗, vier Parallelepipeda P′, P″, P‴, P⁗, und sechs siebeneckige Hexaeder sind, und zwar stehen die Tetraeder und Parallelepipeda stets in einer solchen gegenseitigen Beziehung, daß

$$P' . P'' . P''' . P'''' = 1296 . T' . T'' . T''' . T''''$$

1049. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze, so ist auch stets:

$$T = (\sqrt[3]{T'} + \sqrt[3]{T''} + \sqrt[3]{T'''} + \sqrt[3]{T''''})^3$$

1050. Jede Gerade, welche eine Kugeloberfläche oder Sphäre schneidet, schneidet dieselbe in zwei Puncten, aber nie in mehrern.

Zus. 1. Bezeichnet man die Länge des auf eine solche Gerade aus dem Kugelmittelpuncte gefällten Perpendikels mit d, das zwischen den beiden Durchschnittspuncten mit der Sphäre enthaltene Stück der Geraden selbst mit l, den Kugelradius mit R, so ist:

$$R^2 = d^2 + \frac{l^2}{4}.$$

Zus. 2. Aus diesem Ausdrucke folgert man:

a) das zwischen beiden Durchschnittspuncten mit der Sphäre enthaltene Stück unserer Geraden liegt innerhalb der Kugel.
b) Die Länge des innerhalb der Sphäre liegenden Stücks unserer Geraden nimmt ab, wenn ihre Entfernung vom Kugelmittelpunct zunimmt, und umgekehrt, diese Länge nimmt zu, wenn die Gerade sich dem Mittelpuncte mehr nähert.
c) Das Maximum seiner Länge erreicht dieses innerhalb der Sphäre enthaltene Stück unserer Geraden, wenn diese durch den Mittelpunct geht; das Minimum dagegen, wenn die Gerade um die Länge des Kugelradius vom Mittelpuncte entfernt ist.
d) Jede Gerade berührt die Sphäre, von deren Mittelpuncte sie um die Länge ihres Radius sich entfernt. Keine Gerade kann daher einer Sphäre begegnen, wenn sie von deren Mittelpunct um mehr als die Länge des Radius sich entfernt.

1051. Zieht man von einem beliebigen Puncte außerhalb einer Sphäre eine beliebige Menge von geraden Linien, welche die Sphäre berühren, so sind diejenigen Segmente aller dieser Geraden, welche zwischen den Berührungspuncten und ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct enthalten sind, von gleicher Länge.

Zus. Diese sämmtlichen Berührungspuncte liegen daher in der Peripherie eines und desselben Kreises, sind also Puncte im Umfange der Grundfläche eines geraden der Kugel umschriebenen Kegels, dessen Spitze der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der Tangenten ist.

Anmerkung. Der Kürze halber soll künftig dieser Kreis den Namen Berührungskreis führen.

1052. Durch jede ganz außerhalb einer Sphäre liegende Gerade lassen sich stets zwei Ebenen legen, welche die Sphäre berühren, aber nie mehr.

1053. Die Winkel, welche zwei Gerade, die man von einem beliebigen Puncte der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie zweier eine Sphäre berührender Ebenen nach den Berührungspuncten zieht, mit der genannten Durchschnittslinie bilden, sind von gleicher Größe.

A. 1051 — 50.

1054. Durch zwei beliebige auf einer Sphäre gegebene Puncte lassen sich unendlich viele Paare solcher Tangenten ziehen, von denen jedes Paar in derselben Ebene liegt.

Zus. Je zwei zusammengehörige von diesen Tangenten sind daher entweder parallel, oder müssen bei hinreichender Verlängerung sich schneiden.

1055. Erklärung. Conjugirte oder zusammengehörige Pole einer Kugel nennt man jedes Paar conjugirter Pole eines Hauptkreises dieser Kugel (A. 562, Anm.)

Anmerkung. Jedes Paar solcher Pole gehört nicht blos einem, sondern unzählig vielen Hauptkreisen der Kugel zugleich an — allen denen nämlich, welche den Kugeldurchmesser, auf dem die Pole liegen, zur gemeinschaftlichen Durchschnittslinie haben.

Zus. 1. Jeder Pol einer Kugel hat nie mehr als einen ihm zugeordneten Pol.

Zus. 2. Durch einen von zwei zugeordneten Polen ist auch zugleich der andere bestimmt.

Anmerkung. Der nöthigen Kürze halber soll künftig, wenn von zwei zugeordneten Polen die Rede ist, der durch beide hindurchgehende Kugeldurchmesser der Polardurchmesser heißen.

Zus. 3. Die Spitze des einer Kugel umschriebenen Kegels und der Mittelpunct des Berührungskreises (A. 1051, Anm.) sind zugeordnete Pole.

1056. Erklärung. Polarebene einer Kugel heißt jede durch einen von zwei zugeordneten Polen so gelegte Ebene, daß sie senkrecht auf dem Polardurchmesser (A. 1055, Anm.) steht, und zwar heißt sie die zu dem andern Pol zugehörige Polarebene, so wie umgekehrt dieser der zu ihr gehörige, oder ihr zugeordnete Pol.

Zus. 1. Jede Ebene hat als Polarebene einer Kugel nur einen Pol, und umgekehrt gehört zu einem bestimmten Pol nie mehr als eine Polarebene.

Zus. 2. Ist eine Kugel und eine Ebene gegeben, so ist es jederzeit möglich und leicht, den zu der letztern als Polarebene zugehörigen Pol zu finden, und umgekehrt.

Zus. 3. Die Spitze jedes einer Kugel umschriebenen Kegels bildet den zu der Ebene des Berührungskreises als Polarebene zugehörigen Pol, und umgekehrt.

1057. Erklärung. Conjugirte Polaren einer Kugel heißen zwei solche Gerade, welche durch zwei zugeordnete Pole so gezogen sind, daß beide sowohl unter sich, als auch mit dem Polardurchmesser (A. 1055, Anm.) rechte Winkel bilden.

Zus. 1. Jede Gerade hat als Polare einer Kugel nie mehr als eine ihr zugeordnete Polare.

Zus. 2. Ist eine Kugel und eine Gerade gegeben, so ist es immer möglich und leicht, die der letztern zugeordnete Polare zu finden.

Zus. 3. Zwei Gerade, welche die Sphäre in demselben Puncte berühren und auf einander senkrecht stehen, bilden zwei zugeordnete Polaren.

Zus. 4. Zieht man in dem Berührungskreise eines der Kugel umschriebenen Kegels zwei senkrecht auf einanderstehende Durchmesser und mit ihnen zwei Parallelen durch die Spitze des Kegels, so bilden diese vier Geraden zwei Paare zugeordneter Polaren.

Frage: Gehört zu einem Kugeldurchmesser auch eine zugeordnete Polare?

1058. Die Kante jedes einer Kugel umschriebenen d. h. mit seinen beiden Ebenen die Sphäre berührenden Flächenwinkels und die die beiden Berührungspuncte verbindende Kugelsehne bilden zugeordnete Polaren.

Anleit. zum Bew. Lege durch den Kugelmittelpunct und die beiden Berührungspuncte eine Ebene; sie steht senkrecht auf den beiden berührenden Ebenen, mithin auch auf der Kante des Flächenwinkels; diese Kante bildet also mit der Berührungssehne rechte Winkel und beide gehen durch zugeordnete Pole (A. 567) rc.

1059. Liegen die Kanten von mehreren einer Kugel umschriebenen Flächenwinkeln oder Keilen in derselben Ebene, so haben die je zwei zusammengehörige Berührungspuncte verbindenden Kugelsehnen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Anleit. zum Bew. Legt man durch den Kugelmittelpunct und je zwei zusammengehörige Berührungspuncte Ebenen, so steht jede derselben auf der Kante des entsprechenden Flächenwinkels, und mithin auch auf jeder durch diese Kante gelegten Ebene senkrecht; es stehen mithin auch die Durchschnittslinien von je zwei unserer Ebenen auf der einzigen, alle Kanten der Flächenwinkel enthaltenden, Ebene senkrecht, was offenbar, da diese Durchschnittslinien nie parallel sein können, nur unter der Bedingung möglich ist, daß sie alle in eine einzige Gerade zusammen fallen rc.

1060. Umkehrung des vorigen Satzes.

1061. Die Durchschnittslinie zweier Polarebenen einer Kugel und die ihre Pole verbindende Gerade bilden zugeordnete Polaren.

Anleit. zum Bew. Die durch die beiden Polardurchmesser gelegte Ebene, in welcher sich die die genannten Pole verbindende Gerade befindet, steht senkrecht auf der Durchschnittslinie der Polarebenen; der Punct, in welchem dieser Durchschnitt erfolgt, ist

der Pol, zu welchem die die Pole der Polarebenen verbindende Gerade als Polare gehört (A. 564) 2c.

1062. Die Gerade, welche die Spitzen zweier einer Kugel umschriebenen Kegel verbindet und die Durchschnittslinie der Ebenen der Berührungskreise dieser Kegel bilden zwei zugeordnete Polaren.

Frage: Wie verhält es sich mit unserm Satze dann, wenn die Ebenen der Berührungskreise parallel sind?

1063. Liegen die Spitzen mehrerer einer Kugel umschriebener Kegel auf einer geraden Linie, so haben die Ebenen ihrer Berührungskreise eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

1064. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

1065. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunct dreier Polarebenen einer Kugel ist der Pol, welcher der durch die drei Pole dieser Ebenen gelegten vierten Ebene als seiner Polarebene zugehört.

Anleit. zum Bew. Es seien die drei Polarebenen E_1, E_2, E_3, ihre respectiven Pole P_1, P_2, P_3; dem frühern Satze A. 1051 zufolge hat jede durch P_1 und P_2 gehende Polarebene ihren Pol auf der Durchschnittslinie von E_1 und E_2; eben so hat jede durch P_1 und P_3 gelegte Polarebene ihren Pol auf dem Durchschnitt von E_1 und E_3 2c. Die durch alle drei Pole gehende und durch sie bestimmte Polarebene muß also ihren Pol auf jedem jener drei Durchschnitte, mithin in deren gemeinschaftlichem Durchschnittspuncte haben.

Frage: Welcher Eigenschaft des Kreises entspricht die im vorstehenden Satze ausgesprochene Eigenschaft der Kugel?

1066. Wenn von mehrern einer Kugel umschriebenen Kegeln die Spitzen aller in derselben Ebene liegen, so haben die Ebenen sämmtlicher Berührungskreise einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

1067. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

1068. Erklärung. Aehnlichkeitspuncte zweier ganz außerhalb einander liegender Kugeln sind die gemeinschaftlichen Aehnlichkeitspuncte (A. 576) aller derjenigen Kreispaare, welche die Durchschnitte beider Kugeln mit einer durch ihre Mittelpuncte gehenden Ebene bilden. Wie bei Kreisen unterscheidet man auch bei Kugeln zwischen einem äußern und innern Aehnlichkeitspuncte.

Zus. Diese Aehnlichkeitspuncte sind nichts anders, als die Spitzen zweier Kegel, von denen jeder beiden Kugeln zugleich umschrieben ist. Nach dem Aehnlichkeitspuncte selbst, welcher die Spitze des Kegels bildet, soll dieser äußerer oder innerer umschriebener Kegel heißen.

1069. Erklärung. Ein Flächenwinkel heißt ein zwei Kugeln umschriebener, wenn jede seiner beiden Ebenen beide Kugelflächen berührt. Wie bei ebenen Winkeln und Kreisen, so ist auch bei Flächenwinkeln und Kugeln eine zweifache Art dieses Umschreibens möglich; entweder nämlich liegen beide Berührungspuncte jeder Ebene auf derselben Seite der Kugelaxe d. h. der die Mittelpuncte beider Kugeln verbindenden Geraden, oder auf verschiedenen Seiten derselben. Im erstern Falle soll der Flächenwinkel den Namen eines äußern umschriebenen; im zweiten Falle den eines innern umschriebenen führen.

Zus. 1. Man kann jeden solchen Flächenwinkel offenbar auch als demjenigen Kegel umschrieben betrachten, der beiden Kugeln umschrieben ist; wobei natürlich ein äußerer Flächenwinkel und ein äußerer Kegel, so wie ein innerer Flächenwinkel und innerer Kegel zusammengehören.

Zus. 2. Die Kante jedes zwei Kugeln umschriebenen Flächenwinkels geht durch die Spitze des gleichnamigen eben diesen Kugeln umschriebenen Kegels.

Zus. 3. Die Kante jedes zwei Kugeln umschriebenen Flächenwinkels liegt mit der Axe dieser Kugeln in einerlei Ebene.

Zus. 4. Die durch die Kante des Flächenwinkels und die Kugelaxe gelegte Ebene halbirt den erstern.

1070. Wenn von drei Kugeln jede ganz außerhalb der beiden andern liegt, so haben die Aehnlichkeitspuncte, die zu je zweien derselben gehören, stets eine solche gegenseitige Lage, daß sowohl die drei äußern unter sich, als auch jeder von ihnen mit zwei innern in gerader Linie liegen.

Anleit. zum Bew. Aus der Erklärung der Aehnlichkeitspuncte in Verbindung mit A. 577.

Anmerkung. Der nöthigen Kürze halber sollen diese vier Geraden künftig den Namen Aehnlichkeitsaxen führen und zwar soll äußere Axe diejenige heißen, welche durch die äußern Aehnlichkeitspuncte geht; innere jede der drei übrigen.

1071. Sind drei Kugeln gegeben, von denen jede ganz außerhalb der beiden andern liegt, so lassen sich stets vier Flächenwinkel construiren, von denen jeder allen drei Kugeln umschrieben ist, und zwar liegen bei einem derselben alle drei Berührungspuncte jeder seiner Ebenen auf derselben Seite der durch die Mittelpuncte der drei Kugeln gelegten Ebene, bei den drei übrigen dagegen auf verschiedenen Seiten.

Anleit. zum Bew. Die vier Aehnlichkeitsaxen sind die Kanten der vier in Rede stehenden Flächenwinkel.

1072. Lehnsatz. Haben sechs Puncte im Raume die Eigenschaft, daß sie vier Ternionen bilden, von denen jede in gerader Linie liegt, so liegen sämmtliche Puncte in derselben Ebene.

Bew. Fünf dieser Puncte müssen dem frühern Lehrsatz 420 zufolge immer in einerlei Ebene liegen, und der sechste kann sich nicht außerhalb derselben befinden, da die Gerade, der er der Voraussetzung zufolge angehört, in der Ebene liegt.

1073. Die Aehnlichkeitspuncte von vier Kugeln, von denen jede ganz außerhalb der drei übrigen liegt, haben stets eine solche gegenseitige Lage, daß

1. die sechs äußern Aehnlichkeitspuncte, die zu je zwei Kugeln gehören, sich in derselben Ebene befinden;
2. drei solche äußere Aehnlichkeitspuncte, die in gerader Linie liegen, also zu je zwei von derselben Ternion unserer Kugeln gehören (A. 1070), in derselben Ebene liegen mit den drei innern Aehnlichkeitspuncten, welche zu denjenigen drei Kugelpaaren gehören, die die vierte Kugel mit den drei erstern bildet;
3. zwei äußere Aehnlichkeitspuncte, von denen der eine zu irgend zwei, und der andere zu den beiden übrigen der gegebenen Kugeln gehört, in einerlei Ebene liegen mit denjenigen vier innern Aehnlichkeitspuncten, von denen keiner der mit einem der beiden genannten äußern zusammengehörige ist. Es liegen demnach, wenn wir den äußern Aehnlichkeitspunct der ersten und zweiten Kugel durch $A_{1,2}$, den der ersten und dritten durch $A_{1,3}$ rc., die entsprechenden innern Aehnlichkeitspuncte aber durch $J_{1,2}$, $J_{1,3}$ rc. bezeichnen, in einerlei Ebene folgende Senionen dieser zwölf Puncte:

1.	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	$A_{3,4}$
2.	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{2,3}$	$J_{1,4}$	$J_{2,4}$	$J_{3,4}$
3.	$A_{1,2}$	$A_{1,4}$	$A_{2,4}$	$J_{1,3}$	$J_{2,3}$	$J_{3,4}$
4.	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{3,4}$	$J_{1,2}$	$J_{2,3}$	$J_{2,4}$
5.	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	$A_{3,4}$	$J_{1,2}$	$J_{1,3}$	$J_{1,4}$
6.	$A_{1,2}$	$A_{3,4}$	$J_{1,3}$	$J_{1,4}$	$J_{2,3}$	$J_{2,4}$
7.	$A_{1,3}$	$A_{2,4}$	$J_{1,2}$	$J_{1,4}$	$J_{2,3}$	$J_{3,4}$
8.	$A_{1,4}$	$A_{2,3}$	$J_{1,2}$	$J_{1,3}$	$J_{2,4}$	$J_{3,4}$

Beweis. Wird leicht hergeleitet aus dem vorhergehenden Lehnsatz in Verbindung mit A. 1070.

Anmerkung. Die acht Ebenen, von denen jede auf die so eben näher angegebene Weise sechs Aehnlichkeitspuncte von vier Kugeln enthält, sollen Aehnlichkeitsebenen genannt werden.

1074. Erklärung. Potenzebene zweier Kugeln heißt der geometrische Ort der Potenzlinien (A. 589) aller derjenigen Kreispaare, welche man als Durchschnitte der beiden Kugeln mit einer durch ihre Mittelpuncte gelegten Ebene erhält.

Zus. 1. Die Potenzebene zweier Kugeln steht auf der Axe derselben senkrecht.

Zus. 2. Die Potenzebene zweier sich berührender Kugeln ist die durch den Berührungspunct gehende gemeinschaftliche Berührungsebene.

Zus. 3. Die Potenzebene zweier sich schneidender Kugeln ist die Durchschnittsebene.

Zus. 4. Die Potenzebene zweier Kugeln, die sich weder berühren noch schneiden, von denen also die eine entweder ganz außerhalb, oder ganz innerhalb der andern liegt, findet man, indem man durch die Potenzlinie irgend eines Paares zusammengehöriger Kreise eine Ebene legt, welche senkrecht auf der Axe der Kugeln steht.

1075. Zieht man in der Potenzebene zweier Kugeln eine beliebige Gerade und beschreibt für sie als Kante um die eine sowohl als um die andere Kugel einen Flächenwinkel, so sind je vier solche Gerade, welche einen beliebigen Punct jener gemeinschaftlichen Kante mit den vier Berührungspuncten verbinden, von gleicher Länge.

1076. **Die Potenzebenen dreier Kugeln, deren Mittelpuncte nicht in gerader Linie liegen, haben stets eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.**

Zus. 1. Dieser Durchschnitt ist der geometrische Ort aller derjenigen Puncte, für welche alle Tangenten, die man von ihnen aus an die drei Kugeln zieht, einerlei Länge haben.

Zus. 2. Die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der drei Potenzebenen dreier Kugeln steht senkrecht auf der durch die Mittelpuncte dieser letztern gelegten Ebene.

Anmerkung. Dieser Durchschnitt soll künftig die Potenzlinie der drei Kugeln heißen.

1077. Beschreibt man von einem beliebigen Puncte der Durchschnittslinie der drei Potenzebenen dreier Kugeln als gemeinschaftlicher Spitze um jede der Kugeln einen Kegel, so haben, wenn man die zugehörigen Berührungskreise als die Grundflächen der Kegel betrachtet, die sämmtlichen Kegelseiten aller einerlei Länge.

1078. Die sechs Potenzebenen und mithin auch die vier Potenzlinien von vier Kugeln, von deren Mittelpuncten nie mehr als zwei auf derselben Geraden liegen, haben stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Zus. 1. Sind vier Kugeln gegeben, so läßt sich immer ein Punct von solcher Beschaffenheit finden, daß die von ihm an alle vier Kugeln gezogenen Tangenten (die Stücke derselben nämlich zwischen jenem Puncte und den Berührungspuncten) sämmtlich einerlei Länge haben.

Zus. 2. Ist eine beliebige Menge beliebiger Kugeln gegeben, deren Mittelpuncte eine solche gegenseitige Lage haben, daß nie mehr als zwei auf derselben Geraden liegen, so giebt es für jede Binion derselben eine Ebene gleicher Potenzen, für jede Ternion eine Linie gleicher Potenzen, für jede Quaternion einen Punct gleicher Potenzen; also für n Kugeln $\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$ Potenzebenen, $\frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Potenzlinien, und $\frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ Potenzpuncte.

1079. Beschreibt man um einen geraden Kegel einen beliebigen Flächenwinkel, und legt durch dessen Kante und die Axe des Kegels eine Ebene, so steht dieselbe senkrecht auf der durch die beiden Berührungslinien bestimmten Ebene und der Durchschnitt beider Ebenen halbirt den von den Berührungslinien gebildeten Winkel.

1080. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze und schneidet man den Kegel mit einer seiner Grundfläche parallelen Ebene, so bilden die beiden Puncte, in denen diese Ebene die Kante des umschriebenen Flächenwinkels und die den Winkel der Berührungslinien halbirende Gerade (s. vor. Lehrs.) schneidet, zwei zugeordnete Pole des Kreises, welchen eben diese Ebene mit der Kegelfläche bildet.

A. 567.

Frage: Wie wird es mit unserm Satze, wenn die Kante des dem Kegel umschriebenen Flächenwinkels parallel der Grundfläche des letztern ist?

1081. Wird ein gerader Kegel durch eine beliebige Anzahl seiner Grundfläche paralleler Ebenen geschnitten und für die dadurch entstandenen Kreise eine Reihe von gleichnamigen (äußern oder innern) Polen so genommen, daß sie alle auf einer durch die Spitze des Kegels gehenden Geraden liegen, so liegen auch die sämmtlichen diesen zugeordneten Pole auf einer durch eben jene Spitze gehenden Geraden.

Anmerkung. Zwei solche zusammengehörige Gerade sollen künftig conjugirte Polaren des Kegels heißen.

Zus. 1. Jede durch den Scheitel eines geraden Kegels gehende Gerade kann als eine von zwei zugeordneten Polaren betrachtet werden.

Zus. 2. Liegt die eine von zwei zugeordneten Polaren eines Kegels außerhalb desselben, so liegt die andere innerhalb und umgekehrt.

1082. Erklärung. Polarebene eines Kegels und zwar die einer von zwei zugeordneten Polaren zugehörige Polarebene heißt diejenige Ebene, welche durch die andere Polare so gelegt ist, daß sie auf der durch beide Polaren bestimmten Ebene senkrecht steht.

Zus. 1. Jede beliebige durch die Spitze eines geraden Kegels gezogene Gerade hat ihre zugehörige Polarebene, aber auch nie mehr als eine, und umgekehrt.

Zus. 2. Liegt die Polarebene außerhalb des Kegels, so liegt ihre Polare innerhalb, und umgekehrt.

Zus. 3. Die Kante des einem geraden Kegel umschriebenen Flächenwinkels und die durch die beiden Berührungslinien bestimmte Ebene bilden zusammengehörige Polare und

Polarebene. Dasselbe gilt von der Geraden, welche den Winkel der Berührungslinien halbirt und der Ebene, welche durch die Kante des Flächenwinkels so gelegt ist, daß sie senkrecht auf der durch eben jene Winkelhalbirende und die Axe des Kegels bestimmten Ebene senkrecht steht.

1083. Werden um einen geraden Kegel zwei Flächenwinkel beschrieben, so ist die Durchschnittslinie der Berührungsebenen d. h. der durch je zwei zusammengehörige Berührungskegelseiten bestimmten Ebenen die Polare der durch die Kanten dieser Winkel bestimmten Ebene.

Anleit. zum Bew. Die Gerade, welche die Durchschnittspuncte der Winkelkanten mit der Grundfläche des Kegels unter einander verbindet, bildet die Polare des Durchschnittspunctes der Grundlinien der Berührungsdreiecke; daher bildet die Durchschnittslinie der durch die Winkelkanten bestimmten Ebene mit derjenigen Ebene, welche durch die Kegelaxe und die Durchschnittslinie der Berührungsdreiecke gelegt wird, mit diesem zuletzt genannten Durchschnitt zwei conjugirte Polaren; zugleich stehen auch die beiden Ebenen senkrecht auf einander ꝛc.

Frage: Behält unser Satz auch für den Fall noch seine Richtigkeit, wenn die Grundlinien der beiden Berührungsdreiecke parallel sind?

1084. Werden einem geraden Kegel mehrere Flächenwinkel so umschrieben, daß die Ebenen sämmtlicher Berührungsdreiecke eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben, so liegen die Kanten aller dieser Winkel in einerlei Ebene.

A. 1083 — A. 1082, Zus. 1.

1085. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

Anmerkung. Die beiden letzten Sätze lassen sich auch auf den Cylinder ausdehnen, den man ja als einen Kegel betrachten kann, dessen Spitze unendlich weit entfernt von der Grundfläche ist.

1086. Erklärung. Ein Flächenwinkel heißt zwei Kegeln mit gemeinschaftlicher Spitze umschrieben, wenn jede seiner Ebenen beide Kegelflächen berührt. Wie bei Kugeln so unterscheidet man auch bei Kegeln einen äußern und einen innern umschriebenen Flächenwinkel, je nachdem die beiden Kegel auf derselben oder auf verschiedenen Seiten jeder seiner beiden Ebenen liegen.

1087. Wenn zwei Kugeln ihre Lage und Größe so ändern, daß sie fortwährend zwei Kegeln mit gemeinschaftlicher Spitze eingeschrieben sind, so liegen sowohl die äußern als die innern den Kugeln für die einzelnen Zustände ihrer gegenseitigen Lage und Größe zugehörigen Aehnlichkeitspuncte (A. 1068) in gerader Linie. Beide Gerade gehen durch die gemeinschaftliche Spitze beider Kegel und liegen mit deren Axe in einerlei Ebene.

Anleit. zum Bew. Die gemeinschaftliche Spitze S beider Kegel ist der gemeinschaftliche äußere Aehnlichkeitspunct aller sowohl dem einen als dem andern eingeschriebenen Kugeln. Bezeichnet man nun die beiden Kugeln für einen bestimmten Zustand ihrer Lage und Größe mit K, k, für einen zweiten solchen Zustand mit K_1, k_1 ꝛc., ihre respectiven äußern Aehnlichkeitspuncte mit A, A_1, ꝛc., die innern aber mit J, J_1, ꝛc., endlich die Aehnlichkeitspuncte von K und k mit a und i, so liegen in gerader Linie folgende Ternionen von Puncten:

1. a, A, S
2. i, J, S
3. a, A_1, S
4. i, J_1, S

mithin liegen die äußern Aehnlichkeitspuncte A, A_1 auf der Geraden aS und die innern auf der Geraden iS, also beide auf geraden Linien, welche durch den gemeinschaftlichen Scheitel S gehen ꝛc.

Anmerkung 1. Diese beiden Geraden sollen die äußere und innere Aehnlichkeitsaxe der beiden Kegel genannt werden.

Anmerkung 2. Liegt von den beiden Kegeln jeder ganz außerhalb des andern, so sind diese Aehnlichkeitsaxen nichts anders, als die Kanten des äußern und innern, beiden Kegeln umschriebenen, Flächenwinkels.

1088. Haben drei Kegel eine gemeinschaftliche Spitze, so liegen von den zu je zwei von ihnen gehörigen Aehnlichkeitsaxen sowohl die drei äußern, als auch jede äußere mit den beiden nicht zu ihr gehörigen innern in einerlei Ebene.

Anleit. zum Bew. Die äußern Aehnlichkeitsaxen liegen in derjenigen Ebene, welche man durch die gemeinschaftliche Kegelspitze und die gerade Linie legt, auf [redacted] die

1076. Die Potenzebenen dreier Kugeln, deren Mittelpuncte nicht in gerader Linie liegen, haben stets eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

Zus. 1. Dieser Durchschnitt ist der geometrische Ort aller derjenigen Puncte, für welche alle Tangenten, die man von ihnen aus an die drei Kugeln zieht, einerlei Länge haben.

Zus. 2. Die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der drei Potenzebenen dreier Kugeln steht senkrecht auf der durch die Mittelpuncte dieser letztern gelegten Ebene.

Anmerkung. Dieser Durchschnitt soll künftig die Potenzlinie der drei Kugeln heißen.

1077. Beschreibt man von einem beliebigen Puncte der Durchschnittslinie der drei Potenzebenen dreier Kugeln als gemeinschaftlicher Spitze um jede der Kugeln einen Kegel, so haben, wenn man die zugehörigen Berührungskreise als die Grundflächen der Kegel betrachtet, die sämmtlichen Kegelseiten aller einerlei Länge.

1078. Die sechs Potenzebenen und mithin auch die vier Potenzlinien von vier Kugeln, von deren Mittelpuncten nie mehr als zwei auf derselben Geraden liegen, haben stets einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Zus. 1. Sind vier Kugeln gegeben, so läßt sich immer ein Punct von solcher Beschaffenheit finden, daß die von ihm an alle vier Kugeln gezogenen Tangenten (die Stücke derselben nämlich zwischen jenem Puncte und den Berührungspuncten) sämmtlich einerlei Länge haben.

Zus. 2. Ist eine beliebige Menge beliebiger Kugeln gegeben, deren Mittelpuncte eine solche gegenseitige Lage haben, daß nie mehr als zwei auf derselben Geraden liegen, so giebt es für jede Binion derselben eine Ebene gleicher Potenzen, für jede Ternion eine Linie gleicher Potenzen, für jede Quaternion einen Punct gleicher Potenzen; also für n Kugeln $\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$ Potenzebenen, $\frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Potenzlinien, und $\frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ Potenzpuncte.

1079. Beschreibt man um einen geraden Kegel einen beliebigen Flächenwinkel, und legt durch dessen Kante und die Axe des Kegels eine Ebene, so steht dieselbe senkrecht auf der durch die beiden Berührungslinien bestimmten Ebene und der Durchschnitt beider Ebenen halbirt den von den Berührungslinien gebildeten Winkel.

1080. Bleibt Alles wie beim vorigen Satze und schneidet man den Kegel mit einer seiner Grundfläche parallelen Ebene, so bilden die beiden Puncte, in denen diese Ebene die Kante des umschriebenen Flächenwinkels und die den Winkel der Berührungslinien halbirende Gerade (s. vor. Lehrs.) schneidet, zwei zugeordnete Pole des Kreises, welchen eben diese Ebene mit der Kegelfläche bildet.

A. 567.

Frage: Wie wird es mit unserm Satze, wenn die Kante des dem Kegel umschriebenen Flächenwinkels parallel der Grundfläche des letztern ist?

1081. Wird ein gerader Kegel durch eine beliebige Anzahl seiner Grundfläche paralleler Ebenen geschnitten und für die dadurch entstandenen Kreise eine Reihe von gleichnamigen (äußern oder innern) Polen so genommen, daß sie alle auf einer durch die Spitze des Kegels gehenden Geraden liegen, so liegen auch die sämmtlichen diesen zugeordneten Pole auf einer durch eben jene Spitze gehenden Geraden.

Anmerkung. Zwei solche zusammengehörige Gerade sollen künftig conjugirte Polaren des Kegels heißen.

Zus. 1. Jede durch den Scheitel eines geraden Kegels gehende Gerade kann als eine von zwei zugeordneten Polaren betrachtet werden.

Zus. 2. Liegt die eine von zwei zugeordneten Polaren eines Kegels außerhalb desselben, so liegt die andere innerhalb und umgekehrt.

1082. Erklärung. Polarebene eines Kegels und zwar die einer von zwei zugeordneten Polaren zugehörige Polarebene heißt diejenige Ebene, welche durch die andere Polare so gelegt ist, daß sie auf der durch beide Polaren bestimmten Ebene senkrecht steht.

Zus. 1. Jede beliebige durch die Spitze eines geraden Kegels gezogene Gerade hat ihre zugehörige Polarebene, aber auch nie mehr als eine, und umgekehrt.

Zus. 2. Liegt die Polarebene außerhalb des Kegels, so liegt ihre Polare innerhalb, und umgekehrt.

Zus. 3. Die Kante des einem geraden Kegel umschriebenen Flächenwinkels und die durch die beiden Berührungslinien bestimmte Ebene bilden zusammengehörige Polare und

Polarebene. Dasselbe gilt von der Geraden, welche den Winkel der Berührungslinien halbirt und der Ebene, welche durch die Kante des Flächenwinkels so gelegt ist, daß sie senkrecht auf der durch eben jene Winkelhalbirende und die Axe des Kegels bestimmten Ebene senkrecht steht.

1083. Werden um einen geraden Kegel zwei Flächenwinkel beschrieben, so ist die Durchschnittslinie der Berührungsebenen d. h. der durch je zwei zusammengehörige Berührungskegelseiten bestimmten Ebenen die Polare der durch die Kanten dieser Winkel bestimmten Ebene.

Anleit. zum Bew. Die Gerade, welche die Durchschnittspuncte der Winkelkanten mit der Grundfläche des Kegels unter einander verbindet, bildet die Polare des Durchschnittspunctes der Grundlinien der Berührungsdreiecke; daher bildet die Durchschnittslinie der durch die Winkelkanten bestimmten Ebene mit derjenigen Ebene, welche durch die Kegelaxe und die Durchschnittslinie der Berührungsdreiecke gelegt wird, mit diesem zuletzt genannten Durchschnitt zwei conjugirte Polaren; zugleich stehen auch die beiden Ebenen senkrecht auf einander &c.

Frage: Behält unser Satz auch für den Fall noch seine Richtigkeit, wenn die Grundlinien der beiden Berührungsdreiecke parallel sind?

1084. Werden einem geraden Kegel mehrere Flächenwinkel so umschrieben, daß die Ebenen sämmtlicher Berührungsdreiecke eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben, so liegen die Kanten aller dieser Winkel in einerlei Ebene.

X. 1083 — X. 1082, Zus. 1.

1085. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

Anmerkung. Die beiden letzten Sätze lassen sich auch auf den Cylinder ausdehnen, den man ja als einen Kegel betrachten kann, dessen Spitze unendlich weit entfernt von der Grundfläche ist.

1086. Erklärung. Ein Flächenwinkel heißt zwei Kegeln mit gemeinschaftlicher Spitze umschrieben, wenn jede seiner Ebenen beide Kegelflächen berührt. Wie bei Kugeln so unterscheidet man auch bei Kegeln einen äußern und einen innern umschriebenen Flächenwinkel, je nachdem die beiden Kegel auf derselben oder auf verschiedenen Seiten jeder seiner beiden Ebenen liegen.

1087. Wenn zwei Kugeln ihre Lage und Größe so ändern, daß sie fortwährend zwei Kegeln mit gemeinschaftlicher Spitze eingeschrieben sind, so liegen sowohl die äußern als die innern den Kugeln für die einzelnen Zustände ihrer gegenseitigen Lage und Größe zugehörigen Aehnlichkeitspuncte (X. 1068) in gerader Linie. Beide Gerade gehen durch die gemeinschaftliche Spitze beider Kegel und liegen mit deren Axe in einerlei Ebene.

Anleit. zum Bew. Die gemeinschaftliche Spitze S beider Kegel ist der gemeinschaftliche äußere Aehnlichkeitspunct aller sowohl dem einen als dem andern eingeschriebenen Kugeln. Bezeichnet man nun die beiden Kugeln für einen bestimmten Zustand ihrer Lage und Größe mit K, k, für einen zweiten solchen Zustand mit K_1, k_1 &c., ihre respectiven äußern Aehnlichkeitspuncte mit A, A_1, &c., die innern aber mit J, J_1, &c., endlich die Aehnlichkeitspuncte von K und k mit a und i, so liegen in gerader Linie folgende Ternionen von Puncten:

1. a, A, S
2. i, J, S
3. a, A_1, S
4. i, J_1, S

mithin liegen die äußern Aehnlichkeitspuncte A, A_1 auf der Geraden aS und die innern auf der Geraden iS, also beide auf geraden Linien, welche durch den gemeinschaftlichen Scheitel S gehen &c.

Anmerkung 1. Diese beiden Geraden sollen die äußere und innere Aehnlichkeitsaxe der beiden Kegel genannt werden.

Anmerkung 2. Liegt von den beiden Kegeln jeder ganz außerhalb des andern, so sind diese Aehnlichkeitsaxen nichts anders, als die Kanten des äußern und innern, beiden Kegeln umschriebenen, Flächenwinkels.

1088. Haben drei Kegel eine gemeinschaftliche Spitze, so liegen von den zu je zwei von ihnen gehörigen Aehnlichkeitsaxen sowohl die drei äußern, als auch jede äußere mit den beiden nicht zu ihr gehörigen innern in einerlei Ebene.

Anleit. zum Bew. Die äußern Aehnlichkeitsaxen liegen in derjenigen Ebene, welche man durch die gemeinschaftliche Kegelspitze und die gerade Linie legt, auf welcher sich die

drei äußern Aehnlichkeitspuncte von drei beliebigen den drei Kegeln einbeschriebenen Kugeln befinden (A. 1070) ꝛc.

Anmerkung 1. Diese vier Ebenen, von denen jede der geometrische Ort der Aehnlichkeitsaxen dreier Kegel ist, sollen Aehnlichkeitsebenen genannt werden.

Anmerkung 2. Cylinder, deren Axen parallel sind, kann man als Kegel betrachten, deren Spitzen zusammenfallen, aber unendlich weit von den Grundflächen entfernt sind. Aehnlichkeitsaxen zweier solcher Cylinder sind daher alle diejenigen Geraden, die in der Ebene dieser Axen parallel mit ihnen so gezogen sind, daß ihre Entfernungen von den Axen sich wie die Halbmesser der Cylinder verhalten. Innere Aehnlichkeitsaxe heißt eine solche Parallele, wenn sie zwischen den Cylinderaxen liegt, äußere im entgegengesetzten Fall. Liegen beide Cylinder ganz außerhalb einander, so fallen diese Aehnlichkeitsaxen zusammen mit den Kanten der beiden Cylindern umschriebenen innern und äußern Flächenwinkel.

1089. Die drei äußern und die drei innern Aehnlichkeitsaxen dreier Cylinder mit parallelen Axen haben stets eine solche gegenseitige Lage, daß sowohl die äußern unter sich in einerlei Ebene liegen, als auch jede äußere mit den beiden nicht zu ihr gehörigen innern.

Anmerkung. Diese Ebenen sollen wie bei Kegeln den Namen Aehnlichkeitsebenen führen.

1090. Beschreibt man in zwei Kegel mit gemeinschaftlicher Spitze eine beliebige Anzahl solcher Kugelpaare, von denen jedes Paar durch seine Berührungskreise gleiche Stücke der Kegelseiten (vom Scheitel aus gerechnet) abschneidet, so sind die Axen dieser sämmtlichen Kugelpaare unter einander parallel.

Anleit. zum Bew. Die gemeinschaftliche Spitze beider Kegel sei S; die Mittelpuncte von ein Paar eingeschriebenen Kugeln der genannten Eigenschaft C, C′; ein Paar Puncte im Umfange der Berührungskreise A, A′; für jede Veränderung der Lage von C und C′ bleibt sowohl $\frac{SC}{SA}$ als auch $\frac{SC'}{SA'}$ eine constante Größe, mithin auch, da $SA = SA'$ $\frac{SC}{SC'}$ eine constante Größe, also, wenn C″, C‴ die Mittelpuncte eines zweiten Paares der in Rede stehenden Kugeln $\frac{SC}{SC'} = \frac{SC''}{SC'''}$ ꝛc.

1091. Die im vorigen Lehrsatz näher bezeichneten Kugelpaare haben stets eine gemeinschaftliche durch die Kegelspitze gehende Potenzebene.

A. 1090.

Anmerkung. Diese Ebene mag den Namen führen: Potenzebene zweier Kegel mit gemeinschaftlicher Spitze, und ihr Durchschnitt mit der Axenebene beider Kegel mag Potenzlinie dieser Kegel heißen.

Zus. Berühren sich die beiden Kegel, so ist die gemeinschaftliche Berührungsebene, und wenn sie sich schneiden, die Ebene des Durchschnitts ihre Potenzebene.

1092. Zieht man durch die gemeinschaftliche Spitze zweier Kegel in ihrer Potenzebene eine beliebige Gerade und legt durch sie Berührungsebenen an die Kegel, so sind die Winkel, welche die Berührungslinien mit jener erstern Geraden bilden, von gleicher Größe.

Anleit. zum Bew. Nimm auf der Geraden, die durch den Kegelscheitel S geht, einen beliebigen Punct A, und construire zwei Kugeln in die Kegel so, daß die von S an beide gezogenen Tangenten von gleicher Länge und zwar $= AS$; sind B und B′ die Durchschnittspuncte der Berührungskreislinien dieser Kugeln mit den Berührungslinien der Ebenen, so sind die Dreiecke SAB und SAB′ congruent ꝛc.

1093. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

1094. Die drei Potenzebenen, welche zu je zweien von drei Kegeln mit gemeinschaftlicher Spitze gehören, haben eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

A. 1093.

Anmerkung. Diese Durchschnittslinie wollen wir die Potenzlinie der drei Kegel nennen.

1095. Erklärung. Potenzlinie zweier Cylinder mit parallelen Axen ist die in der Ebene der Axen parallel mit diesen und in solchen Entfernungen von ihnen gezogene Gerade, daß der Unterschied der Quadrate dieser Entfernungen gleich ist dem Unterschied der Quadrate der Halbmesser der Cylinder. Potenzebene der Cylinder heißt diejenige durch die Potenzlinie gelegte Ebene, welche senkrecht auf der Axenebene steht.

1096. Zieht man in der Potenzebene zweier Cylinder mit parallelen Axen eine dritte mit diesen Axen parallele Gerade und legt durch sie Ebenen, welche die Cylinder berühren, so haben die Berührungslinien dieser Ebenen gleiche Entfernungen von der in der Potenzebene gezogenen Geraden.

1097. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

1098. Die Potenzebenen dreier Cylinder mit parallelen Axen haben eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

Anmerkung. Dieser Durchschnitt heißt die Potenzlinie der drei Cylinder.

1099. Erklärung. Sphärischer Mittelpunct eines auf einer Kugeloberfläche befindlichen Kreises heißt ein Punct dieser Oberfläche, wenn er von allen Puncten des Umkreises gleich weit entfernt ist; jeder diesen Mittelpunct mit einem beliebigen Puncte des Umkreises verbindende Normalkreisbogen heißt sphärischer Radius oder Halbmesser; sphärischer Durchmesser dagegen jeder durch den sphärischen Mittelpunct gehende und zwei Puncte im Umkreise verbindende Hauptkreisbogen.

Zus. 1. Der sphärische Mittelpunct eines Kugelkreises ist der Scheitel des auf der Ebene des Kreises senkrechten Kugeldurchmessers.

Zus. 2. Der sphärische Mittelpunct eines Kugelkreises fällt mit dessen Pol zusammen.

Zus. 3. Jeder Kugelkreis hat zwei sphärische Mittelpuncte, zwei sphärische Radien rc.

Anmerkung 1. Ist künftig nur von einem Mittelpuncte rc. die Rede, so ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird, immer der nähere d. h. derjenige zu verstehen, dessen zugehöriger sphärischer Radius die Größe eines Hauptquadranten nicht übersteigt.

Zus. 4. In jedem Kugelkreise sind die sphärischen Halbmesser von gleicher Länge; eben so die Durchmesser.

Zus. 5. Die sphärischen Halbmesser gleicher auf derselben Kugel befindlichen Kreise sind gleich.

Zus. 6. Jeder auf einer bestimmten, und der Größe nach bekannten Kugeloberfläche zu construirende Kugelkreis ist vollkommen bestimmt, wenn sein sphärischer Mittelpunct und Radius bestimmt sind.

Anmerkung 2. Die Construction kann durch Hülfe des gewöhnlichen Zirkels eben so ausgeführt werden, wie in der Ebene.

1100. Zwei oder mehrere sphärisch concentrische Kugelkreise sind Parallelkreise dieser Kugel.

1101. Die sphärischen Mittelpuncte aller Kugelkreise, welche zwei gemeinschaftliche Durchschnittspuncte haben, liegen in der Peripherie eines Hauptkreises der Kugel.

Zus. 1. Die Peripherie dieses Hauptkreises schneidet den die beiden Durchschnittspuncte unserer Kreise verbindenden Normalkreisbogen in Halbirungspuncte und unter rechten Winkeln.

Zus. 2. Sind die sich schneidenden Kreise sämmtlich Hauptkreise, so sind ihre Durchschnittspuncte die beiden sphärischen Mittelpuncte des Hauptkreises, auf dessen Peripherie die sphärischen Mittelpuncte der erstern liegen.

1102. Berühren sich zwei Kugelkreise, so liegen ihre sphärischen Mittelpuncte mit dem Berührungspunct auf der Peripherie desselben Hauptkreises.

Anleit. zum Bew. Indirect durch Hülfe des frühern Lehrsatzes 563.

Zus. 1. Berühren sich zwei Kugelkreise, so ist die Entfernung ihrer sphärischen Mittelpuncte d. h. der diese Mittelpuncte verbindende Normalkreisbogen gleich der algebraischen Summe ihrer sphärischen Halbmesser, und umgekehrt.

Zus. 2. Der geometrische Ort der sphärischen Mittelpuncte aller Kugelkreise, welche einen gegebenen Kugelkreis in einem gegebenen Puncte berühren, ist die Peripherie des Hauptkreises, welcher durch den sphärischen Mittelpunct des gegebenen Kreises und durch den Berührungspunct bestimmt wird.

1103. Zwei Kugelkreise schneiden sich, wenn die Entfernung ihrer sphärischen Mittelpuncte kleiner als die Summe ihrer sphärischen Halbmesser, aber größer als der Unterschied derselben ist.

1104. Zwei Kugelkreise haben gar keinen Punct mit einander gemein, wenn die Entfernung ihrer sphärischen Mittelpuncte entweder größer als die Summe ihrer sphärischen Radien, oder kleiner als deren Unterschied ist; im erstern Falle liegt jeder der beiden Kreise ganz außerhalb des andern, im letztern der eine ganz innerhalb des zweiten.

1105. Schneiden sich zwei Kugelkreise, so hat jeder der beiden Flächenwinkel, die ihre Ebenen mit einander bilden, zu seinem Maaß die halbe Summe der beiden zwischen seinen und seines Scheitelwinkels Schenkelebenen enthaltenen Bogen desjenigen Hauptkreises, welcher durch die sphärischen Mittelpuncte dieser Kreise gelegt ist.

Anleit. zum Bew. Die gemeinschaftliche Durchschnittslinie unserer beiden Kreise steht senkrecht auf der Ebene des durch ihre sphärischen Mittelpuncte gelegten Hauptkreises; daher ist jeder der ebenen Winkel, welche die Durchschnittslinien dieses Hauptkreises mit den beiden in Rede stehenden Kreisen unter einander an der gemeinschaftlichen Sehne dieser letztern bilden, das Maaß für einen der vier Flächenwinkel dieser Kreisebenen, hieraus aber und aus X. 440 leuchtet die Richtigkeit unserer Behauptung hervor.

Anmerkung. Der Kürze und Deutlichkeit halber wollen wir künftig bei jeder Ebene, die in Verbindung mit einer Kugel betrachtet wird, diejenige Seite die innere nennen, die dem Kugelmittelpuncte zugewendet ist, die entgegengesetzte aber die äußere; ist schlechthin von dem Winkel zweier Ebenen die Rede, so verstehen wir immer den, welchen die Ebenen an ihren innern Seiten bilden.

Zus. 1. Wenn unsere beiden Kreise eine solche gegenseitige Lage haben, daß ihre Ebenen über die Kugeloberfläche hinaus erweitert werden müßten, um ihren Durchschnitt zu erhalten, so hat der Flächenwinkel (s. die vorhergehende Anmerk.), welchen die beiden Kreisebenen mit einander bilden, zu seinem Maaß den halben Unterschied der zwischen den innern Seiten der Schenkelebenen enthaltenen Bogen des durch die sphärischen Mittelpuncte beider Kreise gelegten Hauptkreises.

Zus. 2. Der Flächenwinkel, welchen die Ebenen zweier beliebiger Kugelkreise an ihren innern Seiten mit einander bilden, hat zu seinem Maaß die halbe algebraische Summe der zwischen den innern Seiten der Schenkelebenen enthaltenen Bogen des durch die sphärischen Mittelpuncte dieser Kreise gehenden Hauptkreises.

Frage: Welchem bekannten planimetrischen Satze entspricht der vorstehende?

Zus. 3. Berühren sich zwei Kugelkreise, so hat der Flächenwinkel, den ihre Ebenen an ihrer innern Seite mit einander bilden, zum Maaß die Hälfte des zwischen den innern Seiten der Schenkelebenen enthaltenen Bogens von dem durch die sphärischen Mittelpuncte beider Kreise gelegten Normalkreis.

Zus. 4. Stehen zwei Kugelkreise senkrecht auf einander, so ist die Summe der zwischen den innern Seiten ihrer Ebenen enthaltenen Bogen des durch ihre sphärischen Mittelpuncte gehenden Hauptkreises gleich der Summe der von den äußern Seiten der Ebenen eingeschlossenen Bogen.

Zus. 5. Wenn zwei Kugelkreise, deren Ebenen senkrecht auf einander stehen, sich berühren, so liegen die beiden Puncte, in denen der durch ihre sphärischen Mittelpuncte gelegte Hauptkreis ihre Peripherieen schneidet, mit dem Kugelmittelpuncte in gerader Linie, oder diese Durchschnittspuncte sind zwei Gegenpuncte der Sphäre.

Zus. 6. Bezeichnet man mit ρ, ρ' die sphärischen Radien unserer Kreise, mit β aber den Bogen, um welchen die Entfernung ihrer Mittelpuncte kleiner ist als die Summe ihrer Radien, wenn sie sich schneiden, und größer, wenn sie sich auf der Sphäre nicht begegnen, und endlich den Neigungswinkel der Kreise mit ε, und die Hälfte eines Hauptumkreises mit π, so ist:

1. für zwei sich schneidende Kreise:

$$\varepsilon = \pi - \rho - \rho' + \beta = \pi - (\rho + \rho') + \beta = \frac{\pi}{2} - \rho + \frac{\pi}{2} - \rho' + \beta$$

2. für zwei sich auf der Sphäre nicht begegnende Kreise:

$$\varepsilon = \pi - \rho - \rho' - \beta = \pi - (\rho + \rho') - \beta = \frac{\pi}{2} - \rho + \frac{\pi}{2} - \rho' - \beta$$

3. für zwei sich berührende Kreise:

$$\varepsilon = \pi - \rho - \rho' = \pi - (\rho + \rho') = \frac{\pi}{2} - \rho + \frac{\pi}{2} - \rho'$$

d. h. der Neigungswinkel zweier Kugelkreise ist größer, eben so groß, oder kleiner als das Supplement der Summe ihrer sphärischen Radien, oder was dasselbe ist, als die Summe der Complemente dieser Radien, je nachdem diese Kreise auf der Sphäre sich entweder schneiden, oder berühren, oder gar nicht begegnen.

Zus. 7. Ist einer der beiden in Rede stehenden Kreise z. B. derjenige, dessen sphärischen Radius wir bisher $= \rho'$ setzten, ein Hauptkreis, so ist $\rho' = \frac{\pi}{2}$, also

1. wenn die Kreise sich schneiden:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \rho + \beta = \text{Compl. } \rho + \beta = \text{Compl. } (\rho - \beta)$$

2. wenn sie sich berühren:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \rho = \text{Compl. } \rho$$

3. wenn sie sich auf der Sphäre nicht begegnen:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \rho - \beta = \text{Compl.}\ \rho - \beta = \text{Compl.}\ (\rho + \beta)$$

Zus. 8. Sind beide Kreise Hauptkreise, so ist:

$$\varepsilon = \beta$$

1106. Die Entfernung der sphärischen Mittelpuncte zweier Kreise ist gleich dem Supplement des Neigungswinkels, den die innern Seiten ihrer Ebenen bilden.

A. 1105, Zus. 6.

1107. Der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller derjenigen Kreise, welche mit einem gegebenen Kugelkreise einen Winkel von vorgeschriebener Größe bilden, ist die Peripherie eines mit dem gegebenen sphärisch concentrischen Kreises, dessen sphärischer Radius gleich dem Supplement des vorgeschriebenen Winkels ist.

1108. Wenn in zwei sphärischen Dreiecken die Winkel des einen beziehungsweise denen des andern gleich sind, so stimmen beide Dreiecke auf ähnliche Weise auch in ihren Seiten überein, oder die Dreiecke sind gleich nach Seiten und Winkeln.

570 — 562, Zus. 1.

1109. Kein Kreis, dessen Peripherie durch die Spitzen eines sphärischen Dreiecks geht, kann ein Hauptkreis der Kugel sein.

1110. Der Umfang jedes sphärischen Dreiecks ist kleiner als der Umfang eines Hauptkreises der Kugel.

Anleit. zum Bew. Man denke sich um das Dreieck einen Kreis beschrieben und wende den Lehrsatz 514 im zwölften Buche dreimal an.

1111. In jedem sphärischen Dreieck übertrifft die Summe zweier Winkel den dritten um weniger als zwei Rechte.

1112. Jeder Außenwinkel eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden innern Gegenwinkel aber größer als deren Unterschied.

565 — A. 1111.

1113. Die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks ist größer als die Summe der beiden Normalkreisbogen, die man von einem Puncte innerhalb des Dreiecks nach den Endpuncten der dritten Seite zieht.

Beweis. Ganz ähnlich dem Beweise für den entsprechenden Satz bei geradlinigen Dreiecken.

1114. Zwei sphärische Dreiecke sind nach Seiten und Winkeln gleich, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in ihnen beziehungsweise gleich sind.

Anleit. zum Bew. Das eine ist entweder dem andern Dreieck selbst oder dessen Gegendreieck congruent, indem sie sich decken.

1115. In jedem gleichschenkeligen sphärischen Dreiecke sind die an der Grundlinie liegenden sowohl innern als äußern Winkel beziehungsweise gleich.

Anleit. zum Bew. Es sei ABC das gleichschenkelige Dreieck, und zwar AB = AC; auf den Schenkeln schneide vom gemeinschaftlichen Endpuncte A aus zwei Bogen AD, AE von beliebiger aber gleicher Länge ab, und verbinde D mit C und E mit B; alsdann sind die Dreiecke ABE und ACE nach Seiten und Winkeln gleich, und darum auch die Dreiecke BDC und BEC ꝛc.

Zus. 1. Jedes gleichseitige sphärische Dreieck ist auch gleichwinkelig.

Zus. 2. Sind in einem sphärischen Dreieck zwei Winkel von gleicher Größe, so haben auch die Gegenseiten derselben gleiche Länge.

Zus. 3. Jedes gleichwinkelige sphärische Dreieck ist auch gleichseitig.

1116. In jedem sphärischen Dreiecke stehen Seiten und Winkel in solcher gegenseitigen Abhängigkeit, daß, je nachdem die Summe zweier Seiten größer, eben so groß oder kleiner als die Hälfte eines Normalumkreises ist, auch die Summe ihrer Gegenwinkel größer, eben so groß, oder kleiner als zwei Rechte ist, und umgekehrt, also wenn π den halben Umkreis bezeichnet, so ist, jenachdem $a + b \gtreqless \pi$, auch $A + B \gtreqless 180°$, und umgekehrt.

Vorbereitung. Verlängere die Seiten b und c über ihre nicht gemeinschaftlichen Endpuncte hinaus, bis sie sich zum zweitenmal schneiden in D.

Bew. Da Dreieck BCD eines der Nebendreiecke von ABC ist, so ist D = A, CD = π — b, BD = π — c ꝛc. Gesetzt nun es sei $a + b > \pi$, so ist $a > \pi - b$, also auch a > CD, oder BC > CD, also auch D > W. DBC (564), oder A >

$\pi - B$, und darum auch $A + B > \pi$. Eben so einfach ist der Beweis für die beiden andern Fälle unseres Satzes und für dessen Umkehrung.

1117. Lehnsatz. Ist die Summe von zwei ungleichen Größen m und n kleiner als eine dritte Größe r, so ist die kleinere derselben n stets $< \frac{r}{2}$; ist dagegen $m + n > r$, so ist immer $m > \frac{r}{2}$; unbestimmt (innerhalb gewisser Gränzen) bleibt im erstern Falle die Größe von m, im zweiten die von n; in beiden Fällen aber ist so viel gewiß, daß diese unbestimmte Größe dem Werthe von $\frac{r}{2}$ näher kömmt als die andere.

1118. Lehnsatz. Umgekehrt, wenn von zwei ungleichen Größen m und n, die eine m einer dritten $\frac{r}{2}$ näher kommt als die andere n, so muß, wenn $m + n < r$ ist, n nicht nur $< m$, sondern auch $< \frac{r}{2}$ sein, dagegen ist, wenn $m + n > r$, n nicht nur $> m$, sondern auch $> \frac{r}{2}$.

1119. Wenn von zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks die eine sich in ihrer Größe weiter vom Quadranten eines Hauptkreises entfernt als die andere, so ist sie stets gleichartig mit ihrem Gegenwinkel d. h. beide sind zugleich entweder größer oder kleiner oder eben so groß als 90°.

Anleit. zum Bew. Es möge von den Seiten a und b jene sich weiter von $\frac{\pi}{2}$ entfernen, als diese; ist nun $a + b > \pi$, also auch $A + B > \pi$ (A. 1116), so ist $a > b$ (A. 1118), mithin auch $A > B$ (564), also sowohl a als auch $A > \frac{\pi}{2}$ 2c.

Zus. Dasselbe gilt von je zwei Winkeln eines sphärischen Dreiecks.

1120. In jedem sphärischen Dreiecke sind wenigstens zwei Seiten gleichartig mit ihren Gegenwinkeln, diejenigen nämlich, von denen jede sich in ihrer Größe vom Quadranten eines Hauptkreises weiter entfernt, als die dritte.

Zus. Dasselbe gilt von den Winkeln jedes sphärischen Dreiecks.

1121. In jedem rechtwinkeligen, so wie in jedem rechtseitigen (in welchem eine Seite ein Quadrant ist) sind die beiden andern Seiten gleichartig mit ihren Gegenwinkeln.

1122. In jedem sphärischen Dreiecke, in welchem entweder eine Seite ein Quadrant und die beiden anliegenden Winkel rechte, oder zwei Seiten Quadranten und der eingeschlossene Winkel ein Rechter, sind alle drei Seiten Quadranten, und alle drei Winkel rechte.

1123. Entfernen sich zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks in ihrer Länge gleich weit von der Länge eines Quadranten, so entfernen sich auch ihre Gegenwinkel in ihrer Größe gleich weit von der Größe eines Rechten, und umgekehrt.

Zus. 1. Sind zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks Quadranten, so sind ihre Gegenwinkel rechte, und umgekehrt.

Zus. 2. Sind alle drei Seiten Quadranten, so sind alle Winkel rechte, und umgekehrt.

1124. Sind in einem sphärischen Dreiecke zwei Seiten dem Quadranten eines Hauptkreises gleich nahe und zwar näher als die dritte Seite, so sind alle Seiten gleichartig mit ihren Gegenwinkeln.

1125. Wenn eine Seite eines sphärischen Dreiecks ein Quadrant und ihr Gegenwinkel ein rechter ist, so ist wenigstens noch eine der beiden andern Seiten auch ein Quadrant.

Anleit. zum Bew. Es sei $a = A = 90°$; ist nun b kein Quadrant, so nimm auf ihr oder ihrer Verlängerung einen Punct D so, daß $DA = 90°$; und verbinde D mit B. Weil D der Pol von AB, so ist $BD = 90° = BC$, also auch B der Pol von AD 2c.

1126. Wenn in einem sphärischen Dreieck der größte Winkel nicht größer als ein Rechter, so sind alle Seiten kleiner als Quadranten; wenn dagegen die kleinste Seite nicht kleiner als ein Quadrant, so sind alle Winkel stumpfe.

Anleit. zum Bew. Ist A der größte Winkel, so kömmt er einem Rechten näher

als die beiden andern, daher B gleichartig mit b und C mit c (A. 1120, Zus.), also b sowohl als c kleiner als ein Quadrant; aber auch a; denn gesetzt a oder BC könnte $> \frac{\pi}{2}$ sein, so nimm BD $= \frac{\pi}{2}$ und verlängere BA über A hinaus bis E, so daß BE $= \frac{\pi}{2}$; und verbinde D mit A und E; alsdann wäre im Dr. BDE DE gleichartig mit B, also DE $< \frac{\pi}{2}$, aber im rechtwinkeligen Dreieck AED auch DE gleichartig mit DAE, also DAE $< 90°$, mithin wäre BAD $> 90°$, und um so mehr BAC $> 90°$, was der Voraussetzung widerspricht ꝛc.

Zweiter Theil des Satzes aus dem erstern durch Hülfe des Supplementardreiecks hergeleitet.

1127. In jedem rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ist die Hypotenuse kleiner oder größer als ein Quadrant, je nachdem die beiden Catheten gleichartig oder ungleichartig sind.

Anleit. zum Bew. Ist A der rechte Winkel, und b sowohl als c $< \frac{\pi}{2}$, so ist auch B sowohl als C $< 90°$, also A der größte Winkel, also auch a $< \frac{\pi}{2}$; sind b und c $> \frac{\pi}{2}$, so wende die eben gebrauchte Schlußweise auf dasjenige Nebendreieck von ABC, welches mit ihm die Seite a gemeinschaftlich hat, ꝛc.

1128. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

1129. In jedem rechtseitigen Dreieck ist der Gegenwinkel des Quadranten ein stumpfer oder ein spitzer, je nachdem die beiden andern Seiten gleichartig oder ungleichartig sind, und umgekehrt.

1130. Sind in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten und der Gegenwinkel der dem Quadranten nähern Seite beziehungsweise gleich, so ist das eine Dreieck dem andern selbst oder dessen Gegendreieck congruent.

Anleit. zum Bew. Es sei in den Dreiecken ABC und A′B′C′ AC = A′C′, BC = B′C′, AC und A′C′ dem Quadranten näher als BC und B′C′, endlich B = B′. Folgen sich nun in unsern Dreiecken diese genannten Stücke in derselben Ordnung auf einander, so können die Dreiecke sich decken; denn legt man A′B′C′ so auf ABC, daß B′C′ genau BC fällt, so fällt auch B′A′ in die Richtung von BA; aber auch A′ auf A; denn geschähe dieß letztere nicht, könnte also A′ zwischen B und A z. B. in A″ fallen, so wäre CB gleichartig sowohl mit Winkel CA″B als mit CAB, was unmöglich ist, da, wegen der Gleichschenkeligkeit des Dr. CAA″ der eine dieser Winkel der Nebenwinkel des andern ist und sie nicht rechte sein können, da CB kein Quadrant ist ꝛc.

Zus. 1. Zwei rechtseitige Dreiecke sind entweder congruent oder symmetrisch gleich, wenn eine von den Seiten, die nicht Quadranten sind, und der Gegenwinkel des Quadranten beziehungsweise gleich sind.

Zus. 2. Zwei sphärische Dreiecke sind entweder unter einander selbst oder das eine dem Gegendreieck des andern congruent, wenn zwei Winkel und die Gegenseite desjenigen von ihnen, der der Größe eines Rechten am nächsten kömmt, beziehungsweise gleich sind.

Zus. 3. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind in allen ihren Seiten und Winkeln gleich, wenn die Hypotenuse und einer der ihr anliegenden Winkel beziehungsweise gleich sind.

Zus. 4. Zwei rechtseitige Dreiecke sind in allen ihren Seiten und Winkeln gleich, wenn zwei Winkelpaare, von denen das eine die Gegenwinkel der Quadranten bildet, beziehungsweise gleich sind. —

1131. Zwei sphärische Dreiecke sind entweder congruent oder symmetrisch gleich, wenn zwei Seiten, die in ihrer Größe gleich weit vom Quadranten sich entfernen, ohne selbst Quadranten zu sein, und ein Gegenwinkel beziehungsweise gleich sind.

Anleit. zum Bew. Es sei wie vorher AC = A′C′, BC = B′C′ und B = B′; legt man nun für den Fall, daß diese gleichen Stücke in beiden Dreiecken sich in derselben Ordnung folgen, diese Dreiecke wie beim vorigen Beweise übereinander, so muß auch jetzt A′ auf A fallen, weil aus der Annahme des Gegentheils sowohl in dem Fall, wo AC = BC = A′C′ = B′C′, als auch dann, wenn AC + BC = A′C′ + B′C′ = π nothwendig folgen würde, daß C der Pol von AB wäre, was nach der Voraussetzung unmöglich ꝛc.

Zus. 1. Zwei Dreiecke sind entweder congruent oder symmetrisch gleich, wenn zwei Winkel, die beide in ihrer Größe sich gleichweit von der Größe eines Rechten entfernen, ohne selbst Rechte zu sein, und eine Gegenseite beziehungsweise gleich sind.

Zus. 2. Zwei rechtseitige Dreiecke sind entweder congruent oder symmetrisch gleich, wenn die Gegenwinkel der Quadranten und außerdem noch ein zweites Paar von Winkeln beziehungsweise gleich sind.

1132. Sind in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten des einen beziehungsweise zwei Seiten des andern gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so hat der größere derselben auch stets die größere Gegenseite.

Beweis ganz ähnlich dem für die entsprechende Eigenschaft geradliniger Dreiecke.

1133. Umkehrung des vorigen Satzes.

1134. Sind in zwei sphärischen Dreiecken zwei Winkel des einen zwei Winkeln des andern beziehungsweise gleich, die zwischenliegenden Seiten aber ungleich, so hat die größere einen größern Gegenwinkel, als die kleinere.

1135. Umkehrung des vorigen Satzes.

1136. Wenn in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seitenpaare beziehungsweise gleich sind, der Gegenwinkel der größern und zugleich dem Quadranten nähern Seite aber in dem einen Dreieck größer als in dem andern, so ist die dritte Seite in dem erstern Dreieck kleiner als in dem andern.

Anleit. zum Bew. Es sei in den Dreiecken ABC, und A'B'C' AB = A'B', AC = A'C', aber C' > C. Lege Dreieck A'B'C' so auf ABC, daß A'C' genau auf AC fällt; alsdann fällt C'B' nothwendig jenseits CB (von A aus gerechnet). Indirect zeigt man alsdann, daß, wenn D den Durchschnitt von AB und C'B' bezeichnet, B' stets zwischen C und D fallen muß. Verbindet man endlich noch B mit B', so läßt sich durch Hülfe des gleichschenkeligen Dr. ABB' leicht zeigen, daß Winkel CB'B > W. CBB', mithin CB > C'B'.

1137. Sind in zwei sphärischen Dreiecken zwei Winkelpaare beziehungsweise gleich, die Gegenseite desjenigen dagegen, welcher der kleinere und zugleich der einem Rechten nähere ist, in dem einen Dreieck größer als in dem andern, so ist der dritte Winkel in jenem Dreieck kleiner als in diesem.

1138. Wenn in zwei sphärischen Dreiecken eine Seite und ein anliegender Winkel beziehungsweise gleich sind, das andere Paar anliegender Winkel dagegen ungleich, so hat der größere auch stets die größere Gegenseite.

Zus. 1. Umkehrung des Hauptsatzes.

Zus. 2. Ist von den beiden gleichen Winkeln jeder in seinem Dreiecke der größte und zugleich der einem Rechten nächste, so ist die andere der ihm anliegenden Seiten in demjenigen Dreieck die größere, in welchem der in Rede stehende Winkel die größere Gegenseite hat.

Beweis. Indirect.

Zus. 3. Kömmt zu den vorigen Bedingungen noch die, daß jeder der beiden in Rede stehenden gleichen Winkel < 90° ist, so ist von den beiden Gegenwinkeln der gleichen Seiten in demjenigen Dreieck der größere, in welchem der dritte Winkel kleiner als in dem andern Dreieck ist.

1139. Unter allen Normalkreisbogen, die sich nach einem Hauptkreise einer Kugel von einem Puncte der Sphäre ziehen lassen, der nicht der sphärische Mittelpunct jenes Kreises ist, ist derjenige der größte, welcher durch diesen sphärischen Mittelpunct geht, der kleinste dagegen derjenige, welcher den größten zum sphärischen Durchmesser ergänzt.

Anleit. zum Bew. Unmittelbar aus A. 1121 und aus 564 folgt, daß der eine unserer in Rede stehenden Bogen kleiner ist als jeder beliebige andere von demselben Puncte nach demselben Hauptkreise gezogene, der andere dagegen größer.

Zus. 1. Der kleinere unserer beiden Bogen mißt daher die Entfernung des Punctes vom Umfange des Hauptkreises.

Zus. 2. Die übrigen Bogen, welche unsern Punct und Hauptkreis verbinden, werden desto kleiner, je mehr sie sich dem kleinsten Bogen nähern und desto größer, je weiter sie sich von ihm entfernen, also dem größten sich nähern.

Zus. 3. Auf derselben Seite des sphärischen Durchmessers, welcher aus dem größten und kleinsten der in Rede stehenden Bogen gebildet wird, lassen sich daher niemals zwei verschiedene Bogen von gleicher Länge ziehen.

Zus. 4. Auf verschiedenen Seiten des genannten Durchmessers dagegen können immer gleiche Bogenpaare in beliebiger Anzahl gezogen werden. Jedes Paar entfernt sich

gleich weit von dem kleinsten und daher auch gleich weit von dem größten unserer Bogen; und schneidet die Peripherie des Hauptkreises unter gleichen Winkeln.

Zus. 5. Unter den Bogen, welche auf derselben Seite des mehrgenannten sphärischen Durchmessers gezogen werden, ist derjenige, welcher seiner Größe nach das Mittel zwischen dem größten und kleinsten Bogen, auch seiner Lage nach der mittlere, oder mit andern Worten: derjenige Bogen, dessen Länge die eines Quadranten, ist von dem größten und kleinsten Bogen gleichweit entfernt.

Zus. 6. Daher sind alle Bogen zwischen dem kleinsten und dem mittlern $< \frac{\pi}{2}$, dagegen alle zwischen dem größten und dem mittlern $> \frac{\pi}{2}$.

Zus. 7. Alle Winkel, welche unsere Bogen mit dem Hauptkreise nach der Seite des kleinsten Bogens hin bilden, sind spitze; aber sie unterscheiden sich dadurch von einander, daß sie vom kleinsten Bogen an gerechnet bis zum mittlern abnehmen, von da an aber bis zum größten Bogen wieder zunehmen. Der kleinste unter allen diesen Winkeln ist also derjenige, welchen der mittlere Bogen mit dem Hauptkreise bildet.

1140. Wenn in zwei rechtwinkeligen sphärischen Dreiecken, ein Paar Catheten gleich, das andere Paar dagegen zwar ungleich aber doch so daß beide $< \frac{\pi}{2}$, so hat die größere Cathete auch stets den größern Gegenwinkel, die größere Hypotenuse, aber den kleinern anliegenden Winkel.

1141. Wenn in zwei rechtwinkeligen sphärischen Dreiecken ein Cathetenpaar gleich, die Hypotenusen aber ungleich und außerdem sämmtliche Catheten beider Dreiecke einzeln $< \frac{\pi}{2}$ so gehört zur größern Hypotenuse auch stets eine größere Cathete; diese letztere hat überdieß stets einen größern Gegenwinkel aber einen kleinern anliegenden Winkel als die kleinere Cathete des andern Dreiecks.

1142. Zwei rechtwinkelige sphärische Dreiecke sind gleich, wenn eine Cathete sammt ihrem Gegenwinkel beziehungsweise gleich und sämmtliche Catheten gleichartig sind.

1143. Wenn in zwei rechtwinkeligen sphärischen Dreiecken, deren Hypotenusen gleich sind, die eine Cathete des einen sich weiter vom Quadranten entfernt als die eine Cathete des andern Dreiecks, so findet hinsichtlich des andern Cathetenpaares immer die entgegengesetzte Beziehung Statt d. h. die zweite Cathete des letztern Dreiecks entfernt sich weiter vom Quadranten als die zweite des erstern.

Anleit. zum Bew. Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

1. Sind die beiden Catheten gleichartig und zwar
   a) $< \frac{\pi}{2}$ so wird der Beweis indirect durch Hülfe von A. 1139, Z. 2 geführt, und hieraus mittelst Anwendung des Nebendreiecks.
   b) der Beweis für den Fall hergeleitet, wo jede Cathete $> \frac{\pi}{2}$.
2. Sind die Catheten ungleichartig; also die Hypotenusen $> \frac{\pi}{2}$ so läßt sich durch Hülfe des Nebendreiecks leicht zeigen, daß die Catheten des einen Dr. beide zugleich größer oder kleiner als die des andern sind.

1144. Wenn in zwei rechtwinkeligen sphärischen Dreiecken, deren Hypotenusen gleich sind, ein Cathetenpaar ungleich ist, so hat die größere auch stets einen größern Gegenwinkel als die kleinere.

1145. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

1146. In jedem sphärischen Dreieck trifft das aus einer Spitze auf die Gegenseite gefällte Perpendikel diese Seite selbst oder deren Verlängerung, je nachdem die dieser Seite anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig sind.

Bew. Indirect — gestützt auf A. 1121.

Zus. 1. Liegt das Perpendikel innerhalb des Dreiecks, so ist es gleichartig mit den an der Seite, auf die es gefällt worden, anliegenden Winkeln; fällt es außerhalb, so ist es gleichartig mit demjenigen der beiden genannten Winkel, dem es gegenüber steht.

Zus. 2. Das Perpendikel liegt stets demjenigen Winkel an der Grundlinie (Seite, auf die das P. gefällt worden) näher als dem andern, welcher einem Rechten der nähere

ist; und derjenigen Seite am nächsten, welche sich am weitesten ihrer Größe nach vom Quadranten entfernt.

Zus. 3. Ist auch einer von den Winkeln, die an der zum Perpendikel gehörigen Seite liegen, unbekannt, so läßt sich doch öfters die Lage der Senkrechten noch bestimmen, wenn man nur den andern anliegenden Winkel, und die beiden Dreiecksseiten kennt, auf welche die Senkrechte nicht gefällt wird. Ist nämlich A die Spitze, von der das Perpendikel ausläuft, also die Seiten b, c und einer ihrer Gegenwinkel z. B. B bekannt, so fällt, wenn c dem Quadranten nicht näher ist als b, die Senkrechte innerhalb oder außerhalb des Dreiecks, jenachdem c mit B gleichartig oder ungleichartig ist.

Anmerkung. Ohne die Erfüllung der Bedingung, daß die Gegenseite des unbekannten Winkels dem Quadranten nicht näher komme, als die Gegenseite des bekannten, bleibt es zweifelhaft, ob die Senkrechte innerhalb oder außerhalb des Dreiecks fallen wird.

1147. Sind in einem sphärischen Dreiecke zwei Seiten dem Quadranten gleich nahe, so werden die dritte Seite und ihr Gegenwinkel durch einen und denselben Bogen halbirt.

1148. Soll ein sphärisches Dreieck construirt werden aus drei gegebenen Stücken von solcher Beschaffenheit, daß unter ihnen eine Seite und ihr Gegenwinkel sich befinden, so giebt es dann, aber auch nur dann, zwei verschiedene Dreiecke, die der vorgeschriebenen Bedingung genügen, wenn das dritte der gegebenen Stücke dem Quadranten oder Rechten näher ist, als das gleichnamige von den beiden erstern gegebenen.

1149. In jedem sphärischen Dreieck haben die Kreisbogen, welche die Winkel des Dreiecks halbiren, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Beweis. Ganz ähnlich dem für den entsprechenden Satz ebener Dreiecke geführt, durch Hülfe des frühern Satzes A. 1130, Zus. 3.

Zus. 1. Dieser Durchschnittspunct der drei Winkelhalbirenden ist gleichweit entfernt von den Seiten des Dreiecks.

Zus. 2. Dieser Durchschnittspunct ist daher auch der sphärische Mittelpunct des Kreises, welcher sich in das Dreieck d. h. so beschreiben läßt, daß er die Seiten des Dreiecks berührt. (A. 1139).

Anmerkung. Dieser Kreis soll daher innerer Berührungskreis genannt werden.

1150. In jedem sphärischen Dreieck haben auch die drei Kreisbogen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, welche einzeln zwei Außenwinkel des Dreiecks und denjenigen der innern Winkel halbiren, der nicht als Nebenwinkel zu jenen äußern gehört.

Anmerkung. Es giebt daher für sphärische Dreiecke eben so wie für ebene drei äußere Berührungskreise, von denen man jeden als derjenigen Dreiecksseite zugehörig betrachtet, welche er von außen berührt.

1151. Sind in einem sphärischen Dreiecke zwei Seiten zusammen gleich der Hälfte vom Umfange eines Hauptkreises, so ist der der dritten Seite zugehörige äußere Berührungskreis gleich dem innern Berührungskreise des Dreiecks.

1152. Bei jedem sphärischen Dreieck haben die drei Bogen, welche dessen Seiten unter rechten Winkeln halbiren, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct.

Anleit. zum Bew. Errichte auf zwei Seiten in ihren Halbirungspuncten Senkrechte, und zeige, daß durch die aus dem Durchschnittspuncte derselben auf die dritte Seite gefällte Senkrechte diese Seite halbirt wird.

Zus. 1. Dieser Durchschnittspunct ist gleichweit von den drei Ecken des Dreiecks entfernt.

Zus. 2. Er ist daher der sphärische Mittelpunct des äußern Kreises, d. h. desjenigen welcher sich um das Dreieck beschreiben läßt.

1153. Die sphärischen Radien vom äußern Kreise eines beliebigen Dreiecks und vom innern Kreise seines Polardreiecks stehen immer in solcher gegenseitigen Beziehung, daß der eine das Complement des andern ist.

Anleit. zum Bew. Verbinde den Mittelpunct des äußern Kreises vom Urdreieck mit dessen Spitzen und verlängere diese Radien über den Mittelpunct hinaus, bis sie die Seiten des Polardreiecks schneiden.

1154. Die beiden Kreise, von denen der eine um ein beliebiges Kugeldreieck, der andere in dessen Polardreieck beschrieben ist, sind stets Parallelkreise dieser Kugel.

Anmerk. Die Sätze von 1099 bis zu Ende sind in der Hauptsache entnommen aus der vorzüglichen Schrift: C. F. Schulz Lehrbuch der elementaren Sphärik. Leipzig 1833. 2 Theile in 8.

Aufgaben

aus dem Gebiete der Elementargeometrie.

Einleitung.

578. Man sagt, nach dem Vorgange der Alten, eine Aufgabe werde geometrisch und zwar streng geometrisch gelöst, wenn alle nöthigen Constructionen nicht nur mit vollkommener Bestimmtheit und Sicherheit d. h. ohne alles Probieren oder etwas dem ähnliches sich ausführen lassen, sondern auch nichts weiter erfordern, als gerade Linien und Kreise, also keine andere Hülfe in Anspruch nehmen, als diejenige, welche Lineal und Zirkel gewähren können.

Anmerkung. Seit der Zeit des französischen Geometers Descartes hat der Ausdruck geometrische Auflösung eine weitere Bedeutung erhalten, indem man eine Auflösung wohl auch dann noch geometrisch nennt, wenn außer geraden Linien und Kreisen noch andere Linien, wie z. B. die Kegelschnitte zu Hülfe genommen werden. In dem Folgenden ist die ältere und engere Bedeutung unseres in Rede stehenden Ausdrucks beibehalten.

579. Die Auflösungen aller geometrischen Aufgaben stützen sich auf folgende vier

Forderungssätze.

1. Von einem gegebenen Puncte aus eine Gerade zu ziehen, welche entweder von unbegränzter Länge, oder gleich lang mit einer andern gegebenen Geraden ist, oder durch einen zweiten gegebenen Punct geht.
2. Eine Gerade beliebig weit zu verlängern.
3. Von einer gegebenen Geraden ein bestimmtes und begränztes Stück abzuschneiden, welches gleiche Länge mit einer bestimmten und gegebenen Geraden hat.
4. Von einem gegebenen Punct mit einem Radius von gegebener Länge einen Kreis zu beschreiben.

580. Außerdem bedarf man noch der Hülfe folgender, schon aus früherem Gebrauche bekannter,

Grundsätze.

1. Zwei Gerade fallen in ihrer Richtung zusammen, bilden also nur eine einzige Gerade, wenn zwei Puncte der einen auch zugleich der andern angehören.

2. Gerade Linien, welche sich schneiden, oder von demselben Puncte auslaufen, haben außer dem Puncte, in welchem sie sich schneiden oder von dem sie auslaufen, durchaus nichts mit einander gemein; dieser Punct ist also das Einzige, was allen Linien zugleich angehört.
3. Gerade Linien, deren beiderseitige Endpuncte zusammenfallen, decken einander, sind also gleich lang, und umgekehrt, sind gerade Linien gleich, so lassen sie sich immer so auf einander legen, daß ihre Endpuncte zusammenfallen.
4. Beschreibt man aus den Endpuncten A und B einer Geraden AB, als Mittelpuncten zwei Kreise, mit einem und demselben Radius (AB, BA) welcher eben so groß oder größer als diese Linie ist, so müssen sich die Peripherien dieser Kreise nothwendig und immer begegnen.

Anmerkung. Man sehe die frühern Anmerkungen p. 5.

581. Um eine aufgestellte Aufgabe auflösen zu können, wird vor Allem Sachkenntniß d. h. Kenntniß der Eigenschaften des Raumgebildes erfordert, um welches es sich in der Aufgabe handelt. Aus diesem Grunde ist in dem Vorhergehenden bei jedem einzelnen derjenigen Lehrsätze, auf denen vorzugsweise die Auflösung einzelner Aufgaben beruht, auf die betreffende Aufgabe selbst hingewiesen werden.

Bietet eine Aufgabe für den, der sie lösen soll, Schwierigkeiten dar, so daß es ihm nicht sogleich gelingt, die Eigenschaften zu entdecken, von denen die Lösung abhängt, so ist es meist rathsam und zum Ziele führend, daß man sich eine Figur construire, in welcher man das erst noch zu Vollbringende als vollbracht, oder das Gesuchte als gefunden ansieht, und durch genauere Betrachtung dieser Figur solche einfache Beziehungen zu entdecken sucht, auf welche man die zur Lösung der Aufgabe nöthigen Constructionen stützen kann. Als Beispiel zur Erläuterung des Gesagten möge die 15te Aufgabe des fünften Buches dienen. Ist nämlich NO (Fig. 84) die gesuchte Linie, welche die beiden gegebenen Kreise in N und O berührt, und man zieht NG und OK, so sind diese offenbar als Senkrechte auf NO parallel; also ist, wenn KP || NO gezogen wird, NOKP ein Rechteck, und mithin GP gleich dem Unterschiede der beiden Kreishalbmesser (also eine bekannte Größe): also berührt der Kreis, welchen man mit GP als Radius von G aus construirt, die Gerade KP — und hierauf stützt man die Auflösung der in Rede stehenden Aufgabe.

Hat man die Auflösung einer Aufgabe zu Stande gebracht, so ist noch übrig, darzuthun, daß dieselbe auch allen Anforderungen vollkommen genüge. Dieß geschieht in dem Beweise. Hierbei nimmt man natürlich die Hülfe vorzugsweise derjenigen Lehrsätze in Anspruch, welche sich auf die Eigenschaften des Construct's beziehen, welche der Auflösung zum Grunde gelegt wurden.

Anmerkung. Bei den in dem Folgenden behandelten Aufgaben ist die Auflösung wenigstens angedeutet, indem auf die Forderungssätze oder frühern Aufgaben hingewiesen ist, auf die man die in Rede stehende Aufgabe zurückbringen kann; eben so ist der Beweis angedeutet, durch Anführung der bei ihm zur Anwendung kommenden aus dem Vorhergehenden bekannten Lehrsätze.

Erstes Buch.
Von geraden Linien und Winkeln.

Erster Abschnitt.

Aufgaben die gleichen, senkrechten, parallelen Geraden betreffend.

---

582. Von einem gegebenen Puncte C (Taf. VII, Fig. 1.) aus eine Gerade CG zu ziehen, welche gleich einer gegebenen Geraden AB.
Eucl. I, 2.

Auflösung. Durch den ersten (der in der Einleitung angeführten) Forderungssatz und den vierten Grundsatz. Man beschreibt nämlich folgende Kreise: Aus A und C mit dem Radius CA, aus A mit AB und aus D mit DF.

Anmerkung. Diese Auflösung ist die des Euclides. Inzwischen weiß ich nicht, ob man, ohne geometrischer Strenge und Schärfe etwas zu vergeben, nicht auch kürzer so sagen könnte: Beschreibe von C aus mit einem Radius gleich AB einen Kreisbogen und verbinde einen seiner Puncte mit dem Mittelpuncte. — In der Praxis wenigstens geht man immer auf diese Weise zu Werke.

583. Wenn zwei ungleiche Gerade AB und C (Taf. VII, Fig. 2.) gegeben sind, von der größern ein Stück abzuschneiden, welches gleich ist der kleinern.
Eucl. I, 3.

Auflösung. Mittelst der vorhergehenden Aufgabe mache AD = C, und wende dann den vierten Forderungssatz an.

Anmerkung. Auch diese Auflösung ist von Euclides. Sollte man nicht der geometrischen Strenge in gleichem Grade genügen, wenn man sagte: Beschreibe aus A mit einem Radius AE = C einen Kreisbogen DEF? — In der Praxis verfährt man immer auf diese Weise.

584. Auf einer gegebenen Geraden ED (Taf. VII, Fig. 3.) in einem gegebenen Puncte C eine Senkrechte (CF) zu errichten.
Eucl. I, 11. — L. G. II, Afg. 2.

Auflösung. Nimm beliebig CB, und mache ihr gleich CA und führe dann gestützt auf den 4ten Forderungssatz, und den 4ten Grundsatz die übrigen Constructionen aus, die Fig. 3 andeutet.

Vorber. zum Bew. Ziehe FB, FA.

Bew. Entweder aus 50 oder aus 51, Zus. 4.

585. Auf einer gegebenen Geraden AB (Taf. VII, Fig. 4) in einem ihrer Endpuncte B eine Senkrechte (BD) zu errichten.
L. G. II, Afg. 2, Anm.

Erste Auflösung. Verlängere AB über B hinaus und verfahre alsdann, wie in der vorigen Aufgabe.

Zweite Auflösung. Fig. 5. Beschreibe von A und B aus zwei Kreise mit demselben Radius, ihren Durchschnittspunct (Grundsatz 4) C verbinde mit A, nimm CD = DA, und ziehe DB, so ist diese die gesuchte Senkrechte.

Bew. 51, Zus. 3, 51, und 38 angewandt auf Dreieck BCD. Oder, indem man aus C mit CA den Kreis ABFDG beschreibt, aus 246.

586. Von einem Puncte F (Taf. VII, Fig. 6) außerhalb einer Geraden AB eine Senkrechte auf diese zu fällen.

Eucl. I, 12. — L. G. II, Aufg. 3.

Auflösung. Gestützt auf den Forderungssatz 4 macht man zuerst eine Construction aus F, und dann, mit Berücksichtigung von Grundsatz 4, ähnliche aus D und E, und zieht FHG; so ist diese die Gesuchte.

Vorber. Ziehe FD, FE, GD, GE.

Beweis. Aus 51, Zus. 5.

587. Von einem gegebenen Punct E (Taf. VII, Fig. 7) aus eine Gerade EG zu ziehen, welche parallel mit einer gegebenen Geraden JM.

Eucl. I, 31. — L. G. II, 6.

Erste Auflösung. Ziehe durch E beliebig die ED und construire nach Anleitung der Aufg. 593 einen Winkel GED, welcher = EDJ.

Bew. Aus 26.

Zweite Auflös. Aus E fälle (586) die Senkrechte EJ, in D errichte (584) eine solche DK, mache sie gleich JE und verbinde E mit K, so ist EK die Gesuchte.

Bew. Aus 31.

Zweiter Abschnitt.

Von der Theilung gerader Linien.

588. Eine gegebene Gerade DE (Taf. VII, Fig. 6) in zwei gleiche Theile zu theilen.

Eucl. I, 10. — L. G. II, Aufg. 1.

Auflösung. Wende den Grundsatz 4 zu einer Construction von D und E aus, und zwar zweimal an, so daß das eine Bogenpaar sich in F, das andere auf derselben oder der entgegengesetzten Seite von DE in G sich schneidet, ziehe FG, so ist H der gesuchte Theilpunct.

Vorber. zum Bew. Ziehe FD, FE, DG, GE.

Bew. Aus 51, Zus. 5.

589. Eine gegebene Gerade BA (Taf. VII, Figg. 8 und 10) in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Clavius zu Eucl. VI, 10. — L. G. III, Aufg. 1.

Erste Auflös. Ziehe durch B die BH beliebig, nimm auf ihr so viel Stücke BC, CD 2c. von beliebiger aber gleicher Länge, als Theile für BA verlangt werden, verbinde H mit A, und ziehe durch Hülfe von 587 die Geraden GV, FU, ET, DS, CR.

Bew. Aus 63, Zus., oder auch aus 195, Zus. 2.

Zweite Auflös. Durch einen beliebigen Punct P (Fig. 10) und durch einen der Endpuncte von AB ziehe die unbegränzte Gerade PAC, ferner durch P eine Parallele PH mit AB, auf dieser nimm so viel Stücke PD, PE 2c. von beliebiger aber gleicher Länge, als gleiche

Theile für AB verlangt werden, ziehe durch H und B die Gerade HBC, und verbinde die Puncte J, D, E, F, G mit C ꝛc.

Bew. Aus 198, Zus.

Anmerkung. Die Auflösung dieser Aufgabe, welche durch Hülfe des Proportionalzirkels zu Stande gebracht wird, kömmt mit dieser zweiten überein. Siehe die Anmerk. zu 196.

590. Von einer gegebenen Geraden einen bestimmten Theil derselben abzuschneiden.

Eucl. VI, 9.

Auflösung. Durch die erste Auflösung der vorhergehenden Aufgabe.

Bew. Aus 63, oder aus 195, Zus. 2.

Anmerkung. In der Praxis bedient man sich hierbei mit Nutzen des Proportionalzirkels.

591. Eine Gerade AB (Taf. VII, Fig. 11) in zwei solche Stücke zu theilen, daß das Rechteck aus der ganzen Linie und dem einen BC der Stücke gleichflächig ist dem Quadrate, das über dem andern AC construirt wird; oder (210) eine gegebene Gerade nach dem äußern und mittlern Verhältniß zu schneiden.

Eucl. II, 11 und VI, 30. — L. G. III, Aufg. 4.

Auflösung und Beweis. Aus 96.

Anmerkung. Diese Aufgabe fällt zusammen mit der spätern 639. Siehe die Anmerk. zu 210.

592. Wenn zwei gleiche oder ungleiche gerade Linien AB und CD (Taf. VII, Fig. 12) gegeben sind, die eine von ihnen CD so zu verlängern, daß das Rechteck aus der ganzen verlängerten Linie (CL) und aus der Verlängerung (DL) gleichflächig ist dem über der andern Linie construirten Quadrate.

Clavius zu Eucl. III, 36.

Auflösung. Ziehe die Senkrechte CG (585) und mache sie gleich AB. Wende dann auf CD die frühere Aufg. 588 an, construire aus E mit CE einen Kreis, ziehe GJEH, und nimm DL = GJ.

Bew. Aus 259.

Dritter Abschnitt.

Von den Winkeln.

---

593. Von einem gegebenen Puncte A (Taf. VII, Fig. 13) einer gegebenen Geraden AB aus eine Gerade AG zu ziehen, welche mit AB einen Winkel GAB bildet, der gleiche Größe mit einem gegebenen Winkel JDH hat.

Eucl. I, 23. — L. G. II, Aufg. 4.

Auflösung. Verbinde zwei beliebige auf den Schenkeln des Winkels JDH genommene Puncte C und E unter einander, und construire nach Anleitung von 600 ein Dreieck AFG, dessen Seiten AF, AG, FG beziehungsweise gleich sind den Seiten DE, DC, CE des Dreiecks DCE.

Bew. Aus 50.

594. **Von einem Puncte F (Fig. 14) außerhalb einer Geraden eine andere nach ihr zu ziehen, welche mit derselben einen Winkel FAB bildet, der gleich ist einem gegebenen Winkel C.**

Auflös. Nimm D beliebig auf BA, suche ED nach Anleitung der vorhergehenden Aufg. und dann FA nach 587.

Bew. Aus 24.

595. **Einen Winkel zu construiren, welcher das Doppelte, Dreifache, Vierfache ꝛc. eines gegebenen Winkels ist.**

Newton Arithm. univ. Probl. 29.

Auflös. Nach hinreichender Verlängerung der Schenkel des gegebenen Winkels nimm BA (Fig. 17) beliebig, mache BC = BA, CD = BC, DE = CD, FE = DE ꝛc. Alsdann ist: CBD = 2 A, DCE = 3 A, EDF = 4 A ꝛc.

Bew. Aus 51, und 38.

Anmerkung 1. Kömmt man zu einer Linie, die auf einem der Winkelschenkel senkrecht steht, so kann man nicht weiter gehen, weil sich alsdann keine Linie mehr ziehen läßt, welche der Bedingung Genüge leistet.

Anmerkung 2. Auch aus dieser Construction lassen sich die Werthe für die Sinusse und Cosinusse des Doppelten, Dreifachen ꝛc. eines gegebenen Winkels herleiten. Man ziehe die Senkrechten Bb, Cc, Dd, Ee, Ff.

1. Da $\triangle$ ACc $\sim$ $\triangle$ ABb, so ist AB : Bb = AC : Cc d. i. sin tot : sin A = 2 cos A : Cc, mithin:

$$Cc = \sin cBC = \sin 2A = \frac{2 \sin A . \cos A}{\sin. tot.}$$

2. AC : Ac = AB : Ab d. i. 2 cos A : Ac = sin. tot. : cos A, also

$$Ac = \frac{2 \cos^2 A}{\sin. tot}, \text{ und}$$

$$Bc = \cos 2A = Ac - AB = \frac{2 \cos^2 A}{\sin. tot.} - \sin . tot.$$

$$= \frac{2 \cos^2 A - (\sin^2 A + \cos^2 A)}{\sin. tot.}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin. tot.}$$

3. $\triangle$ ACc $\sim$ $\triangle$ ADd, also

AC : Cc = AD : Dd = AB + BD : Dd d. i.

2 cosA : sin 2 A = sin. tot + 2 cos 2 A : sin 3 A,

also, wenn der Kürze halber sin. tot. = 1 gesetzt wird,

$$\sin 3A = \frac{\sin 2A + 2 \sin 2A \cos 2A}{2 \cos A}$$

$$= \sin A + 2 \sin A (\cos^2 A - \sin^2 A)$$

$$= 2 \sin A + 2 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$= 4 \sin A - 4 \sin^3 A.$$

Diese Formeln sind, wie man sieht, dieselben, welche wir früher (367, Anmerk. 3) gefunden haben.

596. **Einen gegebenen Winkel ACB (Taf. VII, Fig. 15) in zwei gleiche Theile (ACF, BCF) zu theilen.**

Eucl. I, 9. — L. G. II, Aufg. 5.

Auflösung. Nimm CD = CE; von D und E aus construire nach

Anleitung von Grundsatz 4; den so gewonnenen Durchschnittspunct F verbinde mit C; so ist FC die gesuchte Halbirende.

Bew. Aus 51, Zus. 5.

Anmerkung. Durch bloße Wiederhohlung des eben angegebenen Verfahrens kann man jeden gegebenen Winkel in vier, acht, sechszehn .... allgemein in 2^n gleiche Theile theilen.

597. Einen rechten Winkel BCA (Fig. 16) in drei gleiche Theile zu theilen.

Clavius zu Eucl. I, 32.

Auflösung. Construire über AC nach Anleitung von 601 das gleichseitige Dreieck ACE und halbire den Winkel ECA. — Oder nimm CA = CB und beschreibe aus C und A und B mit dieser Länge als Radius drei Kreisbogen ꝛc.

Bew. Aus 51, Zus. 3.

598. Einen rechten Winkel BCA (Fig. 18) in fünf gleiche Theile zu theilen.

Clavius zu Eucl. I, 32.

Auflösung. Beschreibe über CA, oder einen Theil davon CE nach Anleitung von 610 das gleichschenkelige Dreieck CDE, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so groß, als der Winkel an der Spitze, und theile DCE (596, Anm.) in vier gleiche Theile.

Bew. Aus 97, und 97, Zus. 3.

Anmerkung. Es ist im Allgemeinen unmöglich einen Winkel durch bloße Hülfe des Lineals und Zirkels streng geometrisch in eine ungerade Anzahl gleicher Theile zu theilen. Nur der rechte Winkel bildet für den Fall der Dreitheilung und Fünftheilung eine Ausnahme von dieser allgemeinen Regel.

599. Allgemeine Anmerkung über die Trisection oder Dreitheilung der Winkel.

Die Aufgabe einen Winkel streng geometrisch (578) in drei gleiche Theile zu theilen gehörte im Alterthum zu den berühmten und berüchtigten Problemen wegen der unübersteiglichen Schwierigkeiten, welche sie der Elementargeometrie entgegenstellt.

Behandelt man die Aufgabe algebraisch, so wird man, wie wir kurz vorher (595, Anm. 2) gesehen haben, auf eine Gleichung vom dritten Grade geführt, nämlich auf die Gleichung:

$$3 \sin a - \frac{4 \sin^3 a}{r^2} = \sin 3a, \text{ oder}$$

$$\sin^3 \frac{a}{3} - \frac{3r^2}{4} \cdot \sin \frac{a}{3} = - \frac{r^2 \sin a}{4},$$

wenn nämlich sin. tot = r gesetzt wird. Cubische Gleichungen lassen sich aber durch bloße Hülfe von Zirkel und Lineal nicht auflösen oder geometrisch construiren.

Schon früher ist an mehrern Stellen von dieser Aufgabe gehandelt worden; namentlich in der zweiten Anmerkung zu 53, in 257, in 343, Zus. 1, und in 343, Zus. 2. Die auf dem, was in den angeführten Stellen bemerkt worden ist, beruhenden Versuche, die Aufgabe zu lösen, stimmen alle darin überein, daß man durch Probiren eine Gerade findet, die gewisse Bedingungen erfüllt, und eben dadurch das Verlangte leistet.

1. Es sei KCE (Taf. VII, Fig. 19) der zu theilende Winkel. Nimm Cg beliebig, beschreibe mit ihr aus C einen Kreis, und ziehe durch g nach dem über den Scheitel hinaus verlängerten andern Schenkel EC die Gerade gGA durch Probiren so, daß GA = Cg, d. h. gleich dem Radius des beschriebenen Kreises. Der Winkel GAC ist = $\frac{1}{3}$ KCE. Der Beweis ist leicht.
2. Es sei PCQ (Fig. 21) der gegebene Winkel. Aus C mit beliebigem Radius CA beschreibe einen Kreis, dessen Peripherie den andern Schenkel CQ in D schneidet.

Ziehe die Sehne AD und alsdann durch Probiren CFG so, daß DF = DG; so ist W. GCQ = ⅓ PCQ.

Bew. Aus 342, Zus. 2.

Es lassen sich noch mehrere Auflösungen geben, aber sie sind alle von dieser Art. Man nennt sie mechanische Auflösungen, indem sie auf dem besondern Gebrauche eines Werkzeugs (des Lineals) beruhen, der aber nicht mit voller Sicherheit und Bestimmtheit geschieht, sondern auf ein Probiren hinausläuft.

3. Die Alten wandten zur Auflösung unserer Aufgabe unter andern auch eine bestimmte krumme Linie an, Quadratrix des Dinostratus genannt, welche dieser, oder, wie ich glaube, Hippias (siehe 332, Anm. 6) erfunden hatte, um jeden Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. Ueber diese krumme Linie und ihre Anwendung zu der in Rede stehenden Aufgabe sehe man Clavius im Anhange zu Eucl. VI, und dessen geometria practica Lib. VII, Appendix; ferner Kästners geom. Abh. II., p. 218. Wie die Aufgabe durch Hülfe der Kegelschnitte gelöst werden kann, ersieht man unter andern aus dem dritten Buche der Geometrie von Descartes.

4. In der Praxis bedient man sich häufig des Transporteur, indem man durch seine Hülfe die Menge der Grade zu bestimmen sucht, welche der zu theilende Winkel enthält, und die desfalls gefundene Zahl durch 3 dividirt. Doch eine solche Lösung der Aufgabe ist rein mechanisch und darum nicht geometrisch.

Es ist bereits bemerkt worden, daß der rechte Winkel für die beiden Fälle der Dreitheilung und Fünftheilung hier eine Ausnahme macht. Es ist dieß für die Dreitheilung auch leicht aus Fig. 20 zu ersehen. Denn damit gAC = 30° sei, muß AgC = 60°, also, weil CG = Cg ist, Dreieck CGg gleichseitig sein; mithin ist Gg streng geometrisch bestimmt.

Zweites Buch.

Von der Construction geradliniger Figuren.

Erster Abschnitt.

Von der Construction geradliniger Figuren aus gegebenen Seiten und Winkeln.

---

600. Aus drei gegebenen Geraden A, B, C (Taf. VII, Fig. 22) von denen je zwei zusammen größer als die dritte sind, ein Dreieck EHF zu construiren.

Eucl. I, 22. — L. G. II, Aufg. 10.

Auflösung. Nimm EF = C, und beschreibe aus E und F Kreise, deren Radien respective gleich A und B sind; einen ihrer Durchschnittspuncte wie H verbinde mit E und F.

Anmerkung. Der Grund, warum von den gegebenen Linien die Eigenschaft verlangt wird, daß je zwei zusammen größer als die dritte sind, erhellt aus 43.

601. Ueber einer gegebenen Geraden AB (Fig. 23) ein gleichseitiges Dreieck ABC zu beschreiben.

Eucl. I, 1.

Auflös. Durch Anwendung von Grundsatz 4.

602. Ueber einer gegebenen Geraden AB (Fig. 24) ein gleichschenkeliges Dreieck ABC zu beschreiben.

Clavius zu Eucl. I, 1.

Auflös. Durch Anwendung von Grundsatz 4.

Anmerkung. Man beschreibt auf ähnliche Weise, nur indem man ungleiche Kreise construirt, ein ungleichseitiges Dreieck über einer gegebenen Geraden.

603. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

L. G. II, Aufg. 9.

Auflös. Ziehe aus A und B (Fig. 24) die Geraden AC und BC unter Winkeln, welche beziehungsweise den gegebenen gleich sind, und verlängere diese Geraden bis zum gegenseitigen Durchschnitt.

Anmerkung 1. Gleich leicht und einfach ist die Construction eines Dreiecks, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Statt des eingeschlossenen Winkels kann auch einer der Gegenwinkel gegeben sein, wenn nur entweder derselbe ein rechter oder stumpfer ist, oder man weiß, daß die beiden andern spitz sind, oder, im Fall einer derselben stumpf ist, welcher Seite er gegenüber steht (49).

L. G. II, Aufg. 11.

Anmerkung 2. Sind nur die drei Winkel eines Dreiecks gegeben, so ist auch nur die Gestalt, aber nicht die Größe desselben bekannt (50, Anm. 2). Man kann daher auch nur ein dem in Rede stehenden ähnliches Dreieck construiren. Die Construction selbst wird sehr leicht durch Hülfe von 593 ausgeführt.

604. Ueber einer gegebenen Geraden ein Quadrat zu construiren, oder ein Rechteck, wenn auch dessen andere Seite gegeben ist.

Eucl. I, 46.

Auflösung für das Quadrat. Construire AD und BC (Taf. VII, Fig. 25) durch Hülfe von 585 und 583, und ziehe dann DC; oder construire auf dem angedeuteten Wege blos AD, und beschreibe aus B und D zwei Kreise mit dem Radius AB.

Bew. Aus 58, und 56, Zus. 2.

Anmerkung. Die Construction ändert sich im Wesentlichen gar nicht, wenn man anstatt des Quadrates ein Rechteck verlangt; AD und BC werden natürlich gleich der andern gegebenen Rechtecksseite gemacht.

605. Die beiden bestimmenden Seiten eines Rechtsecks zu finden, wenn deren Summe AE (Fig. 26) und die Diagonale AC gegeben ist.

Auflösung. Beschreibe über AC als Durchmesser einen Kreis, errichte auf AC in C die Senkrechte CF und mache sie gleich AC; ziehe AF, welche in D halbirt wird (51, und 246). Aus D beschreibe über AF den Halbkreis ACGF, und von A aus mit AE den Bogen EG, ziehe endlich ALG, so ist AL die eine und LC die andere der gesuchten Rechtecksseiten.

Bew. Da Bogen AC ein Quadrant, so ist W. AGC $=45^{\circ}$, also $=$ W. LCG da W. CLG $=90^{\circ}$ 2c.

606. Die beiden bestimmenden Seiten eines Rechtsecks zu finden, wenn ihr Unterschied AP (Fig. 26) und die Diagonale AC gegeben ist.

Auflösung. Dieselbe Construction, wie bei der vorigen Aufgabe, mit dem einzigen Unterschiede, daß man anstatt mit der Summe AE jetzt mit dem Unterschied AP einen Kreisbogen beschreibt; ist R dessen Durchschnittspunct mit der Peripherie des Kreises über AF, so ziehe ARB und CB. Dreieck ABC ist die Hälfte des gesuchten Rechtecks.

Bew. Da W. ARC $=\frac{3}{2}$ R (244) so ist Dr. BRC gleichschenkelig, also AB — BC $=$ AP 2c.

607. Ein Quadrat zu construiren, wenn der Ueberschuß AB (Taf. VII, Fig. 28) der Diagonale über die Seite gegeben ist.

Clavius zu Eucl. II, 13.

Auflösung. Beschreibe das Quadrat ABCD, ziehe die Diagonale BD und verlängere sie so, daß DE = DA; BDE ist die Seite des gesuchten Quadrates 2c.

Bew. Aus 62.

608. Wenn von einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse A oder CD (Fig. 27) und die eine Cathete B gegeben sind, die andere Cathete zu finden.

Auflösung. Beschreibe über CD einen Halbkreis, und von C oder D aus mit B einen Kreisbogen, dessen Durchschnittspunct E mit der erstern Kreislinie verbinde mit D.

Bew. Aus 246.

609. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, dessen Grundlinie größer als jeder Schenkel.

Auflösung. Nach Anleitung von Fig. 29.

Bew. Aus 245, Zus. 6.

610. Ein gleichschenkeliges Dreieck CAB (Figg. 30 und 31) zu construiren, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie BC doppelt so groß, als der Winkel an der Spitze.

Eucl. IV, 10.

Erste Auflösung. Ziehe eine beliebige Gerade AB, theile sie im Puncte nach dem äußern und mittlern Verhältniß (591), beschreibe alsdann aus A mit AB einen Kreis, mache die Sehne BC = AD und ziehe AC.

Vorbereit. Man denke sich durch die drei Puncte A, D, C einen Kreis beschrieben.

Bew. Unserer Construction zufolge in Verbindung mit 259 ist BC Tangente des Kreises ADC, daher W. DCB = BAC (247), und mithin W. BDC = ACB = ABC, also CD = CB = AD, daher d = c = W. BCD, und darum W. BCA = 2 d = 2 c.

Anmerkung 1. Diese Auflösung ist von Euclides und stützt sich auf Eigenschaften des Kreises. Die folgende kömmt zwar in ihrer Construction mit ihr überein, erfordert aber doch zu ihrem Beweise nur Eigenschaften von Dreiecken und ist in sofern einfacher.

Zweite Auflösung. Man ziehe eine beliebige Gerade AB Fig. 31 und theile sie in D nach dem äußern und mittlern Verhältniß; beschreibe dann aus A mit AB und aus B mit AD zwei Kreisbogen, und verbinde deren Durchschnittspunct C mit A und B, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Bew. Aus 97, Zus. 3.

Anmerkung. 2. Würde für eine der Seiten eines solchen Dreiecks eine vorgeschriebene Länge gefordert, so würde man zuerst ein Dreieck dieser Art construiren, in welchem die Seiten von willkührlicher Länge wären, und dann an die gegebene Gerade in ihren beiden Endpuncten zwei Winkel anlegen (593), welche den beiden entsprechenden Winkeln des gefundenen Dreiecks beziehungsweise gleich sind.

Zweiter Abschnitt.

Construction von Figuren mit Bezug auf ihren Flächeninhalt.

---

611. Ein Parallelogramm AGJC (Fig. 32) zu construiren, das gleichflächig einem gegebenen Parallelogramm, ADBC, oder ein Dreieck AEC, welches gleichflächig einem gegebenen ABC, und die außerdem beide einen Winkel von vorgeschriebener Größe (D) haben.

Eucl. I, 42.

Auflösung. Für das Parallelogramm durch Hülfe der frühern Aufgaben 593 und 587; für das Dreieck durch Hülfe von 593, indem man noch CE zieht.

Bew. Aus 82 und 84.

Anmerkung. Ist der gegebene Winkel ein Rechter, so wird das Parallelogramm ein Rechteck.

612. Ein Dreieck ADE (Fig. 33) zu construiren, welches einem gegebenen Parallelogramm BCFA gleichflächig, oder ein Parallelogramm zu construiren AHFJ (Fig. 32), welches einem gegebenen Dreieck ACB gleichflächig und in welchem außerdem ein Winkel eine vorgeschriebene Größe D hat.

Clavius zu Eucl. I, 42.

Auflösung. Für das Dreieck durch Hülfe von 582 und 593. Für das Parallelogramm durch Hülfe von 588, 593, und 587.

Bew. Aus 84 und 82.

613. Ueber einer gegebenen Geraden KM (Fig. 34 und 34[a]) ein Parallelogramm JHMK zu beschreiben, das gleichflächig mit einem gegebenen Parallelogramm oder Dreieck, und in welchem ein Winkel (JKM) vorgeschriebene Größe hat.

Eucl. I, 44.

Erste Auflösung. 1. Construire (612) ein Prllgr. ADEF, welches mit dem gegebenen Prllgr. AHGF oder mit dem gegebenen Dreieck AHB gleichflächig, und in welchem ein Winkel DAF die vorgeschriebene Größe hat.

2. Verlängere KM nach L, so daß ML = AF.

3. Mache Prllgr. MLNO ≌ ADEF, und vollende über KL das Prllgr. KLNP.

4. Ziehe die Diagonale PMG und verlängere sie bis zum Durchschnitt G mit der verlängerten NL.

5. Vollende das Prllgr. KLGJ, und verlängere OM bis H. — KMHJ ist das gesuchte Parallelogramm.

Bew. KMHJ = MLNO (85) = ADEF = AHGF = AHB.

Zweite Auflösung. Verfahre zuerst wie in Nro. 1 der vorigen Auflösung angegeben ist; ziehe darauf KJ so, daß W. JKM = DAB = dem gegebenen, und nimm (646) die Länge von KJ so, daß

$$KM : DA = AF : KJ$$

und vollende Prllgr. KJHM, so ist dieß das gesuchte.

Bew. Aus 202, Zus. 4.

614. Ueber einer gegebenen Geraden HJ (Fig. 35) ein Dreieck HJL zu construiren, das gleichflächig mit einem gegebenen Dreieck oder Parallelogramm und einen Winkel von vorgeschriebener Größe hat.

Clav. zu Eucl. I, 44.

Erste Auflösung. 1. Construire zuerst nach Anleitung von 611 oder 612 ein Dreieck AFC, welches gleichflächig mit dem gegebenen Parallelogramm oder Dreieck ist, und außerdem den vorgeschriebenen Winkel enthält.

2. Vollende Parallelogramm AFDC.

3. Construire (613) über HJ ein mit AFDC ein gleichflächiges Parallelogramm HJKL, welches in LHJ den vorgeschriebenen Winkel hat. Ziehe endlich LJ, so ist HLJ das gesuchte Dreieck.

Bew. Aus 82, Zus. 2.

Zweite Auflösung. 1. Eben so wie in Nro. 1 der vorigen Auflösung; und dann durch Anwendung der zweiten Auflösung der vorigen Aufgabe.

Bew. Aus 202, Zus. 4.

615. Ein gegebenes Quadrat auf eine gegebene gerade Linie zu stellen d. h. über dieser Geraden ein Rechteck zu construiren, welches mit jenem Quadrate gleichflächig.

Tacquet zu Eucl. VI, 16. — L. G. III, Aufg. 7.

Erste Auflösung. Durch Hülfe von 613; indem man als gegebenen Winkel einen Rechten nimmt. — Fig. 36.

Bew. Aus 202, Zus. 4.

Zweite Auflösung. Durch Hülfe von 633, indem man HE so nimmt, daß HG : AB = AB : HE.

Bew. Aus 202, Zus. 4.

Dritte Auflösung. Errichte (Fig. 37) auf der gegebenen Geraden HG die Senkrechte GL, und mache sie gleich der Seite des gegebenen Quadrates; ziehe darauf HL, und errichte auf ihr in L die Senkrechte LF, die bis zum Durchschnitt F mit der verlängerten HG verlängert wird: GF ist die andere Seite des gesuchten Rechtecks.

Bew. Aus 89, oder aus 252.

616. Ein Parallelogramm JO (Fig. 38) zu construiren, welches einer beliebigen geradlinigen Figur ABCDEF gleichflächig und in welchem ein Winkel vorgeschriebene Größe hat.

Eucl. I, 45.

Auflösung. Ziehe aus der Ecke F die Diagonalen FB, FC, FD; mache (612) Prllgr. MNPO = ABF, und wende dann 613 an.

617. Ein Dreieck LFJ Fig. 39 zu construiren, welches gleichflächig mit einer beliebigen geradlinigen Figur E und in welchem ein Winkel vorgeschriebene Größe hat.

L. G. III, Aufg. 10.

Auflösung. Durch Hülfe von 616 construire Prllgr. FGKL und mittelst 612 Dreieck W. LFJ.

618. Ueber einer gegebenen Geraden KL (Fig. 40) ein Parallelogramm NOLK, oder ein Dreieck KML zu construiren, welches einer

gegebenen Figur ABCD inhaltsgleich ist, und einen Winkel von vorgeschriebener Größe hat.

Clavius zu Eucl. I, 45.

Auflösung. Mache nach Anleitung von 616 Prllgr. FH = ABCD und construire alsdann über KL Prllgr. KLON oder Dr. KLM so, daß es = FH; (614).

619. Ein Quadrat zu construiren, welches einem gegebenen Rechteck KG (Fig. 41) oder einer andern geradlinigen Figur gleichflächig ist.

Eucl. II, 14. — L. G. III, Aufg. 6.

Auflösung. Verwandle zuerst die gegebene Figur in ein Rechteck FKJG, und suche dann nach Anleitung von 635 GL; diese Gerade ist die Seite des gesuchten Quadrates.

Bew. Aus 89 oder aus 252.

620. Ein Paralleltrapezium in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Erste Auflösung. Wenn ABCD (Fig. 42) das gegebene Trapezium, dessen Seiten AB, DC parallel sind, so mache BJ = JC, ziehe AJE und verfahre mit der Geraden DE nach Anleitung von 589 ꝛc.

Bew. △ ABJ ≌ △ CJE, also △ ADE = ABCD ꝛc.

Zweite Auflösung. ABHP (Fig. 10) sei das gegebene Trapezium, dessen Seiten AB und PH parallel. Verlängere PA und HB bis sie sich schneiden in C; theile PH nach Anleitung von 589 ꝛc. Die Trapezia APDU, UDET ꝛc. sind die gesuchten Theile.

Bew. Aus 196, und 84.

Zus. Diese Auflösung ist auch auf Parallelogramme anwendbar.

Anmerkung. Diese zweite Auflösung ist der ersten vorzuziehen.

621. Ein Trapezium ABCD (Fig. 43) in zwei gleiche Theile AFKD, und BFKC zu theilen.

Auflösung. Halbire AB in F (588); fälle die Senkrechten AE, BJ (586); theile die DC in K so, daß DK : KC = BJ : AE (630), ziehe endlich FK.

Vorber. zum Bew. Ziehe AK, BK.

Bew. Aus 84, angewandt auf die Dreiecke AKF und BKF und aus 202, Zus. 4.

Dritter Abschnitt.

Von den Summen und Unterschieden mehrerer geradliniger Figuren.

---

622. Die Summe oder den Unterschied von zwei geradlinigen Figuren A und B (Fig. 44) zu finden.

Clavius zu Eucl. I, 45.

Auflösung. Durch Hülfe 616 und 618 mache das Rechteck CDGH gleichflächig der größern Figur und construire dann über DG, gleichwinkelig mit CDGH das Rechteck DGFE, oder DGKJ; so ist CHFE

oder CHKJ das Gesuchte, je nachdem die Summe oder der Unterschied der beiden Figuren verlangt wird.

Bew. Aus 72, Zus. 3.

623. Die Summe von einer beliebigen Anzahl geradliniger Figuren zu finden.

Clavius zu Eucl. I, 45.

Auflösung. Durch Hülfe von 616 und 618 construire man die Rechtecke CHKJ (Fig. 44), JDGK, DGFE ꝛc., so daß sie beziehungsweise den gegebenen Figuren gleichflächig sind ꝛc.

Bew. Aus 72.

624. Ein Quadrat zu construiren, welches so groß ist als eine beliebige Anzahl gegebener über den Linien A, B, C, D, E (Fig. 45) beschriebener Quadrate zusammen genommen.

Clavius zu Eucl. I, 47. — L. G. III, Aufg. 11.

Auflösung. Durch 87. — Das über F construirte Quadrat ist das gesuchte.

625. Ein Quadrat zu construiren, welches gleich dem Unterschiede von zwei, über den Linien A und B (Fig. 46) beschriebenen Quadraten ist.

Clavius zu Eucl. I, 47. — L. G. III, Aufg. 11.

Auflösung. Durch 588, den dritten Forderungssatz, und 582.

Bew. Aus 246, und 87, Zus. 1.

Zus. Eine Verbindung dieser und der vorhergehenden Aufgabe ist es, wodurch man ein Quadrat findet, welches gleich dem Unterschiede zweier Quadratsummen ist.

626. Wenn zwei über den Linien A und B (Fig. 47) beschriebene Quadrate gegeben sind, zwei andere, gleiche oder ungleiche, Quadrate zu finden, deren Summe gleich der Summe der gegebenen ist.

Clavius zu Eucl. I, 47.

Erste Auflösung. Es werden angewandt der Reihe nach: Erster Forderungssatz, 588, vierter Forderungssatz, 584, erster Forderungssatz, 588, dritter Forderungssatz, 584, erster Forderungssatz.

Bew. Aus 45, 246, und 87.

Zweite Auflösung. Werden die gesuchten Quadrate ungleich verlangt, so braucht man blos den ersten Forderungssatz in Verbindung mit 584 anzuwenden. Die Aufgabe ist aber dann unbestimmt, indem sich unendlich viele Paare von Quadraten finden lassen, die der Forderung genügen. Jeder Punct im Umfange des beschriebenen Halbkreises ist ein zur Auflösung sich eignender Punct.

Bew. Aus 246, und 87, Zus.

627. Wenn zwei Quadrate EG und AC (Fig. 48) gegeben sind, an das kleinere AC eine Figur ADCMEK anzusetzen, welche gleichflächig dem größern Quadrate ist und das Ganze BCMEK wieder zu einem Quadrate macht.

Clavius zu Eucl. I, 47.

Auflösung. Nimm BJ = FG und BM = AJ ꝛc.

Bew. Aus 87.

628. Ein beliebiges neck in ein (n — 1)eck zu verwandeln.

Auflösung. Ziehe DE (Fig. 49) || CF ꝛc.

Bew. Aus 84.

Drittes Buch.

Von proportionalen oder verhältnißgleichen Linien.

629. Eine gegebene Gerade AB (Fig. 50) nach demselben Verhältniß zu theilen, nach welchem eine andere gegebene Gerade AC (in D und E) getheilt ist.

Eucl. VI, 10.

Auflösung. Durch 587.

Bew. Aus 196, Zus. 1.

Anmerkung. Die meisten der hieher gehörigen Aufgaben können bequem durch den Proportionalzirkel aufgelöst werden, siehe 196, Anm. 2.

630. Eine gegebene Gerade FE (Fig. 51) so zu schneiden (im Puncte J), daß die erhaltenen Stücke EJ, FJ dasselbe Verhältniß zu einander haben, wie zwei gegebene Gerade AB, CD.

Clavius zu Eucl. VI, 10.

Auflösung. Nimm FH = CD, EG || FH und = AB ꝛc.

Bew. Aus 196, Zus. 1.

631. Von zwei gegebenen geraden Linien ML, AB (Fig. 52) die eine AB, welche wenigstens doppelt so groß als die andere ist, in zwei solche Stücke AF, FB zu theilen, daß zwischen ihnen die andere Gerade ML die mittlere Proportionale ist.

Clavius zu Eucl. VI, 13.

Auflösung. Beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in A eine Senkrechte AC und mache sie gleich ML ꝛc.

Bew. Aus 252.

Anmerkung 1. Der Grund für die Bedingung, daß ML nicht größer als die Hälfte von AB sein darf, leuchtet aus der Auflösung selbst hervor.

Anmerkung 2. Nimmt man BG = AF, so leistet der Durchschnittspunct G der Forderung ebenfalls Genüge. Es giebt also zwei Puncte auf AB, die das Verlangte leisten.

632. Zu zwei gegebenen Geraden AB und AC (Fig. 54) die dritte Proportionale AE zu finden.

Eucl. VI, 11.

Auflösung. Nimm AD = AC und DE || BC.

Bew. Aus 196, Zus. 1.

633. Zu drei gegebenen Geraden A, B, C (Fig. 55) eine vierte Proportionale zu finden.

Eucl. VI, 12. — L. G. III, Aufg. 2.

Auflösung. Nimm DG = A, DE = B, GH = C ꝛc.

Bew. Aus 196, Zus. 1.

634. Wenn drei Gerade A, B, C (Fig. 53) gegeben sind, eine vierte GH zu finden, welche zur dritten dasselbe Verhältniß hat, wie die erste zur zweiten.

Clavius zu Eucl. VI, 12.

Auflösung. Nach Anleitung von Forderungssatz 1, 583, und 587.

Bew. Aus 196, Zus. 1.

635. Eine mittlere Proportionale DF zwischen zwei gegebenen Geraden AF und BF (Fig. 52) zu finden.

Eucl. VI, 13. — L. G. III, Aufg. 3.

Auflösung. Vereinige AF und FB zu einer einzigen Geraden beschreibe dann über AB einen Halbkreis und errichte in F die Senkrechte FD.

Bew. Aus 252.

Anmerkung. Um die Aufgabe mittelst des Proportionalzirkels zu lösen, bedient man sich derjenigen Linie, welche unter dem Namen „ligue des plans" oder auch „geometrische Linie" auf demselben verzeichnet ist. Gesetzt es solle zwischen P und R, von denen P die kleinere, eine mittlere Proportionale gefunden werden. Man trage beide Linien vom Mittelpuncte des Proportionalzirkels aus auf der Linie der gleichen Theile auf und bestimme so die gegenseitige Länge derselben durch die Menge der gleichen Theile, die jede in sich faßt. Man möge auf diese Weise z. B. für P die Zahl 36 und für R die Zahl 100 gefunden haben. Man öffne nun den Proportionalzirkel so weit, daß die beiden Puncte der geometrischen Linie auf beiden Hälften desselben, bei denen dieselbe Zahl steht, welche die Länge von R bezeichnet, also in unserm Beispiele 100, genau um die Länge von R von einander entfernt sind, so ist die Entfernung derjenigen beiden Puncte auf eben diesen geometrischen Linien beider Zirkelhälften, deren jedem die Zahl 36 — Maaß für die Länge von P — zugehört, die gesuchte mittlere Proportionale. Denn wenn in Fig. 54 AD und AE die geometrischen Linien und zwar D und E die Puncte, zu denen die Zahl 100, B und C aber diejenigen, zu denen 36 gehört, so ist, wenn $DE = R$, $AD : AB = R : BC$, also auch $\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = R^2 : \overline{BC}^2$, aber nach der früher (219, Anm. 2.) erörterten Eigenschaft der geometrischen Linie ist auch: $\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = R : P$, also $R : P = R^2 : \overline{BC}^2$, mithin $P : BC = BC : R$. — In unserm Beispiel würde die Zahl 60 das Maaß für die Länge von BC bilden.

636. Wenn von drei proportionalen Linien die mittlere ML (Fig. 52) und die Summe AB der beiden äußern gegeben ist, diese letztere selbst zu finden.

Tacquet Zus. 2. zu Eucl. VI, 13.

Auflösung. Durch Anwendung von 588, Forderungssatz 3, 585, 583, und zweimalige Anwendung von 587.

Bew. Aus 252.

637. Zwischen zwei gegebenen Geraden, 3, 7, 15, 31 u. s. w. allgemein $2^n - 1$ mittlere Proportionalen zu finden.

Tacquet Zus. 3. zu Eucl. VI, 13.

Auflösung. Durch 635.

Anmerkung 1. Der Grund, warum man bei dem Auffinden dieser mittlern Proportionalen auf die Zahlen von der Form $2^n - 1$ beschränkt ist, ergiebt sich leicht aus Folgendem: Man kann streng geometrisch zunächst immer nur eine mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Geraden A und B finden. Aber wenn diese (M_1) gefunden ist, so kann man durch dasselbe Verfahren eine mittlere Proportionale (M_2) zwischen A und M_1 und eine solche (M_3) zwischen M_1 und B, also drei mittlere Proportionalen zwischen A und B finden. Wiederholt man dasselbe Verfahren, indem man zwischen A und M_2, zwischen M_2 und M_1, zwischen M_1 und M_3 und endlich zwischen M_3 und B aufs neue mittlere Proportionalen sucht, so hat man nun sieben mittlere Proportionalen zwischen A und B rc.

Anmerkung 2. Ueber das Auffinden von zwei mittlern Proportionalen.

Schon die griechischen Geometer haben sich viel Mühe gegeben mit der Lösung der Aufgabe: zwischen zwei gegebenen Geraden zwei mittlere Proportionalen zu finden. Allein dieselbe läßt sich streng geometrisch (im Sinne der Alten) d. h. durch alleinigen Gebrauch von Lineal und Zirkel nicht lösen.

Sehr ausführlich hat diesen Gegenstand behandelt, Eutocius, der Commentator des Archimedes, in den Anmerkungen zum zweiten Satze des zweiten Buches der Archimedeischen Schrift: über Kugel und Cylinder. Er theilt die Auflösungen unserer Aufgabe mit, welche gegeben haben, Plato, Hero, Philo der Byzantiner, Apollonius, Diocles, Pappus, Sporus, Menechmus, Archytas, Eratosthenes und Nicomedes. Ueber diese

letztere Auflösung, die des Nicomedes verbreitet sich auch Pappus in seinen mathem. Sammlungen, s. IV, 22, 23*).

Man kann alle diese Auflösungen in zwei Hauptclassen bringen, nämlich solche die noch andere und höhere Hülfsmittel als die gerade Linie und den Kreis in Anspruch nehmen, und solche, die sich zwar auf den Gebrauch von Zirkel und Lineal beschränken, aber bei der Art dieses Gebrauches ein Probiren oder etwas, was dem gleich kömmt, nicht vermeiden, so daß die Auflösung mehr eine mechanische als eine geometrische zu nennen ist.

Zu der erstern Classe gehören zuvörderst die beiden, welche durch Hülfe der zwei sogenannten mechanischen krummen Linien der Conchoide des Nicomedes und der Cissoide des Diocles zu Stande gebracht werden; alsdann auch diejenigen, welche auf Anwendung der Kegelschnitte beruhen. Menechmus löste unser Problem mittelst des Durchschnitts einer Parabel und einer Hyperbel, und auch mittelst des Durchschnitts zweier Parabeln.

Diese Auflösungen, die Hülfsmittel erfordern, welche nicht in das Gebiet der Elementargeometrie (nach der von den Alten festgesetzten Begränzung) gehören, lassen sich daher hier auch gar nicht mittheilen.

Die übrigen Auflösungen sind diejenigen, welche durch Zirkel und Lineal aber nicht ohne ein Probiren zu Stande gebracht werden. Es mögen folgende hier Platz finden:

1. Auflösung des Plato. Fig. 56.

Die Gründe, auf denen diese Auflösung beruht, sind schon früher, in 209, Zus. 4, erörtert worden.

Man lege die beiden Geraden FD, DB, zwischen denen die beiden mittlern Proportionalen gesucht werden sollen, unter einem rechten Winkel an einander, verlängere dessen Schenkel über den Scheitel hinaus unbegränzt bis M und N; nehme nun zwei Winkelhaken FAC, ECB und bringe sie in eine solche gegenseitige Lage, daß während von dem einen FAC die Ecke A auf der Geraden BDM liegt und die Kante des Arms AF durch den Endpunct F geht, die Ecke C des andern auf der Geraden FDN sich befindet, die Kante des einen Arms durch den Endpunct B geht und der andere Arm an dem Arme AC des ersten Winkelhakens FAC anliegt. AD und DC sind die beiden gesuchten Linien, da FA : AD = AD : DC = DC : DB.

2. Auflösung des Cartesius. Fig. 57.

Sie stimmt mit der vorigen insofern überein, als sie auch durch Hülfe von Winkelhaken zu Stande gebracht wird; aber sie ist allgemeiner und umfassender, indem sie auch noch anwendbar bleibt, wenn vier, sechs, acht ꝛc. mittlere Proportionalen gefunden werden sollen. Die Gründe, auf denen sie beruht, sind schon früher in 209, Zus. 5 erläutert worden. Es sei YAZ eine Verbindung zweier um ihren gemeinschaftlichen Endpunct A beweglicher Geraden, und außerdem mehrere Winkelhaken vorhanden — zu zwei mittlern Proportionalen werden drei solcher Werkzeuge erfordert, zu vier Proportionalen fünf ꝛc. — Ein Theil dieser Winkelhaken bewegt sich mit dem einen Arme längs der Geraden AY, der andere längs AZ; von A aus nimmt man AC gleich der einen und AL gleich der andern der gegebenen Linien, zwischen denen die mittlern Proportionalen gesucht werden. Man giebt nun dem Winkel YAZ mittelst der Drehbarkeit seiner Schenkel diejenige Größe, daß während die Ecke C des ersten Winkelhakens JCB mit dem Endpunct der kleinern von den beiden gegebenen Geraden zusammenfällt, die Kante von dem einen Arm des dritten Winkelhakens KJL durch L den Endpunct der andern Geraden geht, jedoch so, daß der erste und dritte Winkelhaken durch den zweiten JBL auf die in der Figur 57 angegebene Weise verbunden sind. Man findet die dazu erforderliche Lage der drei Winkelhaken leicht durch Probiren.

3. Auflösung des Hero. Fig. 58.

Sie bedarf blos der Hülfe eines Lineals (und Zirkels) und ist folgende:

Verbinde die beiden gegebenen Geraden AB, BG rechtwinkelig, vollende das durch sie bestimmte Rechteck ABGD, ziehe dessen Diagonalen, die sich in E schneiden mögen, verlängere DA und DG unbegränzt und bringe nun ein Lineal durch Probiren in eine

*) Vorzugsweise verdient hier noch genannt zu werden die gründliche Monographie: N. Th. Reimer historia problematis de cubi duplicatione etc. Gottingae 1798.
Anmerk. des Uebers.

solche Lage HBZ, daß EZ = EH ist. AH und ZG sind die beiden gesuchten mittlern Proportionalen.

Bew. Es ist $DZ_r ZG + GT_q = TZ_q$, also $DZ_r ZG + GF_q = ZE_q$, und auf ähnliche Weise, $DH_r HA + AE_q = HE_q = DZ_r ZG + GE_q$, also DH : DZ = ZG : HA, aber es ist auch: DH : DZ = BG : ZG = HA : AB, also BG : ZG = ZG : HA = HA : AB.

Clavius geom. pract. VII, 15.

4. Auflösung des Byzantiners Philo. Fig. 59.

Sie wird durch Hülfe des Zirkels und Lineals auf folgende Weise ausgeführt:

Verbinde die beiden gegebenen Geraden AB, BC rechtwinkelig, vollende das durch sie bestimmte Rechteck ABCD, beschreibe um dasselbe den Kreis AOBCD, und bewege nun um den Punct B ein Lineal so, daß die Linien zwischen den verlängerten Rechtecksseiten DA, DC und zwischen der Kreisperipherie, die Geraden FO und BG, von gleicher Länge sind.

Bew. Aus 256, Zus. 4.

5. Auflösung des Vieta. Fig. 60.

Sie wird, wie die vorhergehende, durch Hülfe von Lineal und Zirkel zu Stande gebracht.

Beschreibe über der größern KD der gegebenen Linien als Durchmesser einen Kreis, trage in denselben die kleinere PH als Sehne ein; verlängere PH nach der einen Seite hin so, daß HL = PH, und nach der andern unbegränzt, ziehe CL und mit ihr parallel PG, lege endlich ein Lineal an C und drehe es so lange um diesen Punct, bis GA gleich CK d. i. der Hälfte der größern von den gegebenen Linien ist. AP und AK sind alsdann die beiden gesuchten mittlern Proportionalen.

Bew. Aus 256, Anmerk. 3.

Die übrigen zur zweiten Classe gehörigen Auflösungen unseres Problems hier noch mitzutheilen möchte zweckwidrig sein. Wer sich für dieselben interessirt, kann sie bei Eutocius in der oben angeführten Stelle oder in der Schrift von Reimer nachlesen.

6. Auflösung mittelst des Proportionalzirkels.

Man gebraucht dazu die Linie, welche wir früher (481, Anm.) unter dem Namen der Körperlinie kennen gelernt haben, und die auf den Proportionalzirkeln mit „Solides" oder „Cubic" bezeichnet ist. Die beiden gegebenen Geraden seien P und S und zwar letztere die größere. Man bestimme zuvörderst ihre gegenseitige Länge, indem man sie beide auf der Linie der gleichen Theile vom Mittelpuncte aus aufträgt; gesetzt die eine enthalte 160, die andere 20 solcher Theile.

Man öffne nun den Proportionalzirkel so weit, daß die beiden Puncte der Körperlinie des einen und andern Armes, zu denen die Zahl 160 gehört, genau um die Länge von S von einander entfernt sind; die Entfernung, welche alsdann die beiden Puncte der genannten Körperlinie von einander haben, zu denen die Zahl 20 gehört, bildet die größere der gesuchten mittlern Proportionalen. Denn wenn BA und CA (Fig. 50) die beiden Körperlinien des Proportionalzirkels darstellen, und zwar B und C die Puncte, zu denen die Zahl 160, G und E dagegen diejenigen, zu denen 20 gehört, so ist, wenn man BC und GE zieht: AB : AG = BC : GE = S : GE, also auch $\overline{AB}^3 : \overline{AG}^3 = S^3 : \overline{GE}^3$, aber der Natur der körperlichen Linie zufolge ist auch: 160 : 20 d. i. $S : P = \overline{AB}^3 : \overline{AG}^3$, also auch $S : P = S^3 : \overline{GE}^3$. Nun ist aber auch (160), wenn S, R, Q, P vier Größen bezeichnen, die eine geometrische Progression bilden, $S : P = S^3 : R^3$, mithin $S^3 : R^3 = S^3 : \overline{GE}^3$, also R = GE d. h. GE ist die größere der beiden mittlern Proportionalen zwischen S und P.

Ist die eine der gesuchten Linien gefunden, so erhält man die andere, indem man zwischen EG und P eine mittlere Proportionale sucht.

638. **Das Verhältniß, welches zwei Stücke AB, BC (Fig. 61) einer geraden Linie AC zu einander haben, auf der Verlängerung derselben fortzusetzen d. h. auf der Verlängerung eine beliebige Anzahl solcher Stücke zu bestimmen, von denen je zwei an einander gränzende**

das Verhältniß AB : BC zu einander haben, die also alle unter einander eine geometrische Progression bilden.

Tacquet zu Eucl. VI, 11.

Auflösung. Nimm AD, welche senkrecht auf AC in A errichtet ist, = AB, und eben so BE = BC, verbinde D und E und verlängere sowohl DE als AC; errichte in C die Senkrechte CG, nimm CN = CG, errichte in N die Senkrechte NH und nimm NJ = NH u. s. w. CN, NJ u. s. f. sind die gesuchten Linien.

Bew. Es ist:

$$\begin{aligned} AF : BF = AD : BE = AB : BC &= AF - AB : BF - BC \\ &= BF : CF = BE : CG \\ &= BC : CN \text{ etc.} \end{aligned}$$

Anmerkung. Wenn, wie in unserer Figur, AB > BC, so kann die Summe aller Glieder unserer Progression, wie groß auch die Anzahl derselben sein möge, eine bestimmte Länge AF nicht überschreiten. Man sieht hier eine geometrische Bestätigung des arithmetischen Lehrsatzes, daß die Summe einer fallenden geometrischen Reihe, selbst dann wenn die Anzahl ihrer Glieder unendlich groß angenommen wird, eine bestimmte, endliche, oft sehr geringe Größe nicht übersteigen kann. Man vergleiche 160, Zus. 6.

639. Eine gegebene Gerade nach dem äußern und mittlern Verhältniß zu theilen.

Eucl. VI, 30. — L. G. III, Aufg. 4.

Auflösung. Sie ist dieselbe, wie die frühere in 591 mitgetheilte.

640. Eine gegebene Gerade AD Fig. 62 harmonisch d. h. in drei solche Stücke AB, BC, CD zu theilen, daß die ganze Linie zu einem der äußern Stücke dasselbe Verhältniß hat, wie das andere dieser äußern zum mittlern.

Clavius zu Eucl. VI, 17, §. 7. — La Hire Sect. con. 1.

Auflösung. Nimm außerhalb AD den beliebigen Punct G, verbinde ihn mit den Endpuncten A und D; durch einen beliebig auf AD genommenen Punct B ziehe eine Gerade EBF || GD, nimm BF = BE, und verbinde F mit G, so ist der Durchschnittspunct C von FG und AD der eine und B der andere der gesuchten Puncte.

Bew. AD : AB = DG : EB = DG : BF = DC : CB.

Viertes Buch.

Von dem Verhältniß und der Aehnlichkeit geradliniger Figuren.

---

641. Das Verhältniß von zwei geradlinigen Figuren A und B Fig. 63 durch zwei gerade Linien HG, GF darzustellen.

Auflösung. Construire nach Anleitung von 616 ein Rechteck HCDG, welches gleichflächig ist der einen Figur A, und dann nach Anleitung von 618 über GD ein zweites, welches gleichflächig ist mit B.

Bew. Aus 201.

Zus. Das Verhältniß zweier Quadrate kann ebenfalls durch zwei gerade Linien ausgedrückt werden.

Auflösung und Beweis. Aus 254.

642. Ueber einer gegebenen Geraden CD (Fig. 64) eine geradlinige Figur zu construiren, welche einer gegebenen Figur ähnlich ist.
Eucl. VI, 18. — L. G. III, Aufg. 13.

Auflösung. Durch 603, Anm. 2.

Bew. Aus 218.

643. Eine geradlinige Figur N (Fig. 65) zu construiren, welche einer L von zwei gegebenen ähnlich, der andern M aber gleichflächig ist.
Euclid. VI, 25. — L. G. III, Aufg. 6.

Auflösung. Mache Rechteck ABHE = L und BHDC = M (618), nimm FB als mittlere Proportionale zwischen AB und BC und construire (642) über FB als der mit AB gleichnamigen Seite eine Figur N, welche ähnlich der L, so ist N die gesuchte.

Bew. $L : N = AB_q : FB_q = AB_q : AB_r BC = AB : BC$
$M : L = BC : AB$
also $M : N = AB_r BC : AB_r BC$
mithin $M = N$.

644. Wenn zwei entsprechende Seiten a, b von zwei ähnlichen Figuren gegeben sind, das Verhältniß dieser Figuren selbst durch zwei gerade Linien darzustellen.

Auflösung. Nimm (632) die dritte Proportionale c zu a und b, so ist a : c das gesuchte Verhältniß.

Bew. $a : b = b : c$, also $a^2 : b^2 = ab : bc = a : c$ etc.

645. Wenn das Verhältniß von zwei geradlinigen Figuren (A und B) durch zwei gerade Linien (M und N) ausgedrückt ist, das Verhältniß von einem Paare entsprechender Seiten (a, b) dieser Figuren zu finden.

Auflösung. Nimm zwischen M und N die mittlere Proportionale m ꝛc.

Bew. $a^2 : b^2 = A : B = M : N = M^2 : m^2$, also
$a : b = M : m$

646. Ein Vieleck N zu construiren, welches einem gegebenen M, von dem eine Seite A bekannt, ähnlich und außerdem das mfache desselben ist.
L. G. III, Aufg. 15.

Auflösung. Nimm zwischen A und mA die mittlere Proportionale (B) und construire (642) über dieser, als der mit A gleichnamigen Seite ein Vieleck N, welches dem gegebenen M ähnlich ist.

Bew. $N : M = B^2 : A^2 = mA^2 : A^2 = m : 1$.

Anmerkung. Da alle Kreise ähnliche Figuren sind, die sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten, so ist die Auflösung dieser so wie der beiden folgenden Aufgaben in gleicher Weise wie bei Vielecken auch bei Kreisen anwendbar.

647. Ein Vieleck (N) zu construiren, das einem gegebenen (M), von welchem eine Seite (A) bekannt, ähnlich, und mmal so klein als dieses ist.

Auflösung und Bew. ganz wie bei der vorigen Aufgabe, indem man nur statt m durchweg $\frac{1}{m}$ setzt.

Zus. Da alle Quadrate ähnliche Figuren sind, so läßt sich auf die so eben angedeutete Weise die Aufgabe lösen:

Ein Quadrat zu construiren, welches einen beliebigen Theil eines gegebenen Quadrates bildet.

L. G. III, Aufg. 12.

Anmerkung. Man kann diese Aufgabe auch durch Hülfe von 254, Zus. lösen.

648. Eine geradlinige Figur M zu construiren, welche so groß als eine beliebige Anzahl unter einander ähnlicher Figuren A, B, C, D 2c. zusammen genommen, und ihnen ähnlich ist.

L. G. III, Aufg. 14.

Auflösung. Durch Anwendung von 585, 582 und 642.

Bew. Aus 221.

Anmerkung 1. Um eine Figur zu erhalten, welche gleich dem Unterschiede von zwei ähnlichen Figuren und diesen selbst ähnlich ist, wendet man 625 und 642 an.

Anmerkung 2. Da Kreise ähnliche Figuren sind, die sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser verhalten, so gilt diese Auflösung auch für Kreise.

Fünftes Buch.

Vom Kreise.

Erster Abschnitt.

Von dem Mittelpuncte des Kreises und den geraden Linien, die sich in ihm ziehen lassen.

---

649. Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises zu bestimmen.

Eucl. III, 1. — L. G. II, Aufg. 13.

Erste Auflösung. Fig. 67. Durch Hülfe des ersten Forderungssatzes, und 588, 584, 588.

Bew. Aus 248, Zus.

Zweite Auflösung. Fig. 68. Ziehe eine beliebige Sehne AB, errichte in dem einem Endpuncte B derselben die Senkrechte BD, verbinde A und D und halbire diese Gerade.

Bew. Aus 246.

650. Für einen gegebenen Kreisbogen ADE (Fig. 69) den Mittelpunct zu finden, und den zugehörigen Kreis zu vollenden.

Eucl. III, 25.

Auflösung. Ziehe zwei beliebige Sehnen AD, AE, errichte auf ihnen in ihren Halbirungspuncten Senkrechte 2c.

Bew. Aus 248, Zus.

651. In einen Kreis eine Sehne von vorgeschriebener Länge (die natürlich kleiner als die des Durchmessers sein muß) einzutragen.

Eucl. IV, 1.

Auflösung. Aus einem beliebigen Puncte im Umfange des gegebenen Kreises beschreibe mit der gegebenen Länge als Radius einen zweiten Kreis 2c.

Bew. Leicht.

Anmerkung. Für jeden bestimmten Mittelpunct des Hülfskreises lassen sich immer zwei Sehnen ziehen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

652. In einen gegebenen Kreis eine Sehne JK (Fig. 71) einzutragen, die nicht nur vorgeschriebene Länge, sondern auch vorgeschriebene Lage hat d. h. einer von zwei gegebenen Geraden AB (die natürlich nicht größer als der Durchmesser sein darf) gleich und der andern C parallel ist.

Clavius zu Eucl. IV, 1.

Auflösung. Ziehe den Durchmesser DF ‖ C, schneide auf ihm vom Mittelpuncte aus nach beiden Seiten hin zwei Stücke LG und LH ab, von denen jedes $= \frac{1}{2}$ AB, errichte die Senkrechten GJ, HK und ziehe JK.

Bew. GJ ⧣ HK, also auch JK ⧣ GH.

Zweiter Abschnitt.

Von Kreisabschnitten und Kreisbogen.

---

653. Ueber einer gegebenen Geraden AB (Fig. 72) einen Kreisabschnitt zu construiren, in welchem jeder Peripheriewinkel die vorgeschriebene Größe N hat.

Eucl. III, 33. — L. G. II, Aufg. 16.

Auflösung. Nimm W. EAB = N (593), errichte die Senkrechte AH (585) ꝛc.

Beweis. Aus 247.

654. Einen gegebenen Kreis (Fig. 73) in zwei solche Abschnitte zu zerlegen, daß dem einen ein Peripheriewinkel von vorgeschriebener Größe N zugehört.

Eucl. III, 34.

Auflösung. Ziehe den beliebigen Radius BD, alsdann die Senkrechte BD, und nimm W. EBA = N ꝛc.

Beweis. Aus 247.

655. Einen Kreisbogen oder einen Kreisabschnitt in zwei gleiche Theile zu theilen.

Eucl. III, 30.

Auflösung. Durch Anwendung von 588 und 584.

Beweis. Aus 45 und 245, Zus. 5, nachdem vorher AD und DB gezogen sind.

Anmerkung. Durch bloße Wiederholung des eben angedeuteten Verfahrens kann man einen Bogen in 4, 8 . . . allgemein in 2^n gleiche Theile theilen. Es übersteigt dagegen die Kräfte der Elementargeometrie, einen Bogen in drei, fünf ꝛc. gleiche Theile zu theilen, und es gilt in dieser Beziehung genau dasselbe, was früher über die Theilung der Winkel gesagt worden ist. Beide Probleme hängen auf das engste zusammen.

656. Einen Quadranten in drei gleiche Theile zu theilen. Fig. 75.

Auflösung. Durch Anwendung von 601 und 655 oder 596.

Beweis. Aus 245, Zus. 5 und Zus. 3.

657. Einen Quadranten in fünf gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Construire (592) über BC (Fig. 76) als Schenkel das gleichschenkelige Dreieck BCD, in welchem jeder Winkel an der

Grundlinie doppelt so groß als der Winkel an der Spitze, und halbire diesen letztern.

Beweis. Aus 245, Zus. 5 und Zus. 3.

658. Einen Kreis zu construiren, dessen Peripherie durch drei gegebene Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, hindurchgeht.

Auflösung. Sie ergiebt sich unmittelbar aus der Vorbereitung zum Beweise des frühern Satzes 241.

Beweis. Aus 241, Zus. 2.

Dritter Abschnitt.

Von Tangenten, und von Kreisen, die einander berühren.

---

659. Von einem im Umfange eines Kreises gegebenen Punct A (Fig. 78) aus eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Auflösung. Ziehe den Radius CA und wende darauf 585 an.

Beweis. Aus 242.

660. Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Puncte A aus eine Tangente an jenen zu ziehen.

Erste Auflösung. Fig. 79. Verbinde A mit dem Kreismittelpuncte C, beschreibe über dieser Geraden als Durchmesser einen Kreis ꝛc.

Bew. Aus 242, nachdem vorher CB und CD gezogen worden.

Zweite Auflösung. Fig. 80. Beschreibe von C mit CA den Kreis KAJ, ziehe KEJ senkrecht auf CA, verbinde K und J mit C ꝛc.

Beweis. $\triangle$ ACB $\cong$ $\triangle$ ECJ ꝛc.*)

Anmerkung. Aus beiden Auflösungen sieht man deutlich genug, daß sich von jedem Puncte außerhalb eines Kreises zwei Tangenten an denselben ziehen lassen — ein Umstand, der auch schon aus 259, Zus. 2. bekannt ist.

661. Von einer gegebenen Tangente KG (Fig. 81) den Berührungspunct E zu finden.

Auflösung. Beschreibe über der beliebigen HG als Durchmesser einen Kreis EHCG ꝛc.

Beweis. Aus 242 und 246.

662. An einen gegebenen Kreis eine Tangente EG (Fig. 82) zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden AB parallel ist.

Clavius zu Eucl. III, 17.

Auflösung. Fälle vom Mittelpuncte C eine Senkrechte auf AB ꝛc.

Beweis. Aus 242.

663. Wenn zwei Kreise gegeben sind, jedoch so, daß der eine nicht ganz innerhalb des andern liegt, eine Gerade zu ziehen, welche beide zugleich berührt.

Clavius zu Eucl. III, 17.

---

*) Es giebt noch eine dritte Auflösung unserer Aufgabe, welche bei gleicher Einfachheit mit den beiden von unserm Verfasser mitgetheilten vor diesen den Vorzug hat, daß sie nicht blos für den Kreis, sondern für alle Kegelschnitte gilt. Sie ist folgende: Beschreibe sowohl einen mit dem gegebenen concentrischen Kreis, dessen Radius gleich dem Durchmesser des gegebenen, als auch einen zweiten von dem Puncte außerhalb mit seiner Entfernung vom Mittelpuncte; mit letzterem Puncte verbinde die Durchschnittspuncte der Peripherien dieser beiden Hülfskreise, so sind die Durchschnittspuncte dieser Geraden mit der Peripherie des Urkreises die gesuchten Berührungspuncte. Der Beweis ist leicht. Anm. des Uebers.

Auflösung. Erster Fall. Wenn die beiden Kreise gleich sind. Fig. 83. Ziehe GK, senkrecht auf sie GA, und AD || GK 2c.

Zweiter Fall. Wenn die Kreise ungleich sind. Fig. 84. Mit GP = dem Unterschiede der Radien beider Kreise beschreibe von G einen Kreis, ziehe an ihn von K aus eine Tangente KP 2c.

Beweis. In beiden Fällen leicht.

664. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade AC (Fig. 85) in einem vorgeschriebenen Puncte B berührt und dessen Peripherie durch einen gegebenen Punct E geht.

Auflösung. Errichte auf AC in B die Senkrechte BDG, verbinde B mit E und nimm W. BED = EBD 2c.

Beweis. Aus 242.

665. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Peripherie durch einen gegebenen Punct geht und einen andern Kreis von innen oder von außen berührt.

Clavius zu Eucl. III, 17.

Auflösung. Es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der gegebene Punct auf der Peripherie (Fig. 88^a) oder außerhalb (Fig. 88^b) oder innerhalb (Fig. 88^c) des Kreises liegt.

Ziehe denjenigen Kreisdurchmesser, welcher durch den gegebenen Punct geht und beschreibe über einer der beiden Geraden als Durchmesser, welche zwischen diesem Puncte und einem der Scheitel des Durchmessers enthalten sind, einen Kreis 2c.

Anmerkung. Liegt der gegebene Punct auf der Peripherie des gegebenen Kreises, so lassen sich unzählige Kreise construiren, welche den Bedingungen unserer Aufgabe genügen.

666. Wenn ein Punct A (Fig. 86) außerhalb eines Kreises BCD gegeben ist, einen zweiten Kreis zu construiren, der durch diesen Punct geht und den erstern von außen so berührt, daß keiner der beiden Kreise innerhalb des andern liegt.

Auflösung. Verbinde den gegebenen Punct mit dem Mittelpuncte des gegebenen Kreises, halbire das außerhalb des Kreises liegende Stück dieser Geraden 2c.

667. Wenn zwei Kreise (Fig. 87) gegeben sind, einen dritten zu construiren, der jene beiden erstern berührt, und dessen Mittelpunct in gerader Linie mit denen der beiden gegebenen Kreise.

Clavius zu Eucl. III, 17.

Auflösung. Nimm von der durch die Mittelpuncte beider Kreise gehenden Geraden ein zwischen den Durchschnittspuncten derselben mit der Peripherie des einen und andern Kreises enthaltenes Stück zum Durchmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Aus 262.

Anmerkung 1. Wenn die beiden gegebenen Kreise ganz außerhalb einander oder der eine ganz innerhalb des andern liegt, so lassen sich vier Kreise finden, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen; nur zwei dagegen, wenn jene Kreise sich schneiden *).

*) Es ist eine irrige Behauptung, die unser Verfasser hier aufstellt. Auch wenn die beiden gegebenen Kreise sich schneiden, lassen sich wie in den beiden zuerst genannten Fällen vier Berührungskreise construiren. Eine besondere Beachtung hätte vielmehr der Fall verdient, wenn die beiden gegebenen Kreise einander berühren. Dann sind unzählige Kreise möglich, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Anm. des Uebers.

Anmerkung 2. Beschreibt man aus den Mittelpuncten der beiden gegebenen Kreise zwei Kreisbogen, von denen jeder zu seinem Halbmesser die Summe zweier Radien hat, nämlich den Halbmesser desjenigen der gegebenen Kreise, mit welchem der Bogen concentrisch, und den Halbmesser des gefundenen Kreises, so ist der Durchschnittspunct dieser beiden Bogen der Mittelpunct eben dieses gefundenen Kreises.

Sechstes Buch.

Von der Beschreibung geradliniger Figuren in und um den Kreis.

---

668. In einen gegebenen Kreis ABHC (Fig. 89) ein Dreieck BAC zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreieck DEF ähnlich.

Eucl. IV, 2.

Auflösung. Ziehe die Tangente MAN; nimm W. BAM = DFE, W. CAN = D rc.

Beweis. Aus 247.

669. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck GLH (Fig. 90) zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreieck ABC ähnlich.

Eucl. IV, 3.

Auflösung. Verlängere eine der Seiten BC des gegebenen Dreiecks über beide Endpuncte hinaus. Ziehe FM beliebig, nimm W. KFM = ACD, JFM = ABE, und ziehe durch J, K, M Tangenten rc.

Beweis. Aus 104, und 20.

670. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

L. G. IV, 4.

Auflösung. Aus D (Fig. 91) mit dem Radius DF beschreibe den Bogen AFC, ziehe AC und verbinde ihre Endpuncte A und C mit dem Scheitel B des Durchmessers DFB.

Beweis. Aus 277.

671. In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Eucl. IV, 4. — L. G. II, Aufg. 15.

Auflösung. Sie fällt zusammen mit der Vorbereitung zu 272.

Beweis. Aus 272, Zus. 1.

672. Um ein gegebenes Dreieck BAC (Fig. 93) einen Kreis zu beschreiben.

Eucl. IV, 5.

Auflösung. Sie fällt zusammen mit der Vorbereitung zu 241.

Beweis. Aus 241, Zus.

673. In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben. Fig. 94.

Eucl. IV, 7.

Auflösung. Ziehe zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser rc.

Beweis. Aus 45, und 246.

674. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben. Fig. 95.

Eucl. IV, 7.

Auflösung. Ziehe zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser, und durch die Scheitel eines jeden Parallelen mit dem andern ꝛc.

Beweis. Aus 242.

675. In ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben. Fig. 96.

Eucl. IV, 8.

Auflösung. Verbinde die Halbirungspuncte von je zwei Gegenseiten ꝛc.

676. Um ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben. Fig. 97.

Eucl. IV, 9.

Auflösung. Ziehe die beiden Diagonalen ꝛc.

677. Um ein gegebenes Viereck ABCD (Fig. 98), in welchem die Summe je zweier Gegenwinkel zwei Rechte beträgt, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Ziehe eine der Diagonalen AC und wende 672 an.

Beweis. Aus 275.

678. In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck zu beschreiben.

Eucl. IV, 11. — L. G. IV, 5.

Auflösung des Euclides. Fig. 99. Beschreibe (639) das gleichschenkelige Dreieck ABC, in welchem der Winkel an der Spitze halb so groß als jeder der beiden andern, und nun (668) in den Kreis ein diesem ähnliches Dreieck EDF, halbire die Bogen DGF und EHF ꝛc.

Beweis. Aus 279, Zus.

Auflösung des Ptolemaeus. Fig. 100. Errichte auf AB in C die Senkrechte CD, halbire CB in E, verbinde E mit D und beschreibe mit dieser als Radius von E aus den Bogen DF. Die Sehne dieses Bogens ist die Seite des gesuchten Fünfecks.

Beweis. Aus 291, Zus. 3.

679. Um einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck zu beschreiben. Fig. 101.

Eucl. IV, 12.

Auflösung. Ziehe durch die Spitzen eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Fünfecks (678) Tangenten ꝛc.

Beweis. Aus 283, Zus. 2.

680. Einen Kreis in ein Fünfeck, oder allgemein in ein gegebenes regelmäßiges Vieleck zu beschreiben. Fig. 102.

Eucl. IV, 13.

Auflösung. Halbire zwei an derselben Seite liegende Winkel und verlängere die Geraden, durch welche dieß geschieht, bis zum gegenseitigen Durchschnitt ꝛc.

Beweis. Aus 274.

681. Um ein regelmäßiges Fünfeck oder allgemein um ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Eucl. IV, 14.

Auflösung. Suche den Mittelpunct des Vielecks, wenn derselbe nicht schon gegeben ist, nach Anleitung von 649.

Beweis. Aus 274.

682. In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

Eucl. IV, 15. — L. G. IV, 4.

Auflösung. Nach Anleitung von 277, Zus. 2.

683. Diejenigen regelmäßigen Vielecke zu bestimmen, welche sich durch streng geometrische Construction in den Kreis beschreiben lassen, und diese Construction für die einzelnen näher anzugeben.

Auflösung. Dreieck, Viereck, Fünfeck und Sechseck sind die einzigen Vielecke, welche sich ursprünglich d. h. unabhängig von andern Vielecken in den Kreis beschreiben lassen.

Durch Hülfe der vier genannten Vielecke kann man nun noch eine Anzahl anderer construiren und zwar auf doppelte Weise.

Einmal nämlich durch fortgesetztes Halbiren der Bogen, welche zu den Seiten der Vielecke gehören. So kann man vermittelst des Dreiecks in jeden Kreis beschreiben ein Sechseck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck .... allgemein ein regelmäßiges Vieleck von $3 . 2^n$ Seiten. Durch Hülfe des Quadrates läßt sich in einen Kreis ein Achteck, Sechszehneck ... allgemein ein regelmäßiges Vieleck von 2^n Seiten; und eben so endlich vermittelst des Fünfecks ein Zehneck, Zwanzigeck .... allgemein ein regelmäßiges Vieleck von $5 . 2^n$ Seiten beschreiben.

Ein zweites Mittel durch Hülfe der ursprünglichen in den Kreis zu beschreibenden Vielecke neue Vielecke für den Kreis zu erhalten, besteht darin, daß man zwei jener ursprünglichen zugleich in den Kreis beschreibt. Wären z. B. in Fig. 105 AD und AB die Seiten zweier regelmäßigen Vielecke von respective N und n Seiten, so faßt dann immer der Bogen BD, welcher den Unterschied der zu den beiden in Rede stehenden Vielecksseiten gehörigen Bogen bildet, N — n solcher Theile in sich, von denen jeder $\frac{1}{N . n}$ (281) der ganzen Peripherie ist. Ist man also nur im Stande den Bogen BD in N — n gleiche Theile zu theilen, so ist auch die Aufgabe gelöst, durch Hülfe eines Necks und eines necks, die beide regelmäßig und in denselben Kreis beschrieben sind, die Seite des Vielecks von N . n Seiten für eben diesen Kreis zu finden. Die verlangte Theilung des Bogens BD hat nun nicht die geringste Schwierigkeit, wenn die Zahl N — n gleich zwei oder gleich einer Potenz von zwei ist. Der erstere Fall tritt ein, wenn AD die Seite des regelmäßigen Dreiecks, AB aber die Fünfecksseite ist; denn alsdann ist $N - n = 5 - 3 = 2$. Daher hat schon Euclides (IV, 16) gelehrt, aus den Seiten des Fünfecks und Dreiecks die Seite des Funfzehnecks für einen gegebenen Kreis zu finden.

Anmerkung 1. Zuweilen läßt sich zur Auffindung der Seite von dem einen oder andern der vorher genannten Vielecke noch ein besonderes Verfahren anwenden. Dieß gilt z. B. für das Zehneck, dessen Seite Euclides und Ptolemaeus, jeder durch eine besondere Construction, zu finden gelehrt haben.

Auflösung des Euclides. Schneide den Radius AB (Fig. 30) nach dem äußern und mittlern Verhältnisse in D, mache die Sehne BC gleich dem größern der erhaltenen Stücke AD, so ist BC die Seite des Zehnecks.

Beweis. Aus 290.

Auflösung des Ptolemaeus.

Errichte auf AB (Fig. 100) in C die Senkrechte CD, halbire CB in E, beschreibe mit ED von E aus den Kreisbogen DF, so ist FC die Seite des Zehnecks.

Beweis. Aus 291, Zus. 3.

Anmerkung 2. Es giebt kein geometrisches Verfahren, wodurch man im Stande wäre, jedes beliebige regelmäßige Vieleck in den Kreis zu beschreiben. Man darf sich hierüber um so weniger wundern, je einleuchtender es ist, daß es dabei zuletzt immer auf die Theilung von Kreisbogen oder Winkeln in irgend eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile hinauskommt — eine Aufgabe, deren allgemeine Lösung, wie schon früher (allgem. Anm. zu 598) bemerkt worden ist, die Kräfte der Elementargeometrie übersteigt, aber möglich wird durch Anwendung der mechanischen Linie, welche den Namen Quadratrix führt. Durch Hülfe dieser Curve nämlich kann man ohne Schwierigkeit die Aufgabe lösen, von welcher, wie schon früher (280, Anmerk.) bemerkt wurde, die Construction jedes beliebigen regelmäßigen Vielecks in den Kreis eine leichte und einfache Anwendung ist — die Aufgabe: ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, in welchem der Winkel an der Spitze zu einem der Winkel an der Grundlinie ein vorgeschriebenes Größenverhältniß hat.

Würde z. B. verlangt, daß die genannten Winkel dasselbe Verhältniß zu einander hätten, welches die beiden Geraden BC und BA (Fig. 106) haben, so beschreibe man einen beliebigen Kreis FJHGKF, ziehe den Durchmesser FG und theile den halben Umkreis, FJHG in zwei solche Bogen FJH und HB, daß $\frown FJH = \frown HG = BA : \frac{1}{2} BC$ — Diese Theilung ist es eben, welche durch Hülfe der Quadratrix zu Stande gebracht wird — Zieht man alsdann nach GH, FH und den Radius EH, so ist:

$$BA : \tfrac{1}{2} BC = \frown FJH : \frown HB = \text{W}.\ FGH : GFH\ (335)$$

also $BA : BC = FGH : 2\ GFH = FGH : GEH$, mithin ist GEH das gesuchte gleichschenkelige Dreieck. An den Durchmesser ER (Fig. 107) lege man jetzt zu beiden Seiten die Winkel REH und REG, von denen jeder die Hälfte des Winkels GEH in Fig. 106, so ist GH die Seite des diesem Kreise zugehörigen Vielecks von $2n+1$ Seiten, wenn jeder Winkel an der Grundlinie unseres gleichschenkeligen Dreiecks das nfache des Winkels an der Spitze ist.

Anmerkung 3. Es verdient hier noch bemerkt zu werden, daß Gauſs in seinem tiefsinnigen Werke „Disquisitiones arithmeticae" und zwar in §. 365 nachgewiesen hat, daß man in den Kreis durch streng geometrisches Verfahren ein regelmäßiges Siebzehneck und allgemein jedes regelmäßige Vieleck beschreiben könne, dessen Seitenzahl eine Primzahl von der Form $2^m + 1$ sei; also unter andern die Vielecke, welche respective 3, 5, 17, 257, 65537 Ecken haben. Als Endresultat seiner Untersuchungen über diesen Gegenstand findet Gauſs, daß die Construction eines regelmäßigen Necks in den Kreis auf elementar-geometrischem Wege möglich (aber freilich in vielen Fällen umständlich und mühselig) ist, wenn die Eckenzahl N die Beschaffenheit hat, daß alle ihre ungeraden Factoren von der Form $2^m + 1$ sind und keiner derselben mehr als einmal vorkömmt. Die sämmtlichen hierher gehörigen Vielecke, deren Seitenzahlen nicht über 300 hinaus gehen, sind dem von Gauſs selbst mitgetheilten Verzeichnisse zufolge, wenn man sie durch ihre Seitenzahlen bezeichnet, folgende:

3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16
17*, 20, 24, 30, 32, 34*, 40, 48, 51*, 60
64, 68*, 80, 85*, 96, 102*, 120, 128, 136*, 160
170*, 192, 204*, 255*, 256, 257*, 272*.

Die mit Sternchen bezeichneten Vielecke sind diejenigen, um welche das ältere Verzeichniß durch Gauſs bereichert worden ist.

Der Beweis für den merkwürdigen Gauſsischen Lehrsatz läßt sich in der Elementargeometrie nicht mittheilen, da er auf Lehrsätzen der höhern Arithmetik beruht*).

Anmerkung 4. Verzichtet man für die Construction eines beliebigen regelmäßigen Vielecks in den Kreis, auf geometrische Schärfe und Strenge, und begnügt sich mit einer für die Praxis meist hinreichenden Annäherung, so kann man sich folgenden Verfahrens bedienen:

684. Ein regelmäßiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl entweder völlig genau oder blos näherungsweise in den Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Die Seitenzahl des in Rede stehenden Vielecks sei n.

*) Den einfachsten der hierher gehörigen Fälle, nämlich den für das regelmäßige Siebzehneck behandelt Legendre in einem Anhange, der sich am Ende seiner Elemens de geom. befindet. Anm. des Uebers.

Ueber dem Durchmesser AB (Fig. 108) beschreibe ein gleichseitiges Dreieck AFB; verlängere darauf den Durchmesser um seine eigne Länge, und theile die so erhaltene Linie in n gleiche Theile; einer derselben sei BD, so daß also $BD = \frac{2\ AB}{n}$; verbinde nun F mit D und verlängere sie bis zum Durchschnitt K mit der Peripherie; BK ist entweder völlig genau oder annähernd der gesuchten Vieleckseite gleich.

Beweis. Ziehe KJ senkrecht auf CB und CK; alsdann ist KCB der Centriwinkel unseres Vielecks; den wir mit x bezeichnen wollen. Es ist nun aber:

$$FC : CD = KJ : DJ = KJ : CJ - CD = \sin x : \cos x - CD$$

oder, weil $CD = CB - BD = CB - \frac{4\ CB}{n} = \frac{CB\ (n-4)}{n} = \frac{n-4}{n}$ (wenn man den Radius $CB = 1$ setzt), und $FC = CB \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ist,

$$\sqrt{3} : \frac{n-4}{n} = \sin x : \cos x - \frac{n-4}{n}$$

$$= \operatorname{tg} x : 1 - \frac{n-4}{n \cos x}$$

$$= \operatorname{tg} x : 1 - \frac{n-4}{n} . \sec x$$

Und setzt man der Kürze halber $\frac{n-4}{n} = p$

$$\sqrt{3} : p = \operatorname{tg} x : 1 - p . \sec x,$$

$$\text{also } \sqrt{3}\ (1 - p . \sec x) = p . \operatorname{tg} x$$

oder

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{p} - \sec x . \sqrt{3}$$

also

$$\frac{3}{p^2} - \frac{6 \sec x}{p} + 3 \sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

und hieraus

$$\sec^2 x - \frac{3}{p} . \sec x + \frac{p^2 + 3}{2\ p^2} = 0,$$

also $\sec x = \frac{3 - \sqrt{3 - 2\ p^2}}{2\ p}$, oder, wenn man für p seinen Werth setzt,

$$\sec x = \frac{3\ n - \sqrt{n^2 + 16\ n - 32}}{2\ (n-4)},$$

$$\text{also } \cos x = \frac{2\ (n-4)}{3\ n - \sqrt{n^2 + 16\ n - 32}}.$$

Setzt man nun successive für n die Werthe 3, 4, 5, 6 rc., so erhält man:

1. für n = 3

$$\cos x = \frac{-2}{9 - \sqrt{9 + 48 - 32}} = -\tfrac{1}{2}$$

also x = 120°, welches genau die Größe des Mittelpunctswinkels eines gleichseitigen Dreiecks ist.

2. für n = 4

$$\cos x = 0,$$

also x = 90° = dem Mittelpunctswinkel des Quadrates.

3. für n = 6

$$\cos x = \frac{4}{18 - \sqrt{100}} = \tfrac{1}{2}$$

also x = 60° = dem Mittelpunctswinkel des regelmäßigen Sechsecks.

Diese drei Fälle sind die einzigen, in denen unser Verfahren volle Genauigkeit liefert; in den übrigen gewährt es blos Annäherung. Setzt man z. B.

4. n = 5, so hat man

$$\cos x = \frac{2}{15 - \sqrt{73}} = 0{,}309793,$$

also x = 71° 57′ 20″, mithin um 2′ 40″ kleiner als der genaue Werth des Mittelpunctswinkels des regelmäßigen Fünfecks.

5. Für x = 10, erhält man

$$\cos x = \frac{12}{30 - \sqrt{228}} = 0{,}805357,$$

also x = 36° 21′ 21″, also um 21′ 21″ größer als der genaue Werth.

6. Für n = 17, erhält man

$$\cos x = \frac{26}{51 - \sqrt{329}} = \frac{26}{28} = 0{,}9285704,$$

also x = 21° 47′ 47″, also um 37′ 13″ größer als der genaue Werth rc.

Anmerkung 1. Man ersieht aus den drei letzten Fällen, wie die Fehler immer größer und größer werden, je größer die Seitenzahl des Vielecks wird.

Anmerkung 2. Das Verfahren selbst rührt von dem Italienischen Mathematiker C. Renaldini her, der es in seinem Werke: „Ars analytica" im 2ten Bd. pag. 367 und 368 mittheilte, der gegebene Beweis aber von dem Holländischen Mathematiker Nieuwland her.

Anmerkung 3. Was Renaldini selbst geglaubt hatte, dem traten später auch andere z. B. Sturm in seinem Werke: „Mathesis enucleata" bei, daß nämlich das Verfahren allgemein gültig sei d. h. in allen Fällen volle Schärfe gewähre. Allein schon Jacob Bernoulli (Opp. pag. 765) deckte den desfallsigen Irrthum auf. Man vergleiche damit, was Kästner im ersten Theil seiner geometrischen Abhandlungen p. 266 sqq. über den Gegenstand beigebracht hat.

685. Die regelmäßigen Vielecke zu bestimmen, welche sich um jeden Kreis beschreiben lassen, und zugleich die Construction anzugeben, durch welche dieß geschieht.

Auflösung. Dieselben regelmäßigen Vielecke, die sich in den Kreis beschreiben lassen, können auch um denselben beschrieben werden; man verfährt dabei durchweg auf die in 679 angedeutete Weise.

Beweis. Aus 283, Zus. 3.

686. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein bestimmtes regelmäßiges Vieleck zu beschreiben.

Auflösung. Fig. 109. Zuerst beschreibe man in einen beliebigen Kreis ein dem verlangten ähnliches Vieleck, und dann über der gegebenen Geraden AB als Grundlinie ein gleichschenkeliges Dreieck ADB, welches dem Mittelpunctsdreieck ECF jenes erhaltenen Vielecks ähnlich ist; beschreibe dann aus D mit DA als Radius einen Kreis ꝛc.

Anmerkung 1. Dieses Verfahren ist es, was dem Gebrauche des Proportionalzirkels zur Auflösung dieser Aufgabe zum Grunde liegt.

Anmerkung 2. Für einige Vielecke, wie z. B. für das Dreieck und Viereck giebt es einfachere Verfahrungsweisen; siehe 601 und 604.

Anmerkung 3. In ihrer Allgemeinheit läßt sich unsere Aufgabe natürlich eben so wenig mit geometrischer Schärfe lösen, als diejenige, auf welche ihre Auflösung zurückgeführt und von der sie daher abhängig gemacht wird. Aber für blos annähernde Genauigkeit giebt es Constructionen.

Es sei AB (Fig. 110) eine gegebene Gerade. Beschreibe über ihr ein gleichseitiges Dreieck ACB, ziehe die Senkrechte CD; verlängere sie über C hinaus bis K um die Länge von CA; alsdann sind, wie leicht zu sehen, die Winkel ACB und AKB die respectiven Mittelpunctswinkel für das über AB zu beschreibende regelmäßige Sechseck und Zwölfeck; und eben so leicht ist es zu sehen, daß wenn man KL = AK nimmt, ALB der Mittelpunctswinkel des Vierundzwanzigecks wird; daß man also durch die Fortsetzung dieser einfachen Construction den Mittelpunctswinkel des über AB zu beschreibenden regelmäßigen Vielecks von $3 \cdot 2^n$ Seiten finden kann, und zwar nicht blos annähernd, sondern völlig genau. Theilt man nun ferner CK in sechs gleiche Theile, so sind näherungsweise AEB, AFB, AGB die respectiven Mittelpunctswinkel des über AB zu beschreibenden regelmäßigen Siebenecks, Achtecks, Neunecks. Denn, um nur für den einen Fall, für das Neuneck die nöthige Nachweisung beizufügen, setzt man AB = 1, so ist $AD = CG = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866025$, also $DG = 1{,}366025$, also:

$$AD : DG = 0{,}5 : 1{,}366025 = 1 : 2{,}73205$$
$$= \text{sin. tot} : \text{cotg } AGD,$$

also W. AGD = 20° 6′, mithin nur um 6′ von dem wahren Werthe des dem regelmäßigen Achtecke zugehörigen Mittelpunctswinkels verschieden — ein Fehler, der verhältnißmäßig unbedeutend ist.

Die Scheitel der Mittelpunctswinkel für das Dreizehneck, Vierzehneck ꝛc. bis zum Dreiundzwanzigeck erhält man nun auf ganz ähnliche Weise, indem man nämlich KL in 12 gleiche Theile theilt.

Dem Achtzehneck würde also M der Halbirungspunct von KL zugehören; und es wäre daher:

$$KM = \tfrac{1}{2}\, KL = \tfrac{1}{2}\, AK = \tfrac{1}{2}\sqrt{0{,}5^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 1)^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{0{,}25 + 1{,}866^2}$$
$$= 0{,}9231$$

also
$$MD = DK + KM$$
$$= 1{,}866 + 0{,}9231 = 2{,}789$$

mithin

$$AD : DM = \tfrac{1}{2} : 2{,}789 = 1 : 5{,}578 = \text{sin. tot.} : \text{cotg } AMD,$$

daher AMD = 10° 11′ und mithin nur 11′ vom wahren Werthe verschieden.

Man sieht leicht, wie man das Verfahren noch weiter fortführen könnte.

Anmerkung 4. Diese Auflösung, jedoch noch etwas verschieden von der hier mitgetheilten, findet sich in: Sebastien Le Clerc geometrie sur le papier et sur le terrain, und zwar im 6ten und 7ten Satz des zweiten Buches, aber ohne auch nur eine Andeutung der Gründe, auf welche sie sich stützt.

Bemerkung:

Da in den frühern Büchern die Aufgaben öfters so citirt sind, wie sie van Swinden aufgeführt hat, nämlich in jedem Buche von 1 an gezählt, so folgt hier eine vergleichende Tabelle zur leichtern Auffindung der Nummern:

Erstes Buch.	
582	1
583	2
584	3
585	4
586	5
587	6
588	7
589	8
590	9
591	10
592	11
593	12
594	13
595	14
696	15
597	16
598	17
599	18

Zweites Buch.	
600	1
601	2
602	3
603	4
604	5
605	6
606	7
607	8
608	9
609	10
610	11
611	12
612	13
613	14
614	15
615	16
616	17
617	18
618	19
619	20
620	21
621	22
622	23
623	24
624	25
625	26
626	27
627	28
628	29

Drittes Buch.	
629	1
630	2
631	3
632	4
633	5
634	6
635	7
636	8
637	9
638	10
639	11
640	12

Viertes Buch.	
641	1
642	2
643	3
644	4
645	5
646	6
647	7
648	8

Fünftes Buch.	
649	1
650	2
651	3
652	4
653	5
654	6
655	7
656	8
657	9
658	10
659	11
660	12
661	13
662	14
663	15
664	16
665	17
666	18
667	19

Sechstes Buch.	
668	1
669	2
670	3
671	4
672	5
673	6
674	7
675	8
676	9
677	10
678	11
679	12
680	13
681	14
682	15
683	16
684	17
685	18
686	19

Anhang
(vom Verfasser.)

687. Vorerinnerung. In diesen Anhang gedenke ich außer einigen zum Theil berichtigenden Zusätzen zu früher behandelten Lehrsätzen, aufzunehmen die Formeln, welche die Grundlage des Potenzirens und Wurzelausziehens ausmachen, und die Reihen, in welche sich sowohl die Logarithmen als die goniometrischen Functionen entwickeln lassen. Da diese Gegenstände streng genommen nicht zur Geometrie gehören, so können sie in einem Lehrbuche dieser Wissenschaft höchstens als Anhang einen Platz finden. In verschiedenen Abschnitten sollen die verschiedenen vorher angedeuteten Gegenstände abgehandelt werden.

Erster Abschnitt.

Berichtigende Zugabe zu dem dritten Zusatze des Lehrsatzes 91 im zweiten Buche.

688. Der dritte Zusatz zu dem Lehrsatz 91 im zweiten Buche hat zum Zweck, nachzuweisen, daß aus dem Hauptsatze (dem Lehrsatze des Pappus) der diesem unmittelbar vorausgehende Satz 90 hergeleitet werden könne. Da ich mich dabei des Castillon'schen Verfahrens bediente, welches Eigenschaften ähnlicher Dreiecke zu Hülfe nimmt, so verleitete mich dieß zu der in Nro. 4 der dritten Anmerkung ausgesprochenen Behauptung, daß die Herleitung des Satzes 90 aus dem Satze des Pappus überhaupt ohne Hülfe der Aehnlichkeit der Dreiecke nicht geschehen könne. Dieß ist aber nicht streng wahr, da der Mathematiker Peter Albertus Munk einen Beweis zu Stande gebracht hat, welcher der ähnlichen Dreiecke nicht bedarf, sondern sich blos auf Sätze stützt, die im zweiten Buche enthalten sind. Der Gegenstand ist wichtig genug, diesen Beweis hier noch mitzutheilen.

Nachdem man auf die früher (p. 54) angegebene Weise dargethan hat, daß:

$$AC_q = AB_q + BC_q \pm (AB_r BS + BC_r BT)$$

fahre man also fort:

$$AC_q = AS_q + CS_q = AT_q + CT_q = AS_q + BC_q - BS_q = CT_q + AB_q - BT_q \text{ oder } BC_q - CT_q + BT_q = AB_q - AS_q + BS_q$$

Nun ist aber für das spitzwinkelige Dreieck ABC in Fig. 73

$$BC_q - TC_q = BT_q + 2\, BT_r CT$$

und $AB_q - AS_q = BS_q + 2\, AS_r BS$,

also auch:

$$2\,BT_q + 2\,BT_rCT = 2\,BS_q + 2\,AS_rBS$$

und $BT_r\,(BT + CT) = BS_r\,(BS + AS)$

oder $BT_rBC = BS_rAB$

mithin ist für ein in B spitzwinkeliges Dreieck:

$$AC_q = AB_q + BC_q - 2\,AB_rBS = AB_q + BC_q - 2\,BC_rBT$$

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich die Gleichflächigkeit unserer in Rede stehenden Rechtecke für ein stumpfwinkeliges Dreieck darthun.

Zweiter Abschnitt.

Ueber das Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzeln.

689. Im zweiten Buche in der ersten, so wie in den beiden letzten Anmerkungen zu 73, ferner im eilften Buche im zweiten Zusatz zu 452 sind die Formeln mitgetheilt worden, auf denen das Ausziehen der Wurzeln aus Zahlen beruht. Es wird gut sein, jetzt noch näher anzugeben, wie die Regeln für das Wurzelausziehen aus jenen Formeln hergeleitet werden.

Die Quadrat- oder Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl ziehen heißt diejenige Zahl finden, die, respective einmal oder zweimal durch sich selbst multiplicirt, ein Product giebt, welches der gegebenen Zahl gleich ist.

Die Zahl, welche Wurzel ist, kann man aus so viel Theilen bestehend ansehen, so viel Ziffern sie enthält, z. B. 376 aus den drei Theilen 300, 70, 6, oder auch 3, 7, 6, wo man im letzten Falle nur nicht vergessen darf, daß jede Ziffer ihren Werth verzehnfacht, so oft ihr eine andere Ziffer zur rechten Hand zugesetzt wird. Die Regel für das Wurzelausziehen zerfällt in zwei Theile: Bestimmung der Anzahl der Ziffern der Wurzel, und Auffinden dieser einzelnen Ziffern selbst.

Vom Ausziehen der Quadratwurzel.

690.

Die Wurzeln aller Zahlen zwischen 1 und 100 sind einzifferig
— — — — — 100 und 10000 — zweizifferig
— — — — — 10000 und 1000000 — dreizifferig

allgemein die Wurzeln aller Zahlen, die $2n - 1$ oder $2\,n$ Ziffern haben, sind $n$zifferig. Man kann daher die Anzahl der Ziffern, aus denen die gesuchte Wurzel einer gegebenen Zahl bestehen muß, mit der größten Leichtigkeit dadurch bestimmen, daß man von der rechten nach der linken Hand hin die Ziffern dieser Zahl zu je zweien abtheilt. Die Anzahl der auf diese Weise entstandenen Abtheilungen, von denen die äußerste zur Linken bald nur eine, bald, gleich allen übrigen Abtheilungen, zwei Ziffern enthält, ist gleich der Anzahl der Ziffern der gesuchten Wurzel. So würde man z. B. bei 1764, die beiden Abthei-

lungen 17|64, bei 36864, die drei Abtheilungen 3|68|64 erhalten, und daraus schließen, daß die Wurzel von jener zweiziffrig, von dieser dagegen dreiziffrig ist.

691. Um nun diese Ziffern selbst zu finden, bezeichne man die einzelnen durch a, b, c ꝛc. Eine zweiziffrige Wurzel erscheint dann unter der Form $a + b$, ihr Quadrat also $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 = a^2 + (2\,a + b)\,b$. Eine Vergleichung nun der gegebenen Quadratzahl mit den Stücken, aus denen sie dieser unsrer Formel gemäß bestehen muß, ist es, wodurch man die Wurzelziffern findet.

Sollte ich z. B. die Wurzel aus 1764 ziehen, so theilte ich zuerst die Ziffern nach der vorhin gegebenen Vorschrift ab, also 17|64 und überzeugte mich dadurch, daß die gesuchte Wurzel zweiziffrig ist, also durch $a + b$ dargestellt, und ihr Quadrat aus den Bestandtheilen $a^2 + 2\,ab + b^2$ oder $a^2 + (2\,a + b)\,b$ zusammengesetzt betrachtet werden kann. Vergleiche ich nun diese Bestandtheile mit dem gegebenen Quadrate 17|64, so muß offenbar die höhere Abtheilung 17 (eigentlich 1700) entweder genau oder nahe dem Quadrat des Zehners gleich sein; ich werde also diesen Zehner in derjenigen Zahl finden, deren Quadrat entweder genau 17 (1700) gleich ist, oder doch unter allen Quadratzahlen, die kleiner als 17 (1700) sind, dieser Zahl am nächsten kömmt. Auf diese Weise findet man ohne Schwierigkeit, daß der Zehner unsrer gesuchten Wurzel 4 (40) ist; nachdem ich das Quadrat desselben 16 (1600) von 17|64 abgezogen habe, so muß der Rest 1|64 der Theil sein, der in der Formel durch $(2\,a + b)\,b$ dargestellt wird, und namentlich muß 16 (160) entweder genau oder nahe $=$ $2\,ab$ sein; also, weil $\frac{2\,ab}{2\,a} = b$, finde ich die zweite Wurzelziffer, wenn ich die Zahl, die aus dem Rest dieser ersten Subtraction und der höhern Ziffer der niedern Abtheilung gebildet wird, durch das Zweifache des gefundenen Zehners dividire; also ist hier $\frac{16}{8}\left(\frac{160}{80}\right)$ d. i. 2 wahrscheinlich die zweite Wurzelziffer. Sie wird es gewiß sein, wenn $(2\,a + b)\,b = 164$ ist, wie dieß in der That ist; und wie ich mich überzeuge, wenn ich den gefundenen Einer (2) zum Doppelten des Zehners (80) hinzuthue und diese Summe (82) durch den Einer multiplicire. Wäre hingegen, wie dieß nicht selten der Fall ist, das genannte Product größer als der nach der ersten Subtraction noch übrige Rest des Quadrates, so würde dieß beweisen, daß der Einer zu groß genommen war.

Unser Beispiel würde demnach in vollständiger Rechnung sich also gestalten:

Zahl	Wurzel
17|64	42
16	
1|64	82
1|64	2
0	164

1. für n = 3

$$\cos x = \frac{-2}{9 - \sqrt{9 + 48 - 32}} = -\tfrac{1}{2}$$

also x = 120°, welches genau die Größe des Mittelpunctswinkels eines gleichseitigen Dreiecks ist.

2. für n = 4

$$\cos x = 0,$$

also x = 90° = dem Mittelpunctswinkel des Quadrates.

3. für n = 6

$$\cos x = \frac{4}{18 - \sqrt{100}} = \tfrac{1}{2}$$

also x = 60° = dem Mittelpunctswinkel des regelmäßigen Sechsecks.

Diese drei Fälle sind die einzigen, in denen unser Verfahren volle Genauigkeit liefert; in den übrigen gewährt es blos Annäherung. Setzt man z. B.

4. n = 5, so hat man

$$\cos x = \frac{2}{15 - \sqrt{73}} = 0{,}309793,$$

also x = 71° 57′ 20″, mithin um 2′ 40″ kleiner als der genaue Werth des Mittelpunctswinkels des regelmäßigen Fünfecks.

5. Für x = 10, erhält man

$$\cos x = \frac{12}{30 - \sqrt{228}} = 0{,}805357,$$

also x = 36° 21′ 21″, also um 21′ 21″ größer als der genaue Werth.

6. Für n = 17, erhält man

$$\cos x = \frac{26}{51 - \sqrt{329}} = \frac{26}{28} = 0{,}9285704,$$

also x = 21° 47′ 47″, also um 37′ 13″ größer als der genaue Werth x.

Anmerkung 1. Man ersieht aus den drei letzten Fällen, wie die Fehler immer größer und größer werden, je größer die Seitenzahl des Vielecks wird.

Anmerkung 2. Das Verfahren selbst rührt von dem Italienischen Mathematiker C. Renaldini her, der es in seinem Werke: „Ars analytica" im 2ten Bd. pag. 367 und 368 mittheilte, der gegebene Beweis aber von dem Holländischen Mathematiker Nieuwland her.

Anmerkung 3. Was Renaldini selbst geglaubt hatte, dem traten später auch andere z. B. Sturm in seinem Werke: „Mathesis enucleata" bei, daß nämlich das Verfahren allgemein gültig sei d. h. in allen Fällen volle Schärfe gewähre. Allein schon Jacob Bernoulli (Opp. pag. 765) deckte den desfallsigen Irrthum auf. Man vergleiche damit, was Kästner im ersten Theil seiner geometrischen Abhandlungen p. 266 sqq. über den Gegenstand beigebracht hat.

685. Die regelmäßigen Vielecke zu bestimmen, welche sich um jeden Kreis beschreiben lassen, und zugleich die Construction anzugeben, durch welche dieß geschieht.

Auflösung. Dieselben regelmäßigen Vielecke, die sich in den Kreis beschreiben lassen, können auch um denselben beschrieben werden; man verfährt dabei durchweg auf die in 679 angedeutete Weise.

Beweis. Aus 283, Zus. 3.

686. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein bestimmtes regelmäßiges Vieleck zu beschreiben.

Auflösung. Fig. 109. Zuerst beschreibe man in einen beliebigen Kreis ein dem verlangten ähnliches Vieleck, und dann über der gegebenen Geraden AB als Grundlinie ein gleichschenkeliges Dreieck ADB, welches dem Mittelpunctsdreieck ECF jenes erhaltenen Vielecks ähnlich ist; beschreibe dann aus D mit DA als Radius einen Kreis ꝛc.

Anmerkung 1. Dieses Verfahren ist es, was dem Gebrauche des Proportionalzirkels zur Auflösung dieser Aufgabe zum Grunde liegt.

Anmerkung 2. Für einige Vielecke, wie z. B. für das Dreieck und Viereck giebt es einfachere Verfahrungsweisen; siehe 601 und 604.

Anmerkung 3. In ihrer Allgemeinheit läßt sich unsere Aufgabe natürlich eben so wenig mit geometrischer Schärfe lösen, als diejenige, auf welche ihre Auflösung zurückgeführt und von der sie daher abhängig gemacht wird. Aber für blos annähernde Genauigkeit giebt es Constructionen.

Es sei AB (Fig. 110) eine gegebene Gerade. Beschreibe über ihr ein gleichseitiges Dreieck ACB, ziehe die Senkrechte CD; verlängere sie über C hinaus bis K um die Länge von CA; alsdann sind, wie leicht zu sehen, die Winkel ACB und AKB die respectiven Mittelpunctswinkel für das über AB zu beschreibende regelmäßige Sechseck und Zwölfeck; und eben so leicht ist es zu sehen, daß wenn man KL = AK nimmt, ALB der Mittelpunctswinkel des Vierundzwanzigecks wird; daß man also durch die Fortsetzung dieser einfachen Construction den Mittelpunctswinkel des über AB zu beschreibenden regelmäßigen Vielecks von $3 \cdot 2^n$ Seiten finden kann, und zwar nicht blos annähernd, sondern völlig genau. Theilt man nun ferner CK in sechs gleiche Theile, so sind näherungsweise AEB, AFB, AGB die respectiven Mittelpunctswinkel des über AB zu beschreibenden regelmäßigen Siebenecks, Achtecks, Neunecks. Denn, um nur für den einen Fall, für das Neuneck die nöthige Nachweisung beizufügen, setzt man AB = 1, so ist $AD = CG = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866025$, also $DG = 1{,}366025$, also:

$$AD : DG = 0{,}5 : 1{,}366025 = 1 : 2{,}73205$$
$$= \text{sin. tot} : \text{cotg}\ AGD,$$

also W. $AGD = 20^\circ\ 6'$, mithin nur um 6′ von dem wahren Werthe des dem regelmäßigen Achtecke zugehörigen Mittelpunctswinkels verschieden — ein Fehler, der verhältnißmäßig unbedeutend ist.

Die Scheitel der Mittelpunctswinkel für das Dreizehneck, Vierzehneck ꝛc. bis zum Dreiundzwanzigeck erhält man nun auf ganz ähnliche Weise, indem man nämlich KL in 12 gleiche Theile theilt.

Dem Achtzehneck würde also M der Halbirungspunct von KL zugehören; und es wäre daher:

$$KM = \tfrac{1}{2} KL = \tfrac{1}{2} AK = \tfrac{1}{2}\sqrt{0{,}5^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 1)^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{0{,}25 + 1{,}866^2}$$
$$= 0{,}9231$$

$$\text{also } MD = DK + KM$$
$$= 1{,}866 + 0{,}9231 = 2{,}789$$

mithin

$$AD : DM = \tfrac{1}{2} : 2{,}789 = 1 : 5{,}578 = \text{sin. tot.} : \text{cotg}\ AMD,$$

daher $AMD = 10^\circ\ 11'$ und mithin nur 11′ vom wahren Werthe verschieden.

Man sieht leicht, wie man das Verfahren noch weiter fortführen könnte.

Anmerkung 4. Diese Auflösung, jedoch noch etwas verschieden von der hier mitgetheilten, findet sich in: Sebastien Le Clerc geometrie sur le papier et sur le terrain, und zwar im 6ten und 7ten Satz des zweiten Buches, aber ohne auch nur eine Andeutung der Gründe, auf welche sie sich stützt.

692. Besteht die Wurzel aus mehr als zwei Ziffern, so wird dadurch das ganze Verfahren im Wesentlichen gar nicht geändert, indem jede neue Ziffer durch Hülfe der bereits gefundenen, die man zusammen als eine einzige Zahl betrachtet, ganz auf dieselbe Weise bestimmt wird, wie man bei einer zweiziffrigen Wurzel den Einer durch Hülfe des Zehners findet. Denn wäre z. B. die Wurzel dreiziffrig, also von der Form $a + b + c$, so kann man ihr Quadrat $(a + b + c)^2$ in die Bestandtheile $(a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$ zerlegen. Sind nun die beiden ersten Ziffern durch das vorher ausführlich angegebene Verfahren gefunden, so ist der alsdann noch bleibende Rest von der gegebenen Zahl das, was auf die beiden Bestandtheile $2(a + b)c$ und c^2 kömmt; man findet daher die dritte Wurzelziffer mittelst einer Division durch $2(a + b)$ d. h. eben so durch Hülfe der beiden ersten Ziffern, wie man die zweite durch Hülfe der ersten fand. Und auf ganz ähnliche Weise verhält sich die Sache bei vierziffrigen, fünfziffrigen rc. Wurzeln.

693. Die Regel, welche sich hieraus für das Ausziehen der Quadratwurzeln ergiebt, ist folgende:

1. Theile die Ziffern der gegebenen Zahl (z. B. 488601) von der rechten nach der linken Hand hin paarweise ab (48|86|01);
2. Nimm die Quadratzahl (36), welche der Zahl (48), die von der einen oder von den beiden in der höchsten Abtheilung stehenden Ziffern gebildet wird, am nächsten kömmt, ohne diese jedoch jemals zu übertreffen; und ziehe beide Zahlen von einander ab. Die Wurzel (6) dieser Quadratzahl ist die höchste Wurzelziffer.
3. Setze dem durch die vorhergenannte Subtraction entstandenen Rest (12) die beiden Ziffern (86) der nächst niedrigern Abtheilung bei und betrachte die so erhaltene Zifferverbindung (1286) als eine einzige Zahl.
4. Nimm das Zweifache (12) der gefundenen Wurzelziffer und dividire damit in diejenige Zahl (128), welche man erhält, wenn man von der so eben (3) genannten Zahl (1286) die niedrigste Ziffer abschneidet; den so erhaltenen Quotienten (9) setze als zweite Wurzelziffer neben die erste.
5. Setze eben diesen Quotienten (9) dem Doppelten (12) der ersten Wurzelziffer unmittelbar zur rechten bei, und multiplicire die so entstandene Zahl (129) durch den Quotienten oder die zweite Wurzelziffer (9); ziehe dieses Product (1161) von der in 3 näher bezeichneten Zahl ab.
6. Diesem Rest (125) setze die beiden Ziffern (01) der nächst niedrigern Abtheilung bei, und betrachte diese Zifferverbindung (12501) als eine einzige Zahl.
7. Betrachte nun die Verbindung der beiden ersten Wurzelziffern als eine einzige Zahl und bestimme der in 4 aufgestellten Regel gemäß die dritte Wurzelziffer, und durch Anwendung der Regeln in 5 und 6 den Rest, mit welchem man die beiden Ziffern der nun folgenden Abtheilung (wenn eine solche vorhanden) verbinden muß, um die Zahl zu erhalten, aus welcher man durch Hülfe der drei ersten Wurzelziffern und abermalige Anwendung der Regeln

in 3 und 4, die vierte Ziffer findet. Durch dieselbe Anwendung derselben Regeln bestimme die fünfte, sechste .... nte Wurzelziffer, wenn dergleichen vorhanden sind. Geht zuletzt Alles ohne Rest auf, so ist die gegebene Zahl eine Quadratzahl, und die gefundene Wurzel der genaue Werth ihrer Quadratwurzel.

8. Bleibt dagegen ein Rest, so füge demselben zur Rechten so viel Nullenpaare bei, als Decimalen erfordert werden, um der gesuchten Wurzel, die dann nur als Näherungswerth sich darstellen läßt, den gewünschten Grad annähernder Genauigkeit zu geben, und betrachte jedes dieser Nullenpaare als eine neue zu den schon vorhandenen hinzugekommene Zifferabtheilung.

9. Hat man einen Bruch (z. B. $\frac{16}{81}$), so zieht man die Wurzel sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner; der aus diesen Wurzeln gebildete Bruch $\left(\frac{4}{9}\right)$ ist die Wurzel des gegebenen Bruchs; oder wenn Zähler und Nenner keine Quadratzahlen sind, verwandelt man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und wendet auf ihn die in 8 angegebene Regel an.

694. Zu noch größerer Verdeutlichung der so eben angegebenen Regeln mögen folgende vollständig durchgerechnete Beispiele folgen:

1. Die Wurzel aus 488601 zu ziehen.

```
48|86|01 | 699
36       | 129   138 9
-----    |   9       9
12 86    | ----------
11 61    | 1161  125 01
------   |
  125 01
  125 01
  ------
       0
```

Die gesuchte Quadratwurzel ist also 699.

2. Die Quadratwurzel aus 300 zu ziehen.

```
3|00            | 17, 3205 . . .
1               | 27 |  343 | 3462
----            |  7 |    3 |    2
2 00            | 189| 1029 | 6924
1 89            
----              .     346405
  11 00                      5
  10 29                -------
  -----                1732025
     71 00
     69 24
     -----
      1 76 00
     --------
      1 76 00 00
      1 73 20 25
     -----------
         2 79 75
```

Die gesuchte Wurzel ist nahe: 17,3205.

3. Die Quadratwurzel aus 0,273 zu ziehen.

Da, wie bekannt, ein Decimalbruch nie eine Veränderung seines

Werthes dadurch erleidet, daß man ihm eine beliebige Anzahl Nullen zur rechten Hand zusetzt, so ist es unter allen Umständen möglich, die Anzahl der Decimalen eines gegebenen Decimalbruchs, aus dem die Quadratwurzel zu ziehen ist, dahin zu vervollständigen, daß nicht nur der Nenner eine Quadratzahl wird, sondern auch die Wurzel aus dem Zähler eine vorgeschriebene Anzahl von Ziffern erhält. Demgemäß hänge man an den Zähler unseres Decimalbruches noch fünf Nullen und ziehe alsdann aus der so entstandenen Zahl die Quadratwurzel; also:

```
27|30|00|00 | 5224
25          |  102 | 1042 | 10444
--          |    2 |    2 |     4
 2 30       |  --- | ---- | -----
 2 04       |  204 | 2084 | 41776
 ----
   26 00
   20 84
   -----
    5 16 00
    4 17 76
    -------
      95 24
```

Die Quadratwurzel aus dem Nenner unseres Bruches ist 10000, also die Wurzel aus dem ganzen Bruche annähernd $= \frac{5224}{10000}$, oder

$$\sqrt{2{,}73} = 0{,}5224\ldots$$

Leicht sieht man, daß man den Grad der Annäherung durch eine hinreichende Anzahl von Nullen, welche man dem Decimalbruche zur rechten Hand zusetzt, so hoch steigern kann, als man nur will.

Vom Ausziehen der Cubikwurzel.

695. Da die Cubikwurzeln aller Cubikzahlen zwischen 1 und 1000 einziffrig, die Wurzeln der Cubikzahlen zwischen 1000 und 1000 000 zweiziffrig, die Wurzeln der Cubikzahlen zwischen 1000 000 und 1000 000 000 dreiziffrig u. s. f., allgemein also, da die Cubikwurzeln aller Cubikzahlen, welche nicht weniger als $3n-2$ und nicht mehr als $3n$ Ziffern enthalten, $n$ziffrig sind, so kann man darauf ein leichtes und einfaches Verfahren gründen, für jede gegebene Cubikzahl die Zahl der Ziffern ihrer Wurzel zu bestimmen. Man theilt nämlich von der rechten zur linken Hand fortgehend die Ziffern der gegebenen Cubikzahl zu je dreien ab, (wo die äußerste Abtheilung zur linken entweder nur eine, oder zwei, oder gleich den übrigen Abtheilungen drei Ziffern enthalten wird, je nachdem die Zahl, welche die Menge der Ziffern der Cubikzahl bezeichnet, von der Form $3n-2$, oder $3n-1$, oder $3n$ ist) und hat in der Anzahl der so erhaltenen Abtheilungen die gesuchte Anzahl der Ziffern der Cubikwurzel.

696. Hat man auf die eben angegebene Weise von einer gesuchten Cubikwurzel die Menge ihrer Ziffern bestimmt, so findet man diese letztern selbst besonders durch Anwendung des früher (452, Zus. 2)

erörterten Lehrsatzes, nach welchem stets $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ ist.

Demgemäß kann man also jede Cubikzahl, deren Wurzel aus zwei Ziffern a, und b besteht, welche also $= 10 \,.\, a + b$ ist, aus vier Stücken zusammengesetzt betrachten; und vorzüglich dadurch, daß man sich eine Cubikzahl in diese ihre Bestandtheile zerlegt denkt, geschieht es, daß man die einzelnen Ziffern ihrer Wurzel findet. Das Nähere hierbei läßt sich am besten an einem Beispiele erläutern. Soll die Cubikwurzel aus 74088 gezogen werden, so überzeugt man sich zuvörderst dadurch, daß man die Ziffern auf die vorher angegebene Weise abtheilt, nämlich

74|088

daß die gesuchte Cubikwurzel zweiziffrig ist. Vergleiche ich nun damit die einzelnen Bestandtheile, und zwar a^3 mit 74, weil a als Zehner ja eigentlich $a \,.\, 10$, sein Cubus also $a^3 \,.\, 1000$ und mithin die niedrigste seiner Ziffern die dritte Stelle über der Stelle der Haupteinheiten einnehmen muß, so ist offenbar der Zehner hier diejenige Zahl, deren Cubus entweder gleich 74 (eigentlich 74000) ist, oder diesem Werthe am nächsten kömmt; dieß ist aber keine andere Zahl als 4 (eigentlich 40); sie ist also die erste Ziffer der gesuchten Wurzel; man zieht nun den Cubus 64 (eigentlich 64000) dieses gefundenen ersten Theils von der gegebenen Cubikzahl ab; und behält in dem Reste 10088 denjenigen Theil übrig, welcher gleich ist $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Mit dem dreifachen Quadrat von a also mit 48 (eigentlich 4800) dividire man in den Rest 10088, so ist der Quotient 2 wahrscheinlich die zweite der gesuchten Wurzelziffern, da ja offenbar $\frac{3a^2b}{3a^2} = b$. Man multiplicire nun das dreifache Quadrat (4800) von a (40) mit b (2), ferner das dreifache Quadrat (12) von b (2) mit a (40), und bilde endlich den Cubus von b, so erhält man

$$\begin{aligned} 3a^2b &= 9600 \\ 3ab^2 &\ \ \ 480 \\ b^3 &= 8 \end{aligned}$$

also $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 10088$, mithin wenn man diese Summe von jenem nach Abzug des Cubus des Zehners gebliebenen Rest abzieht, so bleibt zum Rest Null, und man überzeugt sich dadurch, daß 42 die gesuchte Cubikwurzel ist.

Die Rechnung selbst erscheint unter folgender äußern Gestalt:

```
74|088 | 42
64     |-------------
-------| 16    4    8
10|088    3    3
10 088   --   --
------   48   12
     0    2    4
         --   --
         96   48
         48
           8
       -----
       10088
```

Anmerkung. Ich sagte, der Quotient (2), den man erhalte, wenn man mit dem dreifachen Quadrat von a in den Rest 10088 dividire, sei wahrscheinlich die zweite Wurzelziffer; denn nothwendig und völlig ausgemacht ist dieß nicht, da es nicht selten geschieht, daß die Summe der für diesen Quotienten als zweite Wurzelziffer gebildeten Producte $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ größer wird, als der Rest, wovon man sie abziehen soll, was deutlich genug zeigt, daß die zweite Wurzelziffer zu groß genommen sei.

697. Besteht eine Cubikwurzel aus drei oder mehr Ziffern, so ist es nichts anders, als eine Fortsetzung des so eben erörterten Verfahrens, wodurch man die einzelnen Ziffern findet. Hat man nämlich zwei Wurzelziffern auf dem vorher angegebenen Wege gefunden, so erhält man die dritte Ziffer dadurch, daß man die beiden ersten als eine einzige Zahl betrachtet und mit dieser genau eben so verfährt, wie man mit der ersten Ziffer verfuhr, um die zweite zu finden, gemäß dem Ausdrucke, nach welchem

$$(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3$$

Ganz eben so findet man bei einer vierziffrigen Wurzel die vierte Ziffer aus den drei ersten, da auch:

$$(a + b + c + d)^3 = (a + b + c)^3 + 3\,(a + b + c)^2\,d + 3\,(a + b + c)\,d^2 + d^3$$

ist.

698. Es ergiebt sich hieraus folgendes Verfahren für das Ausziehen der Cubikwurzeln, welches wir der größern Deutlichkeit wegen sogleich auf ein bestimmtes Beispiel beziehen:

1. Theile die Ziffern der gegebenen Cubikzahl z. B. 5 268 024 von der rechten zur linken Hand hin zu je dreien ab, also

   5|268|024

2. Nimm denjenigen Cubus (1), welcher der aus den Ziffern der höchsten Abtheilung gebildeten Zahl (5) am nächsten kömmt; ziehe jenen von diesen ab, und bemerke den Rest (4). Die Wurzel (1) jener Cubikzahl (1) ist die erste Ziffer der gesuchten Wurzel.
3. Setze die Ziffern (268) der nächst niedrigern Abtheilung dem erhaltenen Reste (4) zur rechten Hand bei, und betrachte das so Erhaltene als eine einzige Zahl (4268).
4. Nimm das Quadrat (1) der gefundenen Wurzelziffer, multiplicire dasselbe durch 3, und dividire mit diesem Producte (3) in denjenigen Theil (42) der in der vorigen Nummer näher bezeichneten Zahl (4268), welcher übrig bleibt, wenn man die beiden niedrigsten Ziffern (68) abschneidet. Der Quotient (hier 7, siehe die Anmerkung zu 697) ist wahrscheinlich die nächstfolgende Wurzelziffer.
5. Multiplicire das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer mit der so eben gefundenen zweiten (7), ferner das Quadrat (49) dieser zweiten mit dem Dreifachen der ersten, und nimm den Cubus (343) dieser zweiten; addire diese drei Producte (21, 147, und 343) zusammen und zwar, indem du sie so unter einander setzest, daß jedes gegen seinen Vorgänger um eine Stelle nach der rechten Hand hin zurückgerückt wird (weil man eigentlich schreiben sollte 2100, 1470, 343), ziehe diese Summe (3913) von der in Nro. 3 bezeichneten Zahl (4268), und bemerke den Rest (355).

6. Mit diesem Rest verbinde nun auf ähnliche Weise wie in Nro. 3 die nächst niedrige Abtheilung (024) der Ziffern der Cubikzahl und betrachte die so entstandene Zahl (355024) als ein einziges Ganze.

7. Betrachte nun die beiden bereits gefundenen Wurzelziffern als eine einzige Zahl (17), und verfahre mit ihr nach den in Nro. 4, 5 und 6 gegebenen Vorschriften. Geht bei der Subtraction Alles ohne Rest auf, so ist die aus den drei gefundenen Ziffern (174) gebildete Zahl die gesuchte Cubikwurzel.

8. Bleibt dagegen ein Rest, so hängt man an die Cubikzahl zur Rechten noch so viele Ternionen von Nullen, so viele Decimalen für die Cubikwurzel als Näherungswerth man haben will. Jede dieser Ternionen von Nullen behandelt man ganz wie die Zifferternionen der Cubikzahl, und verfährt mit ihnen nach den in Nro. 4, 5, und 6 aufgestellten Regeln.

699. Soll die Cubikwurzel aus einem Bruche z. B. $\frac{64}{125}$ gefunden werden, so zieht man sie sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner, und bildet aus diesen beiden Wurzeln einen neuen Bruch $\frac{4}{5}$, welcher die Cubikwurzel des gegebenen Bruches ist; oder, wenn Zähler und Nenner, wie dieß meist der Fall ist, keine vollständigen Cubikzahlen sind, man verwandelt den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch und zieht aus diesem die Cubikwurzel. Damit aber der Nenner eines solchen Bruches eine vollständige Cubikzahl und die ganze Rechnung mithin sich auf den Zähler beschränke, muß die Anzahl der Decimalen des Bruches ein Vielfaches von 3 bilden.

Zum Schlusse möge noch die vollständige Rechnung, wie sie unser obiges (698) Beispiel fordert, hier Platz finden:

	174			
5|268|024	1	7	17	$4^2 = 16$
	$1^2 = 1$	$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	3
	3	3	3	48
	3	147	867	17
	7	1	4	816
	21	147	3468	
	147	$7^3 = 343$	816	$4^3 = 64$
	343		64	
	3913		355024	

Anmerkung (des Uebersetzers). Eine vollständigere und gründlichere Erörterung des Wurzelausziehens als die hier von unserm Verfasser gegebene und mehr auf das Praktische berechnete Anweisung findet man unter andern in E. G. Fischer's Lehrbuch der Elementarmathematik Theil II, Berlin 1822, im eilften Abschnitt und dessen Anhängen.

Dritter Abschnitt.

Binomischer Lehrsatz.

700. Erhebt man die zweitheilige Größe (Binomium) $p \pm q$, durch wiederholtes Multipliciren mit sich selbst zu ihren successiven Potenzen, so erhält man:

$(p \pm q)^1 = p \pm q$

$(p \pm q)^2 = p^2 \pm 2pq + q^2$

$(p \pm q)^3 = p^3 \pm 3p^2q + 3pq^2 \pm q^3$

$(p \pm q)^4 = p^4 \pm 4p^3q + 6p^2q^2 \pm 4pq^3 + q^4$

$(p \pm q)^5 = p^5 \pm 5p^4q + 10p^3q^2 \pm 10p^2q^3 + 5pq^4 \pm q^5$

u. s. w.

Untersucht man die Werthe der Coefficienten der verschiedenen Glieder dieser Entwickelungen genauer, um das Gesetz zu erforschen, welches sie befolgen, besonders auch dadurch, daß man auf ihre Entstehung mittelst der successiven Multiplication Rücksicht nimmt, so überzeugt man sich, daß man als allgemeinen Ausdruck für die Newton'sche Binomialformel erhält:

$$(p \pm q)^n = p^n \pm np^{n-1}q + \frac{n.(n-1)}{1.2}p^{n-2}q^2 \pm$$

$$\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}p^{n-3}q^3 + \ldots \pm \frac{n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}p^{n-r}q^r$$

so daß, wenn C_r den Coefficienten bezeichnet, welcher zu dem Gliede $p^{n-r} . q^r$ gehört, der Coefficient des nächstfolgenden Gliedes $p^{n-r-1} . q^{r+1}$ durch

$$C_r . \frac{n-r}{r+1}$$

dargestellt werden kann.

701. Hieraus ergiebt sich, daß wenn eine Größe p um die Größe q vermehrt wird, oder mit andern Worten, wenn eine veränderliche Größe ihren Werth p in den Werth $p+q$ verändert, die Quadrate des ursprünglichen Werthes und des Zuwachses sich um die Größe $+ 2pq + q^2$, die dritten Potenzen aber sich um die Größe $+ 3p^2q + 3pq^2 + q^3$ von einander unterscheiden. Es ist demnach das Verhältniß des ursprünglichen Werthes zu dem des Zuwachses, und zwar:

für ihre ersten Potenzen $= p : q$

— — zweiten — $= p : 2q + \frac{q^2}{p}$

— — dritten — $= p : 3q + \frac{3q^2}{p} + \frac{q^3}{p^2}$

$= p : 3q + \frac{q^2(3p+q)}{p^2}$

Ist nun q im Vergleich gegen p sehr klein, so kommen offenbar unsere eben genannten Verhältnisse nahe den respectiven Verhältnissen:

$$p : q$$
$$p : 2\,q$$
$$p : 3\,q$$

d. h. erleidet eine veränderliche Größe eine geringe Veränderung ihres Werthes, so beträgt diese Veränderung für das Quadrat nahe das Doppelte und für den Cubus nahe das Dreifache dieses Zuwachses — ein Satz, der besonders in der Naturlehre seine häufige Anwendung findet.

702. Setzt man den Exponenten unseres Binomiums $n = \frac{1}{m}$ — wodurch das Potenziren sich in ein Wurzelausziehen verwandelt (123, Anm. 2) — und erinnert sich, daß negative Exponenten eine Division andeuten, indem $p^{-m} = \frac{1}{p^m}$ (122, Anm. 3), so verwandelt der obige allgemeine Ausdruck (700) sich in folgenden:

$$(p \pm q)^{\frac{1}{m}} = p^{\frac{1}{m}} \pm \frac{1}{m} p^{\frac{1}{m}-1} . q + \frac{1}{2} . \frac{1}{m} . \left(\frac{1}{m} - 1\right) . p^{\frac{1}{m}-2} . q^2 \pm \ldots$$

$$= p^{\frac{1}{m}} \pm \frac{p^{\frac{1}{m}} . q}{mp} - \frac{(m-1)\, p^{\frac{1}{m}} q^2}{2\, m^2 p^2} \pm \frac{(m-1)(2m-1) . p^{\frac{1}{m}} . q^3}{2 . 3 . m^3 . p^3} - \ldots$$

$$= p^{\frac{1}{m}} \left[1 \pm \frac{q}{mp} - \frac{m-1}{2\, m^2} . \frac{q^2}{p^2} \pm \frac{(m-1)(2m-1)}{2 . 3 . m^3} . \frac{q^3}{p^3} - \ldots\right]$$

ein Ausdruck, dessen man sich in vielen Fällen zum Wurzelausziehen mit Vortheil bedienen kann.

Es sei z. B. $p = a^2$, $q = ab$, also $p + q = a\,(a + b)$ und $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$; alsdann ist:

$$\sqrt{a^2 + ab} = (a^2 + ab)^{\frac{1}{2}}$$
$$= a + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{8\,a} + \frac{b^3}{16\,a^2} - \ldots$$

Ist daher b im Vergleich zu a sehr klein, so ist sehr nahe

$$\sqrt{a\,(a + b)} = a + \frac{b}{2} = \frac{a + (a + b)}{2}$$

ein Näherungswerth für die Quadratwurzel, der ganz mit dem frühern Lehrsatz 169 und mit dem dritten Beispiel in 305, Zus. übereinstimmt.

Zugabe des Uebersetzers.

703. Wegen der großen Wichtigkeit des binomischen Lehrsa den unser Verfasser in dem zunächst Vorhergehenden anwendet, oh seine Richtigkeit vorher gebührend begründet zu haben, dürfte es ni unzweckmäßig erscheinen, hier einen einfachen Beweis für die allge meine Gültigkeit dieses durch seine zahlreichen Anwendungen so fruch baren Theorems beizufügen.

Wenn a, k und x drei veränderliche Größen bezeichnen, so ist, welchen Werth man auch jeder derselben beilegen möge, von unverä derlicher Richtigkeit die Gleichung:

$$1.\quad a^{x+k} = a^x \cdot 1^k + k\,\frac{a^{x+k} - a^x \cdot 1^k}{k}$$

oder, wenn man der Kürze halber

$$\frac{a^{x+k} - a^x \cdot 1^k}{k} = p$$

setzt,

$$2.\quad a^{x+k} = a^x \cdot 1^k + k \cdot p$$

Läßt man nun x und k ihre Werthe dergestalt ändern, daß x in x + 1, dagegen k in k — 1 übergeht, so ändert sich dadurch offenbar gar nicht der Werth von a^{x+k} und unsere Gleichung 2 verwandelt sich, weil $1^{k-1} = 1^k$, in:

$$3.\quad a^{x+k} = a^{x+1} \cdot 1^k + (k - 1)\, p_1$$

wo p_1 den durch die Veränderung von x und k veränderten Werth von p bezeichnet. Man ziehe nun die Gleichung 2 von der Gleichung 3 ab; dieser Unterschied ist:

$$4.\quad 0 = (a^{x+1} - a^x)\, 1^k + (k - 1)(p_1 - p) - p$$

oder, wenn man nach einer auch sonst üblichen Bezeichnung

$$a^{x+1} \cdot 1^{k-1} - a^x \cdot 1^k = \Delta\,(a^x \cdot 1^k)$$

und auf ähnliche Weise

$$p_1 - p = \Delta\, p$$

setzt,

$$5.\quad 0 = \Delta \cdot (a^x \cdot 1^k) + (k - 1)\,\Delta\, p - p$$

Es möge nun aufs Neue in dieser Gleichung x in x + 1; und k in k — 1 sich verändern; dadurch erhält man:

$$6.\quad 0 = \Delta\,(a^{x+1} \cdot 1^{k-1}) + (k - 2)\,\Delta\, p_1 - p_1$$

und, wenn man von dieser letzten Gleichung die vorletzte abzieht:

$$7.\quad 0 = \Delta\,(a^{x+1} \cdot 1^{k-1}) - \Delta\,(a^x \cdot 1^k) + (k-2)\,(\Delta\, p_1 - \Delta\, p) - \Delta\, p - (p_1 - p)$$

oder, wenn wir unserer vorher eingeführten Bezeichnung gemäß:

$$\Delta\,(a^{x+1}\,.\,1^{k-1}) - \Delta\,(a^x\,.\,1^k) = \Delta\,[\Delta\,(a^x\,.\,1^k)]$$
$$= \Delta^2\,(a^x\,.\,1^k)$$

und eben so $\Delta\, p_1 - \Delta\, p = \Delta^2 p$ setzen,

8. $0 = \Delta^2\,(a^x\,.\,1^k) + (k-2)\,\Delta^2 p - 2\,\Delta\, p$

Verfährt man nun mit dieser Gleichung ganz eben so, wie man so eben mit der Gleichung 5 verfuhr, d. h. läßt man x in $x+1$, aber k in $k-1$ übergehen, zieht von der so erhaltenen neuen Gleichung die ursprüngliche ab, und setzt der Kürze halber und der bisherigen Bezeichnung ganz entsprechend:

$$\Delta^2\,(a^{x+1}\,.\,1^{k-1}) - \Delta^2\,(a^x\,.\,1^k) = \Delta^3\,(a^x\,.\,1^k)$$

so wie $\Delta^2 p_1 - \Delta^2 p = \Delta^3 p$,
so erhält man:

9. $0 = \Delta^3\,(a^x\,.\,1^k) + (k-3)\,\Delta^3 p - 3\,\Delta^2 p$

und hieraus durch dasselbe Verfahren:

10. $0 = \Delta^4 (a^x\,.\,1^k) + (k-4)\,\Delta^4 p - 4\,\Delta^3 p$

und allgemein:

11. $0 = \Delta^n\,(a^x . 1^k) + (k-n)\,\Delta^n p - n\,\Delta^{n-1} p$

Entwickelt man jetzt aus den Gleichungen 5, 8, 9, 10 und 11 respective die Werthe von p, Δp, $\Delta^2 p$, $\Delta^3 p$ und $\Delta^{n-1} p$, so erhält man:

$$p = \Delta\,(a^x\,.\,1^k) + (k-1)\,\Delta p$$

$$\Delta p = \frac{\Delta^2\,(a^x\,.\,1^k) + (k-2)\,\Delta^2 p}{2}$$

$$\Delta^2 p = \frac{\Delta^3\,(a^x\,.\,1^k) + (k-3)\,\Delta^3 p}{3}$$

$$\Delta^3 p = \frac{\Delta^4\,(a^x\,.\,1^k) + (k-4)\,\Delta^4 p}{4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Delta^{n-1} p = \frac{\Delta^n\,(a^x\,.\,1^k) + (k-n)\,\Delta^n p}{n}$$

In der obigen Gleichung 2 substituire man nun den hier gefundenen Werth von p, in der so erhaltenen Gleichung aber den Werth von Δp, in dieser neuen Gleichung den Werth von $\Delta^2 p$, und fahre in dieser Weise gleichmäßig fort; dadurch erhält man:

12. $a^{x+k} = a^x . 1^k + k . p$

$= a^x . 1^k + k . \Delta (a^x . 1^k) + k . (k-1) \Delta p$

$= a^x . 1^k + k . \Delta (a^x . 1^k) + \frac{k.(k-1)}{1.2} \Delta^2 (a^x . 1^k) +$

$\frac{k.(k-1)(k-2)}{1.2} \Delta^2 p$

$= a^x . 1^k + k \Delta (a^x . 1^k) + \frac{k.(k-1)}{1.2} \Delta^2 (a^x . 1^k) +$

$\frac{k.(k-1)(k-2)}{1.2.3} . \Delta^3 . (a^x . 1^k) + \frac{k.(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3} . \Delta^3 p$

also allgemein, wenn man zugleich für p seinen Werth $\frac{a^{x+k} - a^x . 1^k}{k}$ substituirt:

13. $a^{x+k} = a^x . 1^k + k . \Delta (a^x . 1^k) + \frac{k.(k-1)}{1.2} \Delta^2 (a^x . 1^k)$

$+ \frac{k.(k-1)(k-2)}{1.2.3} \Delta^3 (a^x . 1^k)$

$+ \frac{k.(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4} . \Delta^4 (a^x . 1^k)$

$+ \ldots\ldots + \frac{k.(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2.3\ldots n} . \Delta^n . (a^x . 1^k)$

$+ \frac{k.(k-1)\ldots(k-n+1)(k-n)}{1.2.3\ldots n} . \Delta^n \left(\frac{a^{x+k} - a^x . 1^k}{k}\right)$

Es ist nun aber unserer oben eingeführten Bezeichnung zufolge:

$\Delta (a^x . 1^k) = a^{x+1} . 1^{k-1} - a^x . 1^k = (a^{x+1} - a^x) 1^k = a^x . 1^k . (a-1)$,

also $\Delta^2 (a^x . 1^k) = \Delta [(a-1) a^x . 1^k] = (a-1) \Delta (a^x . 1^k)$

$= (a-1)^2 a^x . 1^k$

eben so: $\Delta^3 (a^x . 1^k) = (a-1)^3 . a^x . 1^k$

$\Delta^n (a^x . 1^k) = (a-1)^n . a^x . 1^k$.

Durch Substitution dieser Werthe für $\Delta (a^x . 1^k)$, $\Delta^2 (a^x . 1^k)$ u. s. w. verwandelt sich unsere Gleichung 13 in folgende:

$$14.\ a^{x+k} = a^x . 1^k \left[1 + k.(a-1) + \frac{k.(k-1)}{1.2}.(a-1)^2 + \ldots + \frac{k.(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2.3\ldots n}(a-1)^n\right] + \frac{k.(k-1)(k-2)\ldots.(k-n)}{1.2.3\ldots.n}\Delta^n\left(\frac{a^{x+k} - a^x.1^k}{k}\right)$$

und aus dieser erhält man, wenn man $x=0$ setzt und a in $a+1$ übergehen läßt, die Gleichung:

$$15.\ (1+a)^k = 1^k\left[1 + ka + \frac{k.(k-1)}{1.2}a^2 + \ldots + \frac{k.(k-1)\ldots.(k-n+1)}{1.2.3\ldots.n}a^n\right] + \frac{k.(k-1)(k-2)\ldots.(k-n)}{1.2.3\ldots.n}. \Delta^n\left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k} - (1+a)^{x(=0)}.1^k}{k}\right)$$

Diese Gleichung enthält die vollständige Entwickelung der kten Potenz des Binomiums $1+a$, und zwar in ihrer vollen Allgemeinheit, d. h. für jeden beliebigen ganzen, oder gebrochenen, positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Werth des Exponenten k, da die identische Gleichung

$$a^{x+k} = a^x . 1^k + k . \frac{a^{x+k} - a^x . 1^k}{k}$$

von der wir ausgegangen sind, offenbar richtig bleibt, wie auch k seinen Werth ändern möge.

Unser eben gefundener Ausdruck giebt noch zu folgenden Bemerkungen Anlaß:

1. So wie es eine identische Gleichung war, von der man ausging, so ist es auch eine identische Gleichung, zu der man gelangt ist. Denn nichts anders als eine solche ist die Gleichung 15. Entwickelt man nämlich gemäß der Bedeutung, die wir dem Zeichen Δ gegeben haben, den Ausdruck

$$\Delta^n\left[\frac{(1+a)^{x(=0)+k} - (1+a)^{x(=0)}.1^k}{k}\right]$$

so heben sich alle Glieder auf der rechten Seite der Gleichung bis auf das einzige $(1+a)^k$ auf, und man erhält die identische Gleichung

$$(1+a)^k = (1+a)^k$$

2. Ist der Exponent k eine ganze positive Zahl, so ist das $(k+1)$te Glied der Entwickelung das letzte, weil der Coefficient

$$\frac{k.(k-1)\ldots.(k-k)}{1.2.3\ldots k}$$

und mit ihm alle spätern zu Null werden, indem der eine Factor $(k - k)$ ihrer Zähler Null wird.

3. Dieser Fall kann dagegen niemals eintreten, sowohl wenn k einen negativen, als wenn es einen gebrochenen Werth hat; unsere Entwickelung bildet also dann eine unendliche d. h. niemals ihr natürliches und volles Ende erreichende Reihe. Führt man dieselbe daher nur bis zu einer bestimmten, wenn auch noch so großen Anzahl von Gliedern fort; so bilden diese nie den völlig genauen, sondern höchstens einen Näherungswerth für die Potenz des Binomiums, dessen Entwickelung sie sind.

Anmerkung. Der in dem Vorhergehenden mitgetheilte durch Kürze und Allgemeinheit eigenthümlich ausgezeichnete Beweis des binomischen Lehrsatzes ist von A. L. Crelle, und mitgetheilt in dem Journal für Mathem. III, p. 305 sqq.

Dritter Abschnitt.

Ueber die Darstellung der Logarithmen durch Reihen.

704. Es ist früher (190) nachgewiesen worden, wie man die Logarithmen aller Zahlen durch wiederholtes Aufsuchen von mittlern Proportionalen finden kann. Zugleich wurde bemerkt (190, Anm. 4), daß die ersten Berechner logarithmischer Tafeln sich wirklich dieses mühseligen Verfahrens bedient, daß man inzwischen später kürzere Methoden entdeckt habe, über welche in diesem Anhange etwas Näheres mitgetheilt werden solle.

Dieselben beruhen auf der Entwickelung der Logarithmen in Reihen, und zwar in solche Reihen, deren Glieder sehr rasch abnehmen, so daß eine mäßige Anzahl derselben hinreicht, um einen hinreichend genäherten Werth des Logarithmen zu geben. Nehmen wir daher an, es sei, wenn der Logarithmus einer Zahlgröße durch ein derselben vorgesetztes l bezeichnet wird, und x jede beliebige Zahlgröße bedeutet,

1. $L(1+x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots + C_n x^n$

so wird Alles darauf ankommen, die Werthe der zur Zeit noch völlig unbestimmten Coefficienten, C_0, C_1, C_2 2c. näher zu bestimmen.

Aus unserer Gleichung ergiebt sich nun in Verbindung mit dem frühern Satze (186, Zus. 2.), dem zufolge

$$L(1+x)^2 = 2\,L(1+x)$$

ist, zuvörderst folgende:

2. $L(1+x)^2 = 2C_0 + 2C_1 x + \ldots + 2C_n x^n = L(1+2x+x^2)$

und hieraus, wenn $2x + x^2 = z$ gesetzt wird,

3. $$\begin{aligned} L(1+x)^2 = L(1+z) &= C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots\ldots + C_n z^n, \\ &= C_0 + C_1(2x+x^2) + C_2(2x+x^2)^2 \\ &\quad + \ldots + C_n(2x+x^2)^n \end{aligned}$$

Entwickelt man jetzt nach Anleitung des binomischen Lehrsatzes die suc-

cessiven Potenzen des Binomiums $2x + x^2$ auf der rechten Seite unserer Gleichung und vereinigt alle diejenigen Glieder zu einem einzigen, welche gleich hohe Potenzen von x enthalten, oder, was dasselbe ist, ordnet man nach jener Entwickelung die rechte Seite der Gleichung nach Potenzen von x, so erhält man:

$$4.\quad L(1+x)^2 = C_0 + 2C_1x + \left.\begin{matrix} C_1 \\ 4C_2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 4\ C_2 \\ 8\ C_3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} C_2 \\ 12\ C_3 \\ 16\ C_4 \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots.$$

und mithin aus der Verbindung der Gleichungen 2 und 4

$$5.\quad 2C_0 + 2C_1x + \ldots + 2C_nx^n = C_0 + 2C_1x + \left.\begin{matrix} C_1 \\ 4C_2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 4\ C_2 \\ 8\ C_3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} C_2 \\ 12\ C_3 \\ 16\ C_4 \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 6\ C_3 \\ 32\ C_4 \\ 32\ C_5 \end{matrix}\right\} x^5 + \ldots.$$

Da nun die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke, welche beide nach Potenzen derselben Hauptgröße x fortschreiten, unserer Voraussetzung zufolge unverändert erhalten werden muß, wie auch diese Hauptgröße selbst ihren Werth ändert, so kann unsere Gleichung 5 nur dann dieser Bedingung genügen, wenn je zwei solche Coefficienten, welche dieselbe Potenz der Hauptgröße multipliciren, einzeln unter einander gleich sind. Demgemäß muß also sein:

$$\left.\begin{matrix} 2C_0 = C_0 \\ 2C_1 = 2C_1 \\ 2C_2 = C_1 + 4C_2 \\ 2C_3 = 4C_2 + 8C_3 \\ 2C_4 = C_2 + 12C_3 + 16C_4 \\ 2C_5 = 6C_3 + 32C_4 + 32C_5 \end{matrix}\right\} \text{hieraus ergiebt sich} \left\{\begin{matrix} C_0 = 0 \\ C_1 = C_1 \text{ d. h. } C_1 \text{ ist unbestimmt} \\ C_2 = -\frac{1}{2}.C_1 \\ C_3 = +\frac{1}{3}.C_1 \\ C_4 = -\frac{1}{4}C_1 \\ C_5 = +\frac{1}{5}.C_1 \end{matrix}\right.$$

Durch Substitution dieser für die Coefficienten gefundenen Werthe in die frühere Gleichung 2, erhält man:

$$6.\quad L(1+k) = C_1\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n} + \ldots\right)$$

eine Reihe, deren Gesetz eben so leicht in die Augen fällt, als es sich dem Gedächtnisse einprägt, indem der Coefficient jedes Gliedes der reciproke Werth vom Exponenten der Hauptgröße x und additiv oder subtractiv ist, je nachdem dieser Exponent eine ungerade oder gerade Zahl ist.

705. Der Umstand, daß einer unserer Coefficienten, C_1, unbestimmt blieb und somit unserer ganzen Reihe, weil sie durch C_1 multiplicirt erscheint, diese Unbestimmtheit sich mittheilt, verliert alles Befremdende, was er vielleicht im ersten Augenblicke haben könnte, wenn man erwägt, daß in der That im allgemeinen zu einer und derselben

Zahl unzählig verschiedene Logarithmen gehören, nach der unendlichen Menge von logarithmischen Systemen, welche man dabei zum Grunde legen kann. Einen bestimmten Zahlwerth nimmt der zu einer bestimmten Zahl gehörige Logarithmus nur erst dann an, wenn die Grundzahl des Systems, dem er entnommen sein soll, bestimmt ist. Es war daher in der Natur der Sache begründet und nothwendig, daß unsere Entwickelung, welche unabhängig von jedem bestimmten logarithmischen Systeme zu Stande gebracht wurde, derjenigen Bestimmung ermangelte, welche nur ein bestimmtes System geben kann.

Macht man, damit unsere Reihe völlig bestimmt werde, die einfachste Voraussetzung für C_1, die sich machen läßt, nämlich setzt man $C_1 = 1$, so erhält man die Logarithmen für dasjenige System, welches man das natürliche, oder, nach seinem ersten Erfinder, das Neper'sche System nennt.

Kennt man nur erst den natürlichen Logarithmus einer Zahl, so kann man aus ihm den Logarithmus eben dieser Zahl für jedes andere System durch einfache Multiplication herleiten, indem man nämlich den natürlichen Logarithmen durch den dem neuen Systeme zugehörigen Werth von C_1, welchen man den Modulus dieses Systems nennt und gewöhnlich mit M bezeichnet, multiplicirt.

Da man nun, wie nachher gezeigt werden soll, durch Hülfe der natürlichen Logarithmen den Modulus jedes, durch seine Grundzahl bekannten, Systems finden kann, so darf man sich, ohne der erforderlichen Allgemeinheit etwas zu vergeben, bei der Untersuchung über die logarithmischen Reihen auf die natürlichen Logarithmen beschränken.

706. Da, wie bereits bemerkt wurde, die Brauchbarkeit der logarithmischen Reihen zur Berechnung der Logarithmen dadurch bedingt wird, daß die Glieder derselben sehr rasch abnehmen, oder, wie man sich gewöhnlich auszudrücken pflegt, daß die Reihe sehr stark convergirt, so läßt unsere obige zuerst gefundene Reihe in dieser Beziehung noch viel zu wünschen übrig. Wir müssen daher aus ihr eine neue herzuleiten suchen, welche diesen Anforderungen in einem höhern Grade genügt. Es geschieht dieß auf folgende einfache Weise.

Da jene Reihe für jeden Werth von x gilt, so muß sie auch ihre Gültigkeit behalten, wenn man an die Stelle von $+x$ überall $-x$ substituirt. Dadurch verwandelt sich die linke Seite in $l(1-x)$ und auf der rechten wechseln alle diejenigen Glieder, welche die ungeraden Potenzen der Hauptgröße enthalten, ihr Vorzeichen; man erhält demnach:

$$L(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n}\right),$$

und mithin:

$$L(1+x) - L(1-x) = L\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

eine Reihe, welche schon hinreichend convergirt, um zu wirklichen Berechnungen von Logarithmen mit Vortheil gebraucht zu werden. Wir

wollen dieß an einem Beispiele nachweisen. Verlangte man den natürlichen oder Neper'schen Logarithmus von 2, so wäre

$$\frac{1+x}{1-x} = 2, \text{ mithin } x = \frac{1}{3},$$

also

$$L\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \ldots\right)$$

$$L\,2 = 2\left\{\begin{matrix}0{,}33333333\\0{,}0123457\\0{,}0008230\\0{,}0000653\\0{,}0000057\\0{,}0000006\end{matrix}\right\} = 0{,}6931472$$

Durch eine ganz ähnliche einfache Rechnung findet man:

$$L\,3 = 1{,}0981623$$

Aus diesen beiden Logarithmen ersieht man, daß diejenige Zahl, deren natürlicher Logarithmus = 1 ist d. h. die Basis des natürlichen Logarithmensystems, welche in der höhern Rechnung gewöhnlich durch e bezeichnet wird, zwischen 2 und 3 fallen muß (sie ist 2,7182818...)

707. Unsere Tafel-Logarithmen sind bekanntlich nicht Neperische, sondern Briggische Logarithmen, d. h. sie gehören dem von dem Engländer Henry Briggs zuerst aufgestellten Systeme an, dessen Grundzahl 10, in welchem also log 10 = 1 ist.

Um nun aus den natürlichen Logarithmen die Tafel-Logarithmen herleiten zu können, wird es darauf ankommen, den Modulus des Briggischen Systems d. h. denjenigen Zahlwerth zu bestimmen, durch welchen natürliche Logarithmen multiplicirt werden müssen, um in Briggische überzugehen. Es geschieht dieses auf folgende Weise:

Man suche den natürlichen Logarithmus von 10 und zwar, um eine stärker convergirende Reihe zu erhalten, indem man $10 = 8 \cdot \frac{5}{4}$ setzt. Man erhält auf diese Weise:

$$L\,10 = L\,8 + L\,\tfrac{5}{4} = 3\,L\,2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \ldots\right)$$

$$= 2{,}0794415 + 0{,}2231436$$

$$= 2{,}3025851$$

Bezeichnet nun log 10 den Briggischen, dagegen L 10 den natürlichen Logarithmus von 10, und M den Modulus jenes erstern Systems, so hat man:

$$M \cdot L\,10 = \log 10 = 1, \text{ also}$$

$$M = \frac{1}{L\,10} = \frac{1}{2{,}3025851} = 0{,}4342945\ldots$$

$$4.\quad \frac{x - y}{\sin x - \sin y} = C_1 + C_3 [\sin^2 x + \sin x \sin y + \sin^2 y] + C_5 [\sin^4 x + \ldots + \sin^4 y] + \text{ꝛc.}$$

oder, weil

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \tfrac{1}{2}(x - y) \cos \tfrac{1}{2}(x + y) = \text{chord.}(x - y) . \cos \tfrac{1}{2}(x + y)$$

$$5.\quad \frac{x - y}{\text{chord.}(x - y) \cos \frac{1}{2}(x + y)} = C_1 + C_3 [\sin^2 x + \sin x . \sin y + \sin^2 y] + \text{ꝛc.}$$

Setzt man $x = y$, so wird dem frühern Lehrsatze 360 zufolge:

$$\frac{x - y}{\text{chord.}(x - y)} = 1,$$

unsere Gleichung 5 verwandelt sich also in:

$$6.\quad \frac{1}{\cos x} = C_1 + 3 C_3 \sin^2 x + 5 C_5 \sin^4 x + 7 C_7 \sin^6 x + \text{ꝛc.}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x}$$

und, wie man sich durch wirkliche Ausführung der Division überzeugt:

$$\frac{1}{1 - \sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots\ldots$$

Also ist auch:

$$\begin{aligned} 7.\quad 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \text{ꝛc.} \\ &= [C_1 + 3 C_3 \sin^2 x + 5 C_5 \sin^4 x + \,.\,.]^2 \\ &= C_1^2 + 6 C_1 C_3 \sin^2 x + (9 C_3^2 + 10 C_1 C_5) \sin^4 x \\ &\quad + (14 C_1 C_7 + 30 C_3 C_5) \sin^6 x + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

und hieraus durch Vergleichung der Coefficienten der entsprechenden Glieder auf beiden Seiten der Gleichung:

$C_1^2 = 1$	also	$C_1 = 1$
$6 C_1 C_3 = 1$		$C_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
$9 C_3^2 + 10 C_1 C_5 = 1$		$C_5 = \frac{3}{40} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$
$14 C_1 C_7 + 30 C_3 C_5 = 1$		$C_7 = \frac{15}{14 \cdot 24} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$
ꝛc.		ꝛc.

Die Coefficienten unseres in Rede stehenden Reihenausdrucks folgen also in der That dem angegebenen Gesetze, und es ist somit die Richtigkeit der obigen Behauptung erwiesen.

713. Der Gebrauch auch dieser Reihe möge an einem Beispiele erläutert werden.

Gesetzt man solle den Bogen von 30° durch seinen Sinus finden, so wäre

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ und, wie bekannt, } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

also

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \text{ıc.}$$

Es ist nun

$$\frac{1}{2} = 0{,}500000000$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}020833333$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}002343750$$

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0{,}000348772$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9 = 0{,}000059339$$

$$\frac{1}{11}\cdot\frac{1\,.\,3\,...\,9}{2\,....\,10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 0{,}000010922$$

$$\frac{1}{13}\cdot\frac{1\,.\,3\,....\,11}{2\,.\,4\,...\,12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13} = 0{,}000002118$$

$$\frac{\pi}{6} = 0{,}523598234$$

$$\text{also } \pi = 6\,.\,0{,}523598234 = 3{,}141589404$$

ein Werth, der schon ziemlich gut der Ludolph'schen Zahl sich nähert.

714. Der Reihenausdruck für einen Kreisbogen mittelst seines Cosinus, ist folgender:

$$x = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cos^5 x - \text{ıc.}$$

Denn, da

$$y = \sin y + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin^3 y + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\sin^5 y + \ldots$$

so ist, wenn man $y = \frac{\pi}{2} - x$ setzt, wodurch $\sin y = \cos x$ wird,

$$\frac{\pi}{2} - x = \cos x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cos^5 x + \ldots$$

und hieraus ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit unserer Behauptung.

Durch 0,4342945 . . . müssen also die natürlichen Logarithmen multiplicirt werden, um sie in Tafel-Logarithmen zu verwandeln. Man findet auf diese Weise, übereinstimmend mit den Tafeln:

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log 4 = 2 \log 2 = 0{,}6020600$$
$$\log 5 = \log 10 - \log 2 = 0{,}6989700$$
$$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0{,}7781513$$
$$\log 8 = 3 \log 2 = 0{,}9030900$$
$$\log 9 = 2 \log 3 = 0{,}9542425$$

Der in dieser Reihe noch fehlende Logarithmus von 7 läßt sich leicht auf fehlende Weise berechnen. Man nehme $x = \frac{1}{99}$, also

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{100}{98} = \frac{50}{49},$$

demnach:

$$L\,\frac{50}{49} = 2\left(\frac{1}{99} + \frac{1}{3 \,.\, 99^3} + \frac{1}{5 \,.\, 99^5} + \cdots\right)$$
$$= 0{,}0202027$$

und hieraus

$$L\,49 = L\,50 - 0{,}0202027$$
$$2\,L\,7 = L\,10 + L\,5 - 0{,}0202027$$
$$L\,7 = \frac{2{,}3025851 + 0{,}6989700 - 0{,}0202027}{2}$$
$$= 0{,}8450980$$

Auf ganz ähnliche Weise wie für das Briggische System bestimmt man den Modulus für jedes andere. Denn ist für irgend ein logarithmisches System die Grundzahl a, der Modulus M, und werden die Logarithmen dieses Systems durch log, die natürlichen dagegen durch ein bloßes vorgesetztes l bezeichnet, so hat man:

$$M \,.\, L\,a = \log a = 1, \text{ also } M = \frac{1}{L\,a}$$

d. h. der Modulus jedes Logarithmensystems ist gleich dem reciproken Werthe vom natürlichen Logarithmus der Grundzahl.

Vierter Abschnitt.

Von der Entwickelung der goniometrischen Functionen und Kreisbogen in Reihen.

---

708. Es ist schon früher (332, Anm. 4 und 367, Anmerk. 6) dem Leser versprochen worden, daß in diesem Anhange einiges Nähere über die Reihen mitgetheilt werden sollte, in denen die goniometrischen Functionen durch ihre zugehörigen Bogen, und umgekehrt beliebige Bogen (also auch die ganze Peripherie) durch goniometrische Functionen ausgedrückt erscheinen. Das Wesentlichste besteht in Folgendem.

Reihenausdrücke für Sinus und Cosinus.

709. Lehrsatz. Die nach Potenzen eines beliebigen Bogens x fortschreitende Reihe, in welche sich der Sinus dieses Bogens entwickeln läßt, muß nothwendig von folgender Form

$$\sin x = x + Mx^m + \text{ꝛc.}$$

sein, so daß alle Glieder der Reihe vom zweiten an Potenzen von x enthalten, deren Exponenten ganze, positive und die Einheit übersteigende Zahlen sind.

Bew. Nur unter dieser Form ist die Reihe im Stande, dem frühern Lehrsatze 355 zu genügen, dem zufolge für ein immer kleiner werdendes x das Verhältniß $\frac{\sin x}{x}$ die Einheit zur Gränze hat.

Zus. 1. Die Reihe für den Cosinus muß nothwendig von der Form:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + Nx^n + \ldots\ldots$$

sein, wo n sowohl als alle folgenden Potenzexponenten ganze, positive Zahlen und größer als 2 sein müssen.

Bew. Es ist:

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \sin^2 x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \sin^4 x - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^6 x$$

Substituirt man hier für sin x den vorher bestimmten Reihenausdruck $x + Mx^m + \text{ꝛc.}$, so erhält man:

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}(x + Mx^m + \ldots)^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}(x + Mx^m + \ldots)^4 - \text{ꝛc.}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^4 - \text{ꝛc.}$$

also einen Reihenausdruck von der behaupteten Form.

Zus. 2. Substituirt man in den aus der Goniometrie bekannten Ausdrücken:

$$\sin(x+d) = \sin x \cos d + \sin d \cos x$$
$$\cos(x+d) = \cos x \cos d - \sin d \cdot \sin x$$

für sin d und cos d die so eben bestimmten Reihenausdrücke, so erhält man:

$$\sin(x+d) = \sin x\left(1 - \frac{d^2}{2} + P \cdot d^p \ldots\right) + \cos x\left(d + P' \cdot d^{p'} + \ldots\right)$$
$$= \sin x + d \cdot \cos x + Q \cdot d^q + \ldots.$$

und

$$\cos(x+d) = \cos x\left(1 - \frac{d^2}{2} + P \cdot d^p \ldots\right) - \sin x\left(d + P' \cdot d^{p'} + \ldots\right)$$
$$= \cos x - d \cdot \sin x + R \cdot d^r + \ldots.$$

710. Setzen wir nun zur Bestimmung des noch übrigen Theils der in Rede stehenden Reihenausdrücke:

1. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + C_\alpha x^\alpha - C_\beta x^\beta + C_\gamma x^\gamma -$ ꝛc.

wo die Potenzexponenten α, β, γ . . steigend fortgehen, so ist, wenn x mit $x + d$ vertauscht wird:

2. $\cos(x+d) = 1 - \frac{1}{2}(x+d)^2 + C_\alpha (x+d)^\alpha - C_\beta (x+d)^\beta +$ ꝛc.

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + C_\alpha x^\alpha - C_\beta x^\beta + \text{ꝛc.}$$
$$- d(x - \alpha \cdot C_\alpha \cdot x^{\alpha-1} + \beta \cdot C_\beta \cdot x^{\beta-1} - \text{ꝛc.})$$
$$- \frac{d^2}{2}(1 - \alpha \cdot (\alpha - 1) C_\alpha \cdot x^{\alpha-2} + \text{ꝛc.} \ldots)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$
$$= \cos x - d \cdot (x - \alpha C_\alpha x^{\alpha-1} + \text{ꝛc.}) - \text{ꝛc.}$$

also auch (709, Zus. 2)

$$\cos x - d \cdot \sin x + R d^r + \text{ꝛc.} = \cos x - d(x - \alpha C_\alpha x^{\alpha-1} + \text{ꝛc.}) - \text{ꝛc.}$$

eine Gleichung, die für jeden Werth von d ihre Gültigkeit behält, in welcher daher die auf beiden Seiten zu gleichen Potenzen von d gehörigen Coefficienten einzeln für sich einander gleich sein müssen, also:

3. $\sin x = x - \alpha (C_\alpha x^{\alpha-1} + \beta C_\beta x^{\beta-1} - \gamma C_\gamma x^{\gamma-1} +$ ꝛc.

Vertauscht man in dieser Gleichung aufs Neue x mit $x + d$, so erhält man:

4. $\sin(x+d) = x + d - \alpha C_\alpha (x+d)^{\alpha-1} + \beta C_\beta (x+d)^{\beta-1} - \gamma C_\gamma (x+d)^{\gamma-1}$

$$= x - \alpha C_\alpha x^{\alpha-1} + \beta C_\beta x^{\beta-1} - \gamma C_\gamma x^{\gamma-1}$$
$$+ d[1 - \alpha \cdot (a-1) C_\alpha x^{\alpha-2} + \beta \cdot (\beta - 1) C_\beta x^{\beta-2} - \text{ꝛc.}]$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

und hieraus in Verbindung mit 709, Zus. 2

$$\sin x + d.[1 - \alpha.(\alpha - 1) C_\alpha x^{\alpha - 2} + \beta(\beta - 1) C_\beta x^{\beta - 2} - \text{etc.}] = \sin x + d \cos x + \text{etc.}$$

mithin aus gleichem Grunde wie vorher:

$$5.\ \cos x = 1 - \alpha.(\alpha - 1) C_\alpha x^{\alpha - 2} + \beta.(\beta - 1) C_\beta x^{\beta - 2} - \text{etc.}$$

und mithin auch:

$$6.\ 1 - \frac{x^2}{2} + C_\alpha x^\alpha - C_\beta x^\beta + \text{etc.} = 1 - \alpha(\alpha - 1) C_\alpha x^{\alpha - 2} + \beta(\beta - 1) C_\beta x^{\beta - 2} - \text{etc.}$$

Da nun diese letzte Gleichung eben so wie diejenigen, aus denen sie hergeleitet ist, für jeden Werth von x Statt findet, so müssen je zwei entsprechende Glieder auf beiden Seiten einzeln einander gleich sein, also sowohl die Potenzexponenten von x, als auch die Coefficienten dieser gleichen Potenzen. Durch die erstere Vergleichung erhält man:

$$\alpha - 2 = 2 \text{ also } \alpha = 4$$
$$\beta - 2 = \alpha - \beta = 6$$
$$\gamma - 2 = \beta - \gamma = 8$$
$$\delta - 2 = \gamma - \delta = 10$$
etc.

Aus der Vergleichung der Coefficienten von je zwei entsprechenden Gliedern ergiebt sich:

$$\tfrac{1}{2} = \alpha.(\alpha - 1) C_\alpha \text{ also } C_\alpha = \frac{1}{2.3.4}$$

$$C_\alpha = \beta.(\beta - 1) C_\beta \text{ also } C_\beta = \frac{1}{2.3.4.5.6}$$

$$C_\gamma = \gamma.(\gamma - 1) C_\gamma \text{ also } C_\gamma = \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}$$

Durch Substitution dieser gefundenen Werthe verwandelt sich unsere obige Gleichung (1) in folgende:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}$$

und die Gleichung (3) in

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

und man erhält in diesen beiden letzten Gleichungen die für Sinus und Cosinus gesuchten Reihenausdrücke.

Anmerkung 1. Um diese Reihen zu wirklichen Berechnungen der Sinusse und Cosinusse bestimmter Bogen anwenden zu können, muß man diese Bogen in Theilen des Radius d. h. in Zahlen ausdrücken, deren Einheit dieser Radius ist. Da nun, wie bekannt, für den Halbmesser als Einheit, der halbe Umkreis oder $\pi = 3{,}1415926536$ ist, so ist die Länge des Quadranten oder $\frac{\pi}{2} = 1{,}5707963268$. Setzt man nun

$$x = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

so muß man zur Berechnung des Sinus dieses Bogens alle ungeraden Potenzen sowohl von $\frac{m}{n}$ als von $\frac{\pi}{2}$, zur Berechnung des Cosinus dagegen die geraden Potenzen eben dieser Größen berechnen.

Die Potenzen von $\frac{\pi}{2}$ bleiben nun, wie auch $\frac{m}{n}$ sich ändern möge, unverändert; daher hat Euler, indem er in seiner Introductio die berechneten Werthe derselben mittheilte, alle spätern der Mühe dieser Berechnung überhoben *). Die Werthe von $\frac{m}{n}$ und seinen Potenzen sind dagegen nach der verschiedenen Größe des Bogens, dessen Sinus oder Cosinus berechnet werden soll, verschieden, und müssen daher jedesmal besonders berechnet werden. Es geschieht dieß aber um so leichter, je stärker unsere gefundenen Reihen convergiren, eine je kleinere Anzahl von Gliedern also hinreicht, um schon einen größern Grad von Genauigkeit zu erlangen.

Zur größern Verdeutlichung des Einzelnen möge hier ein Beispiel folgen.

Gesetzt man sollte den Zahlwerth des Sinus von 15° berechnen; so wäre für diesen Fall offenbar $\frac{m}{n} = \frac{1}{6}$, also

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{2} = 0{,}26179939 \qquad \frac{1}{216}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0{,}00299057$$

$$\frac{1}{6^5} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0{,}00001025 \qquad \frac{1}{6^7}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0{,}00000002$$

$$0{,}26180964 \qquad -0{,}00299059$$

$$\frac{-0{,}00299059}{0{,}25881905}$$

also finden wir, übereinstimmend mit den Tafeln:

$$\sin 15^\circ = 0{,}2588190$$

Zus. Aus den für den Sinus und Cosinus gefundenen Reihenausdrücken, ergiebt sich leicht:

$$\tang x = \frac{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \text{etc.}}{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots.6} + \text{etc.}}$$

und

$$\text{cotang}\, x = \frac{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots.6} + \text{etc.}}{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2\ldots.7} + \text{etc.}}$$

*) Für die zehn ersten Potenzen erhält man:

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}57079633 \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1{,}23370055$$

$$\frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0{,}64596410 \qquad \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 0{,}25366951$$

$$\frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0{,}07969263 \qquad \frac{1}{2\ldots6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 = 0{,}02086348$$

$$\frac{1}{2.3\ldots6.7}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0{,}00468175 \qquad \frac{1}{2\ldots.8}\left(\frac{\pi}{2}\right)^8 = 0{,}00091926$$

$$\frac{1}{2\ldots.8.9}\left(\frac{\pi}{2}\right)^9 = 0{,}00016044 \qquad \frac{1}{2\ldots\ldots10}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} = 0{,}00002520$$

Anmerkung. Durch wirkliche Ausführung der Division läßt sich die Bruchform dieder beiden Reihen entfernen; die Coefficienten der successiven Potenzen von x folgen aber dann einem weniger einfachen Gesetze; daher wir diese so wie einige andere Reihen hier um so mehr übergehen, da es uns blos darauf ankam, überhaupt zu zeigen, wie man zu solchen Reihenausdrücken gelangen kann.

Reihen für den Bogen durch Sinus und Cosinus.

711. Lehrsatz. Soll ein Kreisbogen durch eine Reihe dargestellt werden, die nach Potenzen vom Sinus dieses Bogens fortschreitet, und in welcher jedes Glied einen bestimmten, von Null verschiedenen, Coefficienten hat, so kann in diesem Reihenausdruck keine einzige von den geraden Potenzen der Entwickelungsgröße (des Sinus) erscheinen.

Bew. Denn gesetzt, es könnte

$$x = C_0 + C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x + C_3 \sin^3 x + \text{etc. } (1)$$

sein, so müßte, wenn man x in $-x$ übergehen ließ, weil, wie aus der Goniometrie bekannt, $\sin -x = -\sin x$, ist,

nothwendig auch:

$$-x = C_0 - C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x - C_3 \sin^3 x + \text{etc.}$$

aber zufolge unserer Gleichung (1) wäre auch

$$-x = -[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots]$$

also müßte auch, und zwar für jeden Werth von x

$$C_0 - C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x - C_3 \sin^3 x + \ldots = -[C_0 + C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x + \ldots]$$

sein, was offenbar nur dann möglich ist, wenn

$$C_0 = C_2 = C_4 = \ldots C_{2n} = 0 \text{ ist.}$$

712. Der Reihenausdruck eines beliebigen Kreisbogens x mittelst seines Sinus ist folgender:

$$x = \sin x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin^3 x + \frac{1}{5} \cdot \frac{1.3}{2.4} \sin^5 x + \ldots . + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.6..2n} \cdot \sin^{2n+1} x$$

Bew. Dem Lehrsatze der vorigen Nummer zufolge hat man:

1. $x = C_1 \sin x + C_3 \sin^3 x + C_5 \sin^5 x + \text{etc.},$
2. $y = C_1 \sin y + C_3 \sin^3 y + C_5 \sin^5 y + \text{etc.}$

und hieraus

3. $x - y = C_1 [\sin x - \sin y] + C_3 [\sin^3 x - \sin^3 y] + C_5 [\sin^5 x - \sin^5 y] + \text{etc.}$

Dividirt man beide Seiten der Gleichung 3 durch $\sin x - \sin y$, und erwägt, daß

$$\frac{p^n - q^n}{p - q} = p^{n-1} + p^{n-2} q + p^{n-3} q^2 + \ldots pq^{n-2} + q^{n-1}$$

so erhält man:

4. $\frac{x - y}{\sin x - \sin y} = C_1 + C_3 [\sin^2 x + \sin x \sin y + \sin^2 y] + C_5 [\sin^4 x + \ldots. + \sin^4 y] + \text{rc.}$

oder, weil

$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x - y) \cos \frac{1}{2}(x + y) = \text{chord.}(x - y).\cos\frac{1}{2}(x + y)$

5. $\frac{x - y}{\text{chord.}(x - y) \cos \frac{1}{2}(x + y)} = C_1 + C_3 [\sin^2 x + \sin x . \sin y + \sin^2 y] + \text{rc.}$

Setzt man $x = y$, so wird dem frühern Lehrsatze 360 zufolge:

$$\frac{x - y}{\text{chord.}(x - y)} = 1,$$

unsere Gleichung 5 verwandelt sich also in:

6. $\frac{1}{\cos x} = C_1 + 3 C_3 \sin^2 x + 5 C_5 \sin^4 x + 7 C_7 \sin^6 x + \text{rc.}$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x}$$

und, wie man sich durch wirkliche Ausführung der Division überzeugt:

$$\frac{1}{1 - \sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots\ldots$$

Also ist auch:

7. $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \text{rc.}$

$= [C_1 + 3C_3 \sin^2 x + 5 C_5 \sin^4 x + \,.\,.]^2$

$= C_1^2 + 6 C_1 C_3 \sin^2 x + (9 C_3^2 + 10 C_1 C_5) \sin^4 x$

$+ (14 C_1 C_7 + 30 C_3 C_5) \sin^6 x + \text{rc.}$

und hieraus durch Vergleichung der Coefficienten der entsprechenden Glieder auf beiden Seiten der Gleichung:

$C_1^2 = 1$	also	$C_1 = 1$
$6 C_1 C_3 = 1$		$C_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
$9 C_3^2 + 10 C_1 C_5 = 1$		$C_5 = \frac{3}{40} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}$
$14 C_1 C_7 + 30 C_3 C_5 = 1$		$C_7 = \frac{15}{14.24} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}$
rc.		rc.

Die Coefficienten unseres in Rede stehenden Reihenausdrucks folgen also in der That dem angegebenen Gesetze, und es ist somit die Richtigkeit der obigen Behauptung erwiesen.

713. Der Gebrauch auch dieser Reihe möge an einem Beispiele erläutert werden.

Gesetzt man solle den Bogen von 30° durch seinen Sinus finden, so wäre

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ und, wie bekannt, } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

also

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \text{etc.}$$

Es ist nun

$$\frac{1}{2} = 0{,}500000000$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}020833333$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}002343750$$

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0{,}000348772$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9 = 0{,}000059339$$

$$\frac{1}{11}\cdot\frac{1\,.\,3\,\ldots\,9}{2\,\ldots\,10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 0{,}000010922$$

$$\frac{1}{13}\cdot\frac{1\,.\,3\,\ldots\,11}{2\,.\,4\,\ldots\,12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13} = 0{,}000002118$$

$$\frac{\pi}{6} = 0{,}523598234$$

also $\pi = 6\,.\,0{,}523598234 = 3{,}141589404$
ein Werth, der schon ziemlich gut der Ludolph'schen Zahl sich nähert.

714. Der Reihenausdruck für einen Kreisbogen mittelst seines Cosinus, ist folgender:

$$x = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cos^5 x - \text{etc.}$$

Denn, da

$$y = \sin y + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin^3 y + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\sin^5 y + \ldots$$

so ist, wenn man $y = \frac{\pi}{2} - x$ setzt, wodurch $\sin y = \cos x$ wird,

$$\frac{\pi}{2} - x = \cos x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cos^5 x + \ldots$$

und hieraus ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit unserer Behauptung.

Anmerkung. Diese Reihe folgt, wie jeder selbst bemerkt, demselben Gesetze, wie die in der vorigen Nummer betrachtete, aus der sie hergeleitet ist; sie bedarf daher auch keiner besondern Erläuterung durch Beispiele.

715. Ein Kreisbogen wird mittelst seiner Tangente durch folgende Reihe dargestellt:

$$x = \text{tang } x - \frac{1}{3} . \text{tang}^3 x + \frac{1}{5} . \text{tang}^5 x - \frac{1}{7} \text{tang}^7 x + \text{etc.}$$

Denn es läßt sich zuvörderst auf ganz ähnliche Weise wie beim Sinus, durch Hülfe des bekannten goniometrischen Satzes, nach welchem $\text{tang} - x = - \text{tang } x$, zeigen, daß in diesem Reihenausdruck keine andern als die ungeraden Potenzen der Entwickelungsgröße ($\text{tang } x$) erscheinen können.

Es sei demnach

1. $x = C_1 \text{ tg } x + C_3 \text{ tg}^3 x + C_5 \text{ tg}^5 x + C_7 \text{ tg}^7 x + \text{etc.}$

Hieraus folgt, wenn x sich in y verändert

2. $y = C_1 \text{ tg } y + C_3 \text{ tg}^3 y + C_5 \text{ tg}^5 y + C_7 \text{ tg}^7 y + \text{etc.}$

also auch

3. $x - y = C_1 (\text{tg } x - \text{tg } y) + C_3 (\text{tg}^3 x - \text{tg}^3 y) + C_5 (\text{tg}^5 x - \text{tg}^5 y) + \text{etc.}$

und wenn man beide Seiten durch $\text{tg } x - \text{tg } y$ dividirt

4. $\frac{x - y}{\text{tg } x - \text{tg } y} = C_1 + C_3 (\text{tg}^2 x + \text{tg } x \text{ tg } y + \text{tg}^2 y) + C_5 (\text{tg}^4 x + \ldots + \text{tg}^4 y) + \text{etc.}$

Nach einem bekannten goniometrischen Satz ist aber

$$\text{tg } x - \text{tg } y = \frac{\sin (x - y)}{\cos x . \cos y},$$

$$\text{also } \frac{x - y}{\text{tg } x - \text{tg } y} = \frac{(x - y) \cos x . \cos y}{\sin (x - y)}$$

Setzt man $x = y$, so wird $\cos x \cos y = \cos^2 x$ und nach 355, Zus. 3,

$$\frac{x - y}{\sin (x - y)} = 1,$$

man erhält also

5. $\cos^2 x = C_1 + 3 C_3 \text{ tg}^2 x + 5 C_5 \text{ tg}^4 x + 7 C_7 \text{ tg}^6 x + \text{etc.}$

und hieraus, weil

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} = 1 - \text{tg}^2 x + \text{tg}^4 x - \text{tg}^6 x + \text{etc.},$$

6. $1 - \text{tg}^2 x + \text{tg}^4 x - \text{tg}^6 x + \ldots = C_1 + 3 C_3 \text{ tg}^2 x + 5 C_5 \text{ tg}^4 x + 7 C_7 \text{ tg}^6 x + \ldots$

also durch Vergleichung der Coefficienten von je zwei entsprechenden Gliedern:

$$C_1 = 1 \quad \text{oder} \quad C_1 = 1$$
$$3\,C_3 = -1 \qquad C_3 = -\frac{1}{3}$$
$$5\,C_5 = 1 \qquad C_5 = \frac{1}{5}$$
$$7\,C_7 = -1 \qquad C_7 = -\frac{1}{7}$$
$$\text{rc.} \qquad \text{rc.}$$

und somit ist die Richtigkeit des in Rede stehenden Ausdrucks erwiesen.

Anmerkung 1. Diese Reihe wurde zuerst mitgetheilt von Jacob Gregory im J. 1671, später von Leibnitz. Gleichwohl ist es der letztere, nach dem sie gewöhnlich ihren Namen führt.

Zus. 1. Ist $x = 45^0 = \frac{\pi}{4}$, also $\operatorname{tg} x = 1$, so erhält man:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} - \text{rc.}$$

Anmerkung 2. Da die Reihe in dieser ihrer ursprünglichen Gestalt zu wenig convergirt, um mit Nutzen zu wirklichen Berechnungen gebraucht zu werden, so hat Euler dieselbe auf folgende Weise umgeformt.

Es sei $x + y = \frac{\pi}{4}$, also $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$,

mithin $\operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} y}$, also, wenn man $\operatorname{tg} y = \frac{1}{2}$ setzt,

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Hieraus erhält man

Zus. 2. $$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1}{5\,.\,2^5} - \frac{1}{7\,.\,2^7} + \text{rc.} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} - \frac{1}{7\,.\,3^7} + \text{rc.} \end{cases}$$

Fünfter Abschnitt.

Peter Nieuwland's

gewesenen Professors zu Leyden

Lösung der Aufgabe: den größten unter allen Würfeln zu finden, welche sich durch einen gegebenen Würfel hindurchschieben lassen*).

---

716. Es sei ABCD (Fig. 247) die obere Endfläche des gegebenen Würfels, ACFE der Schnitt einer durch die Diagonale AC gehenden senkrechten Ebene, G der Mittelpunct des Würfels, HGL eine Senkrechte durch G auf AC gezogen. Aus G ziehe beliebig die Gerade GP, nimm auf ihr einen beliebigen Punct J und errichte in diesem die Senkrechte KJQ und ziehe JO senkrecht auf AH; durch den Punct O in der Ebene und innerhalb des Dreiecks ABC ziehe eine Gerade, die senkrecht auf AC, verlängere sie beliebig bis M, und errichte auf ihr in M eine Senkrechte MN.

Denkt man sich nun dieselbe Construction in der andern Hälfte ADC der obern Endfläche, eben so an der andern Seite von HL und an der untern Endfläche des Würfels wiederholt, und darauf den Würfel geschnitten durch Ebenen, von denen die eine senkrecht auf AF durch KJ, die andere senkrecht auf ABCD durch MN gelegt ist, so wird man ein Würfelstück übrig behalten, durch welches man ein gerades und rechtwinkeliges Parallelepipedum hindurchschieben kann, dessen eine Dimension $= 2$ MO, die andere $= 2$ JG ist, während die dritte unbestimmt bleibt.

Wird verlangt, daß ein solches Parallelepipedum ein Würfel sei, so ist nur nöthig, OM $=$ GJ zu nehmen.

Es sind verschiedene Schnitte möglich, welche Oeffnungen geben, durch welche sich inhaltsgleiche Parallelepipeda oder Würfel hindurchschieben lassen. Denn beschreibt man aus G mit GJ als Radius den Kreisbogen JiS, nimmt auf ihm den beliebigen Punct i, errichtet die Senkrechten kiq und io, und aus o die Senkrechte om $=$ OM, so geben die durch KJQ und kiq geführten Schnitte Oeffnungen, welche in Beziehung auf die Größe der durchschiebbaren Parallelepipeda mit einander übereinstimmen.

Wird gefordert, daß das durchzuschiebende Parallelepipedum nicht blos überhaupt ein Würfel, sondern ein dem gegebenen inhaltsgleicher Würfel sei, so muß man OM $=$ GJ $=$ GH $= \frac{1}{2}$ AB nehmen. Auch dieser Bedingung kann durch mehr als einen Schnitt Genüge geleistet werden. Wird der Winkel HGJ kleiner, so nimmt auch AK und das Stück des Würfels AKQ ab. Denkt man sich AK durch fortwähren-

---

*) Man erinnere sich dessen, was früher in der dritten Anmerkung zu 485 über diesen Gegenstand gesagt worden ist.

des Abnehmen unendlich klein geworden, so fallen die Puncte P, O, J und H auf einander; es ist BH > HG und mithin auch > MJ.

Entfernt sich der Punct O von H, so kömmt natürlich M immer näher der Geraden AB; gesetzt nun es falle O in T, wenn M mit U auf AB zusammenfällt, d. h. also, es ist UT = GJ = $\frac{1}{2}$ AB, so ist T der letzte Punct auf HA unter denen, für welche ein mit dem gegebenen inhaltsgleicher Würfel durch die entstandene Oeffnung sich hindurchschieben läßt. Es versteht sich dabei von selbst, daß in der Praxis der Punct U niemals im vollen Sinne des Wortes auf AB liegen kann. Es soll nachher noch ein Wort über diesen Fall gesagt werden.

Fällt der Punct O zwischen H und T z. B. in x, so lassen sich die in Rede stehenden Schnitte an dem Würfel so führen, daß durch die entstandene Oeffnung ein Würfel sich hindurchschieben läßt, der größer ist, als der gegebene selbst, und es läßt sich auch hier ein und derselbe Würfel (dem Inhalte nach) durch verschiedene Schnitte erhalten.

Es fragt sich nun, welches die Lage des Punctes O sein müsse, damit der möglich größte Würfel durch die entstandene Oeffnung hindurchgehe.

Man nehme an, es bezeichne x die gesuchte Lage unseres Punctes. Soll diese Annahme richtig sein, so müssen nothwendig J, O und P zusammen (in x) fallen; außerdem muß M auf der Linie AB (in y) und GJ = OM (hier also Gx = xy) sein.

Auflösung.

Im Dr. Axy ist W. x = 90°, W. xAy = 45°, also yx = Ax = xG.
Es ist ferner

$$AH_q = \frac{1}{2} AB_q = \frac{1}{2} HL_q = 2\ GH_q$$
$$AG_q = AH_q + GH_q = 3\ GH_q$$
$$AG_q = Ax_q + Gx_q + 2\ Ax_r xH$$
$$= 2\,Ax_q + 2\,Ax_r xH = 2\,Ax_q + 2\,Ax_r(AH - Ax)$$
$$= 2\,Ax_r AH,$$

also $3\ GH_q = 2\ Ax_r AH$
und $Ax : 3\ GH = GH : 2\ AH$
mithin auch $Ax_q : 9\ GH_q = GH_q : 4\ AH_q$
oder $Ax_q : \frac{9}{2} AH_q = \frac{1}{2} AH_q : 4\ AH_q$
$Ax_q : 9\ AH_q = AH_q : 16\ AH_q = 1 : 16$, also
$Ax = \frac{3}{4}$ AH, und $2\ Ax = \frac{3}{4}$ AC

Man ist dadurch zu folgender einfachen Auflösung unserer in Rede stehenden Aufgabe gekommen:

> Die Seite des möglich größten Würfels, der sich durch einen gegebenen hindurchschieben läßt, beträgt $\frac{3}{4}$ von der Länge der Diagonale einer Gränzfläche dieses letztern.

Zus. 1. Auch die Größe des Winkels xGH läßt sich leicht bestimmen.

Zieht man HW, so ist:

$$Hx : HW = Gx : GH,$$

also weil $Gx = Ax = 3\ Hx$,

auch $GH = 3\ HW$

mithin, wenn man $GH = 1$ setzt,

$$HW = \sin xGH = \frac{1}{3} = 0{,}3333333\ ..$$

und deshalb nahe $xGH = 19^\circ\ 28'\ 16''$

Zus. 2. Die Kanten beider Würfel verhalten sich zu einander $= 1 : \frac{3}{4}\sqrt{2} = 1 : 1{,}06066..,$

also die Würfel selbst $= 1 : (1{,}06066..)^3 = 1 : 1{,}19324$

oder der möglich größte Würfel, welcher sich durch einen gegebenen hindurchschieben läßt, ist 1,19324 mal so groß als dieser selbst.

Anmerkung 1. Das so eben Mitgetheilte liefert ein Beispiel einer Aufgabe aus der wichtigen Lehre vom Größten und Kleinsten, die hier durch bloße Hülfe der Elementargeometrie gelöst ist.

Anmerkung 2. Der Punct T, den wir vorher als die Gränze derjenigen Puncte bezeichneten, für welche man Schnitte zu Würfeln erhält, die mit dem gegebenen inhaltsgleich sind, bestimmt sich leicht, wenn man erwägt, daß $UT = \frac{1}{4}\ AB = AT$ sein muß. Daher ist $HT = AH - AT$ oder, wenn man $AT = 1$ setzt,

$HT = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414213\ ..,$ also weil

$HT = \tan HGT,$

$HGT = 22^\circ\ 30'$

14 H C A B D I G F L E K

15 H A B C D F O P M L K I Q G

16 G D A H B C I D E K F L

17 A I B H E C D F G

23 A H B F E D

24 B D E A C

29 B A D F E I G

30 B A D F E I G g

35 B I A D C

36 B G A C

45 A Z Q I i N P B C F O L D M E

46 G C F E B

44 L Q P F K I H G

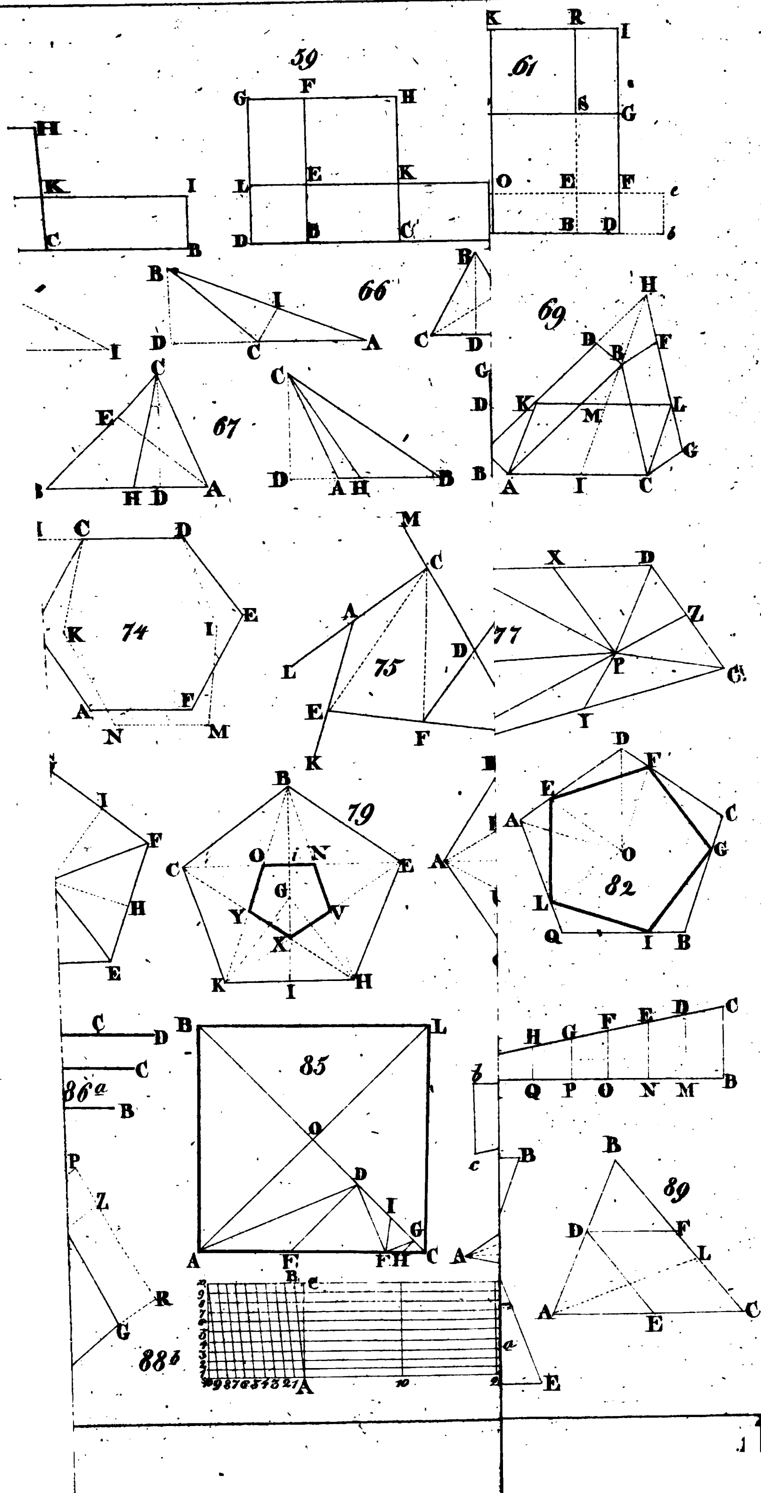
47 D G H A C E F B

43 E B a b α β C D

53 a² I H G ab ac P Q F ab b² bc N O E ac bc c² B C D

55 a C A E D F B

55 b C A E D F


59
61
66
67
69
74
75
77
79
82
85
86 a
88 b
89

92
95
96
98
101
102
103
104
111
114
116
117
121
122
123
125
126

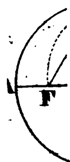
F



13











162.

164.

167.

166.

171.

178.

180.

181 a.

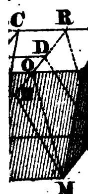
184.

191.

Zu

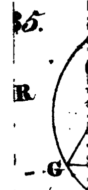




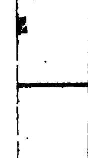


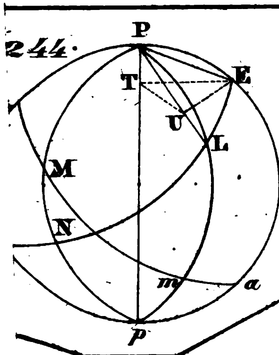


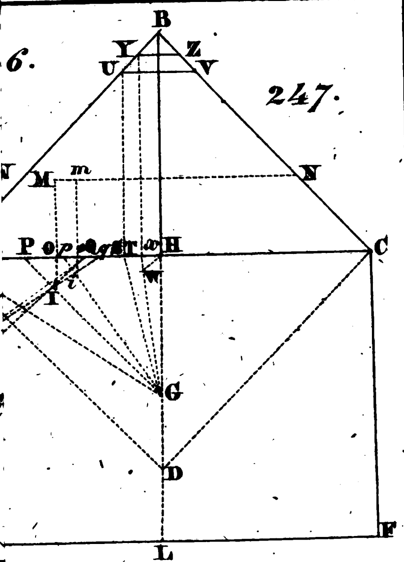


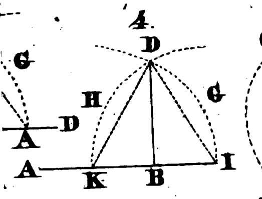


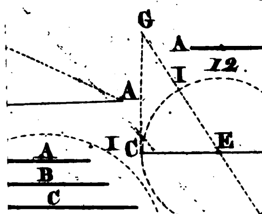


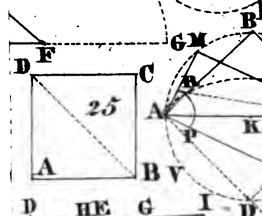


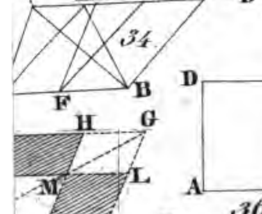

244.
P
T
E
U
L
M
N
m
a
p

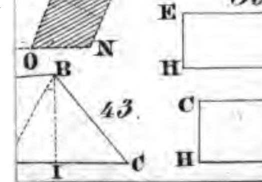

6.
B
Y
Z
U
V
247.
M
m
N
P
H
C
W
I
G
D
F
L

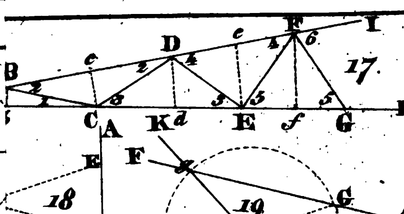

4.
D
G
H
A
K
B
I

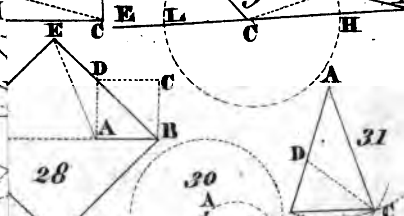

G
A
12.
I
E
C
A
B
C

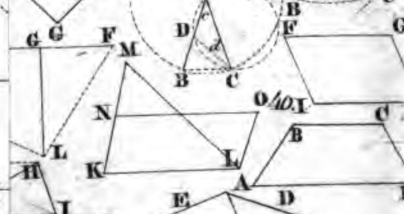

F
D
C
25
A
B
M
K
P
V
D


D
HE
G
I
34.
F
B
H
G
L
M
N
D
A


36
E
H
O
B
43.
C
I
C
H


D
F
I
17.
B
C
A
K
d
E
f
G

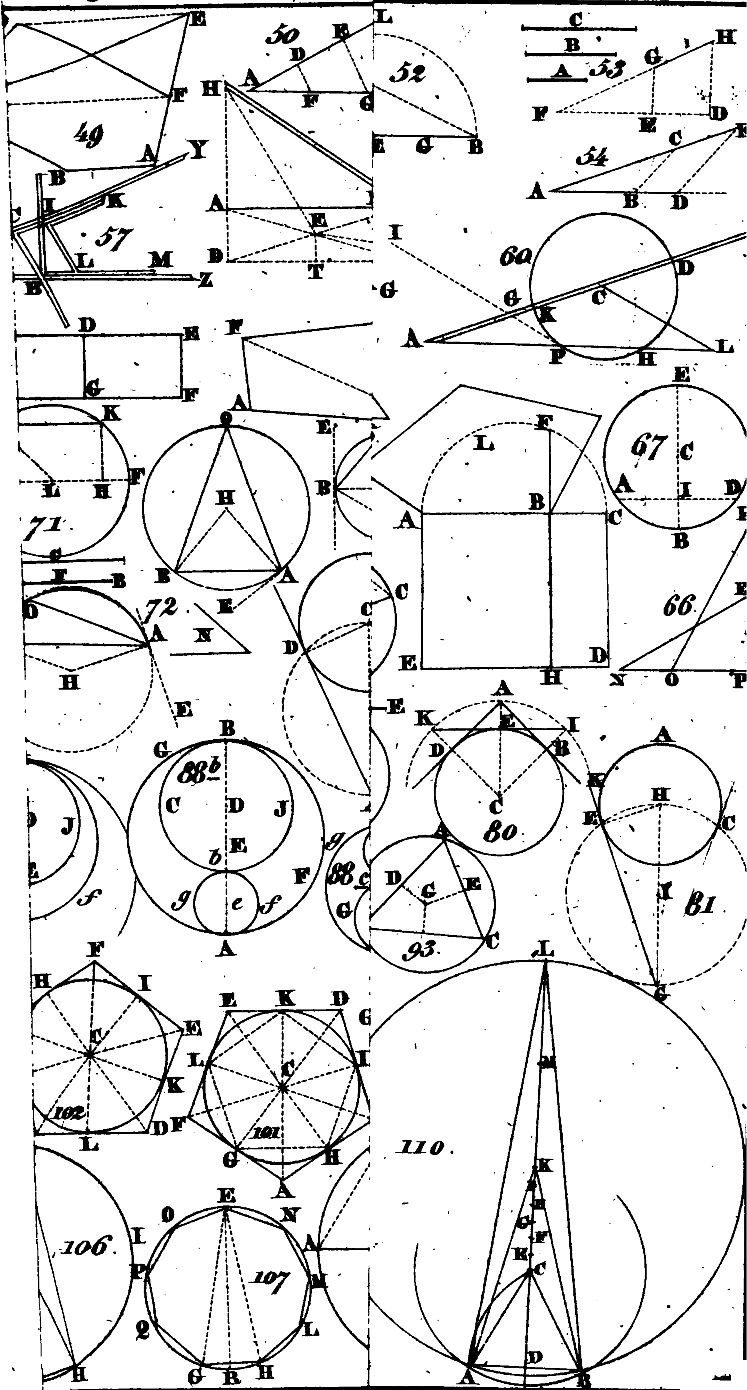

E
18
C
F
19
G
E
L
C
H
E
D
C
A
B

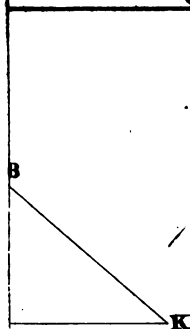

28
30
A
D
B
C
A
31
D
B
C
G
F
M

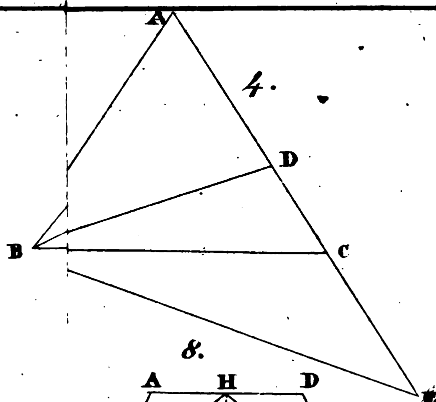

N
K
L
40
C
B
A
D
E
C
F
45
A
I
H
G
L

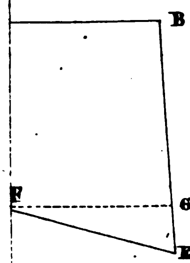


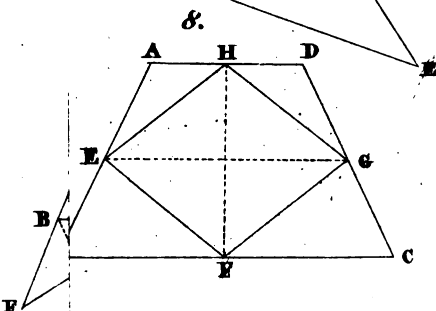


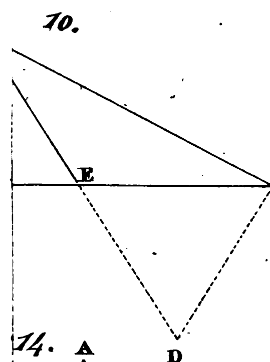


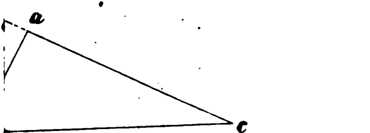

B
K

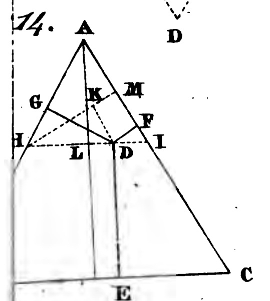

A
4.
D
B
C
E

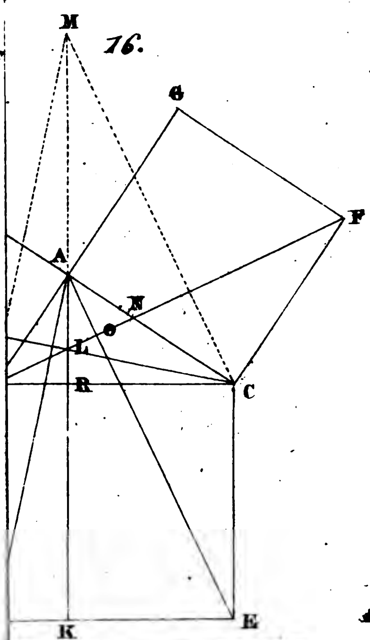

B
F
G
E

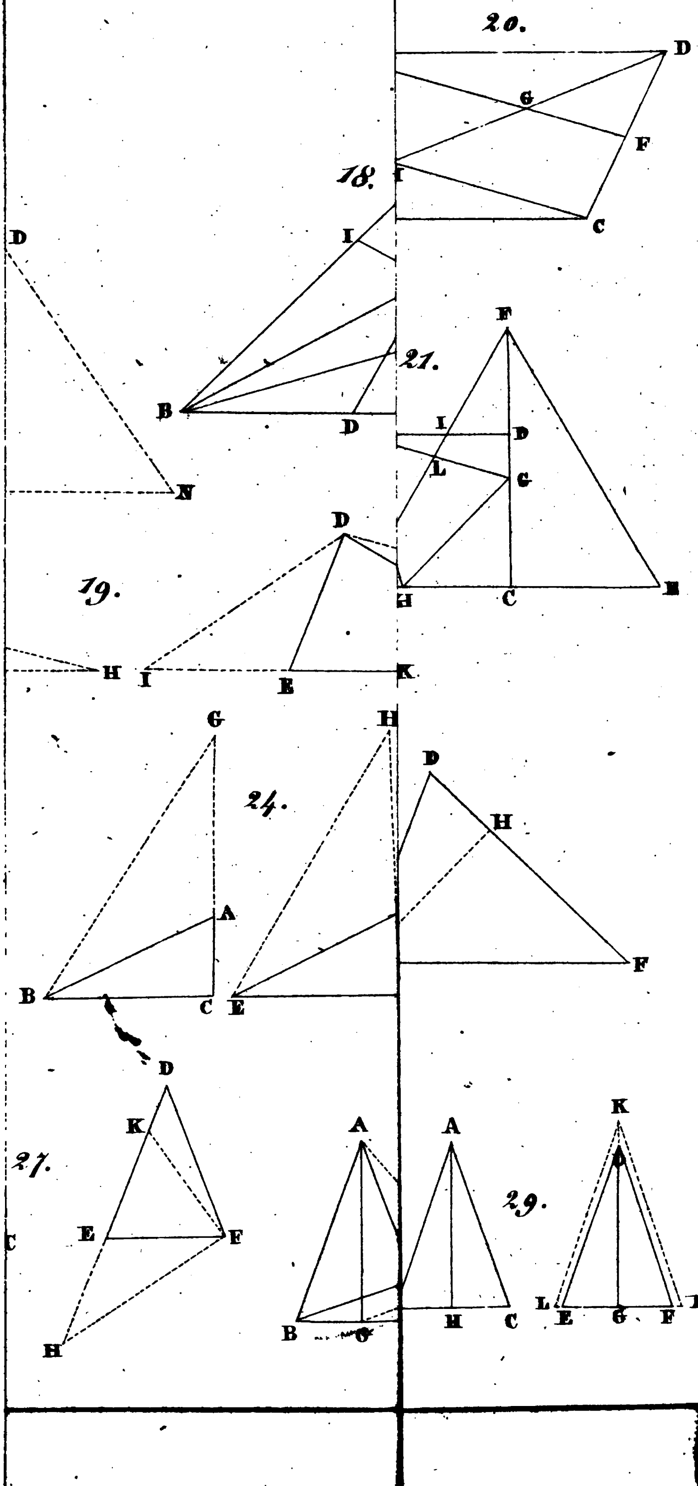

8.
A
H
D
E
G
B
F
C
F


10.
E
D


a
c


14.
A
G
K
M
F
L
D
I
C
E

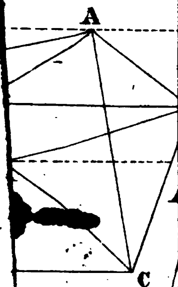

M
16.
G
F
A
N
O
L
R
C
K
E

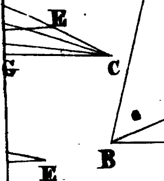

20.
D
G
F
I
C
18.
D
I
B
D
N
21.
F
I
D
L
G
H
C
E
D
19.
H
I
E
K
G
H
24.
D
H
A
B
C
E
F
D
K
27.
E
F
C
H
A
A
K
29.
B
O
H
C
L
E
G
F

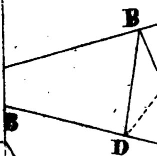


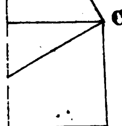


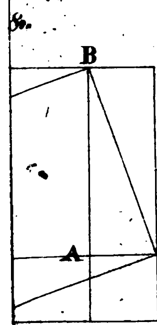
nhängen

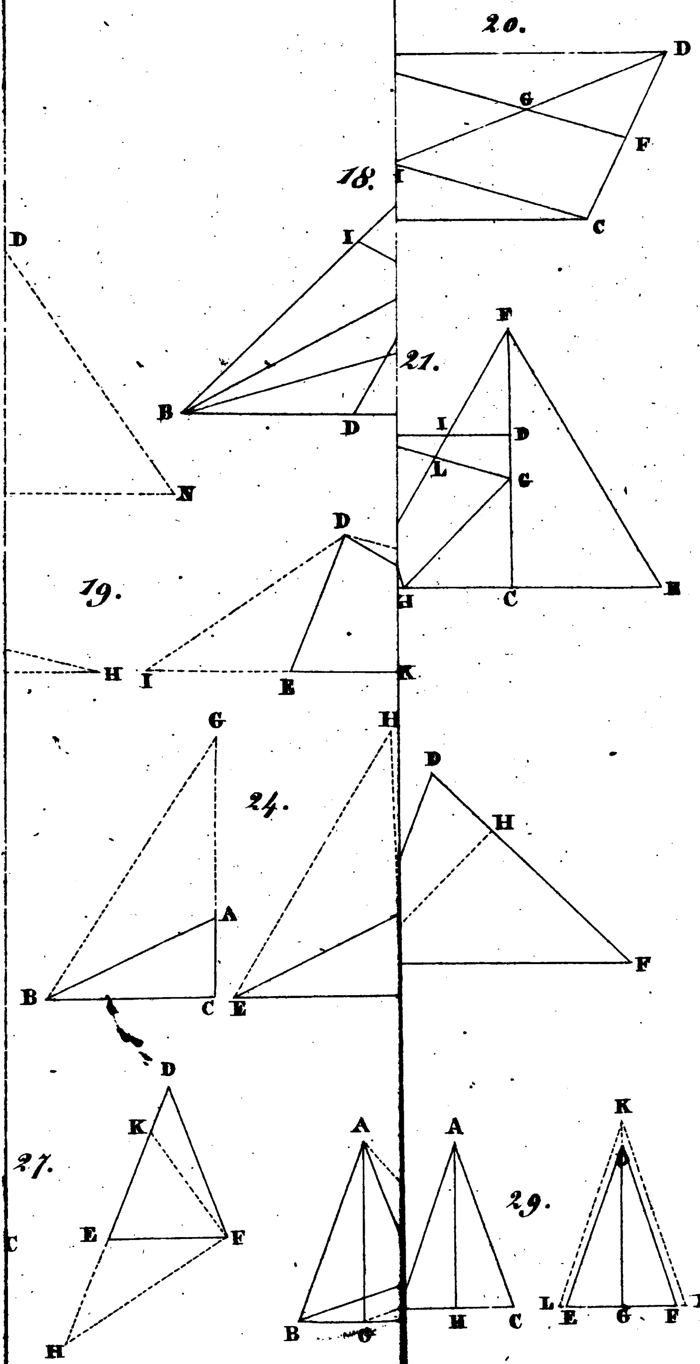











20.
D
G
F
C
18.
I
D
B
N
21.
F
I
D
L
G
H
C
E
19.
D
H
I
E
K
G
H
24.
D
H
A
B
C
E
F
D
K
27.
E
F
C
H
A
A
29.
K
B
O
H
C
L
E
G
F



nhängenn

A

C

8.

E

C

G

B

E

B

B

D

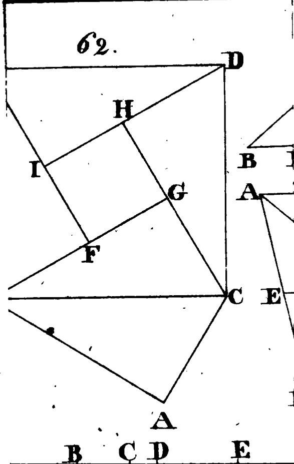
C

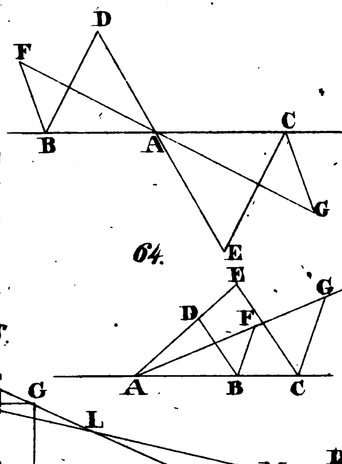
8.

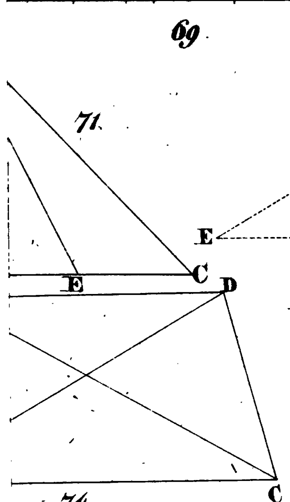
B

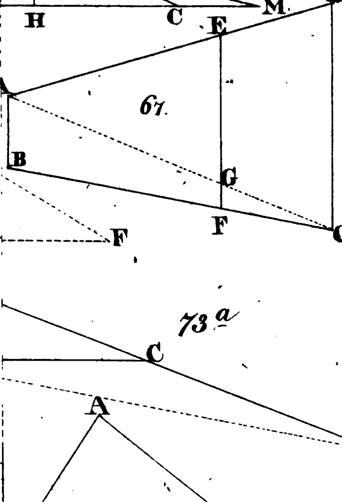
A

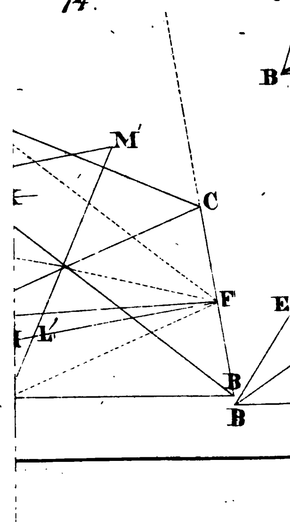
C

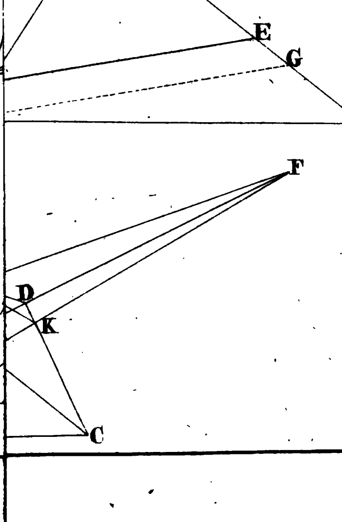

62.
D
H
I
G
F
C
A
B
C
D
E
B
A
E

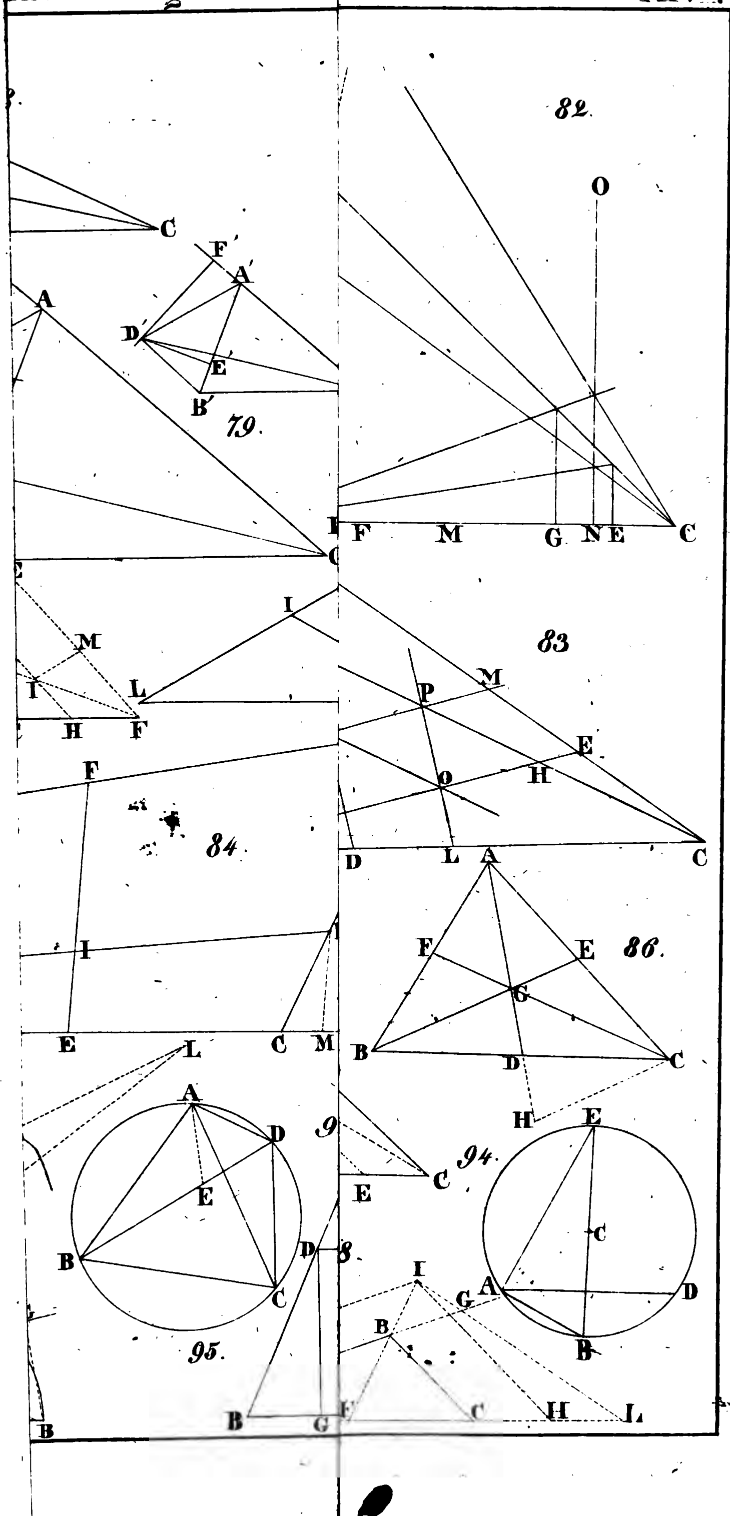

D
F
B
A
C
G
E
64.
E
D
F
G
A
B
C


69.
71.
E
C
E

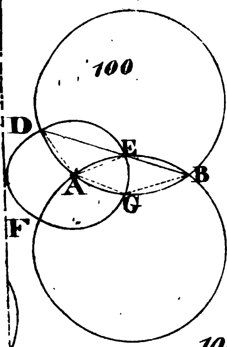

G
L
H
C
M
D
E
67.
B
G
F
C
F

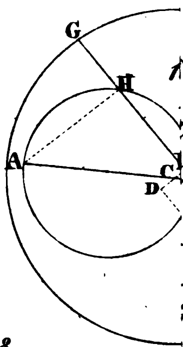

D
C
74.
M'
C
F
L'
B
B

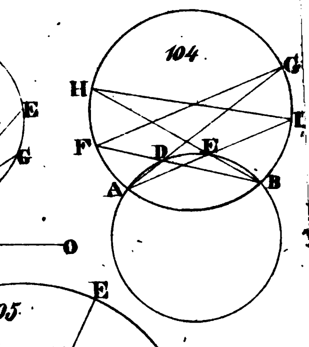

73 a
C
A
F
E
G
B
C
F
E
D
K
C

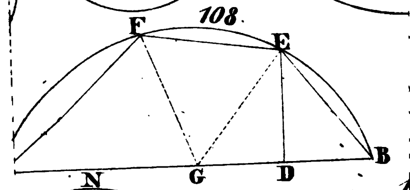


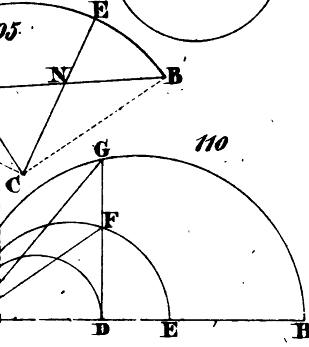
C
F′
A′
A
D′
E′
B′
79.
82.
O
F
M
G
N
E
C
I
M
I
L
H
F
83.
M
P
E
O
H
D
L
A
C
F
84.
I
E
C
M
86.
F
E
G
B
D
C
H
L
A
D
E
B
C
95.
C
E
94.
E
C
D
I
A
G
D
B
B
F
C
H
L
B
G

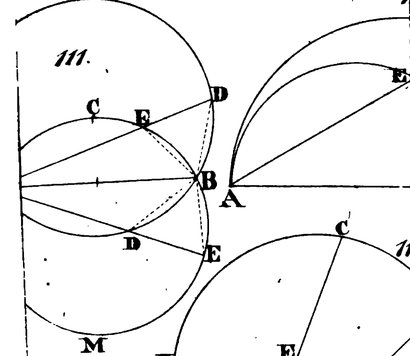

100
D
E
B
A
G
F

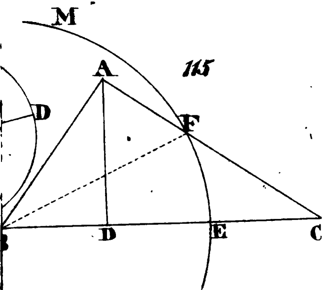

G
H
A
C
D
E

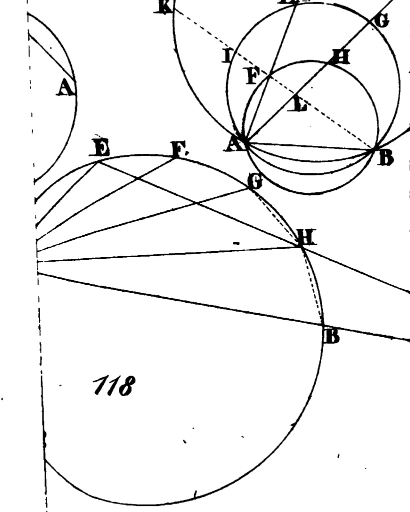

104
H
G
L
F
D
E
A
B
O

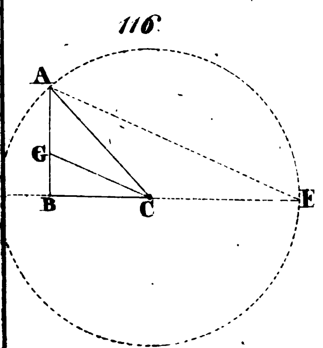

108
F
E
N
G
D
B

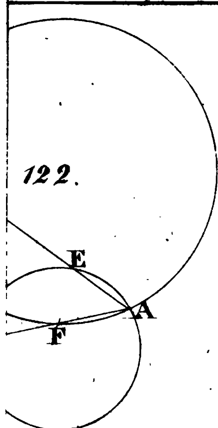

E
N
B
C
G
110
F
D
E
B

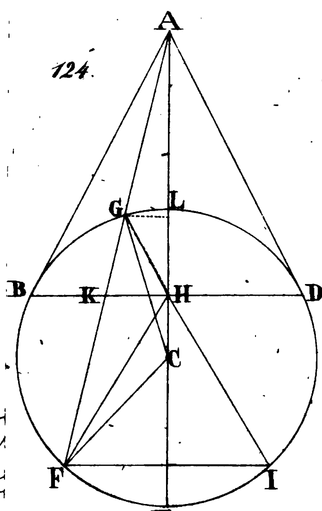

111
C
E
D
B
D
E
M
A
E

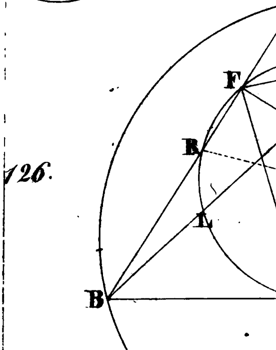

M
A
115
D
F
D
E
C

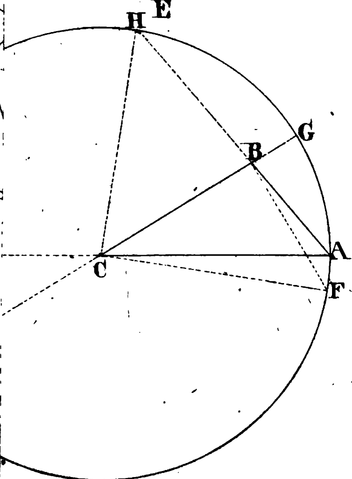

C
E
K
G
I
F
H
L
A
B
A
E
F
G
H
B
118

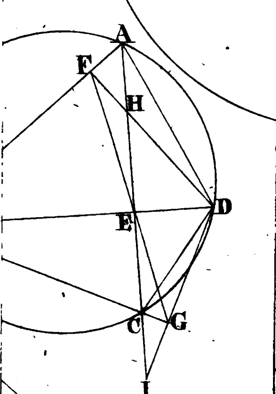

116
A
G
B
C
E

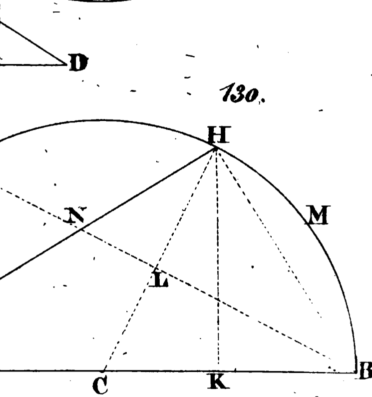

122.
E
A
F


A
124.
G
L
B
K
H
D
C
F
I
E


F
B
L
126.
B


H
G
B
A
C
F


A
F
H
D
E
C
G
I

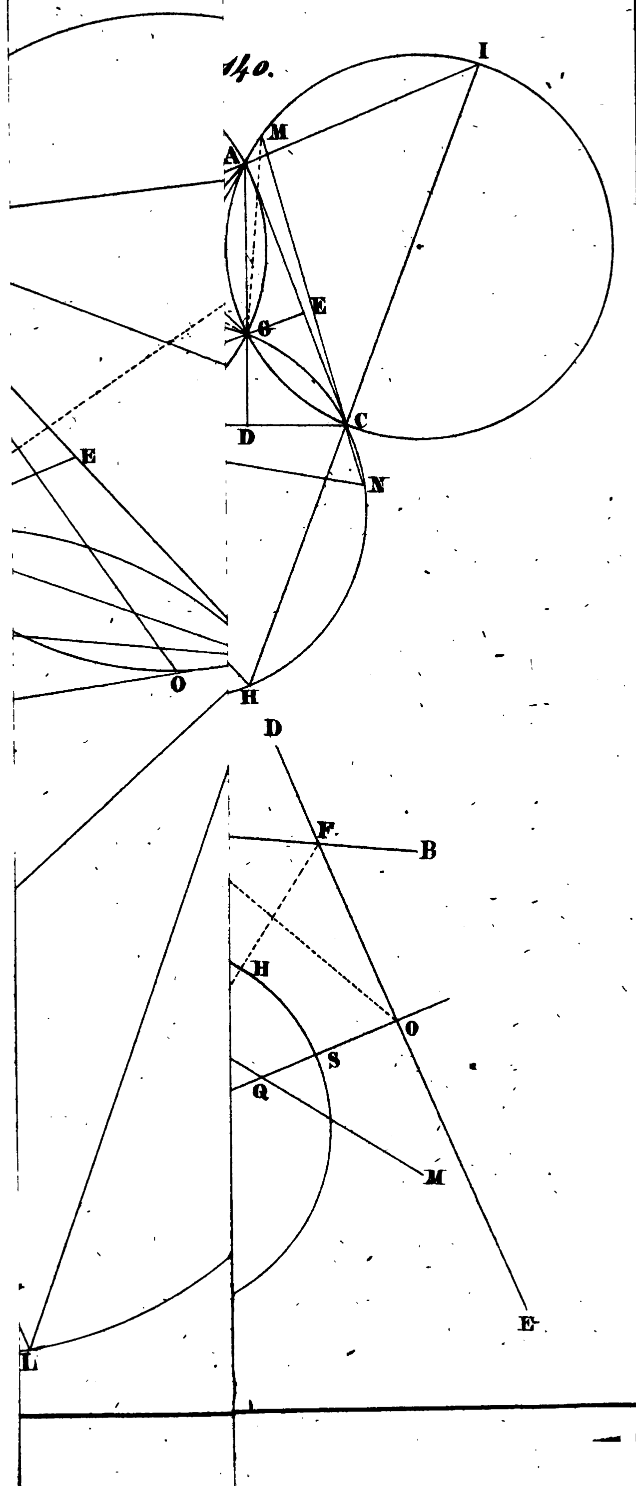

D
130.
H
N
M
L
C
K
B

133.

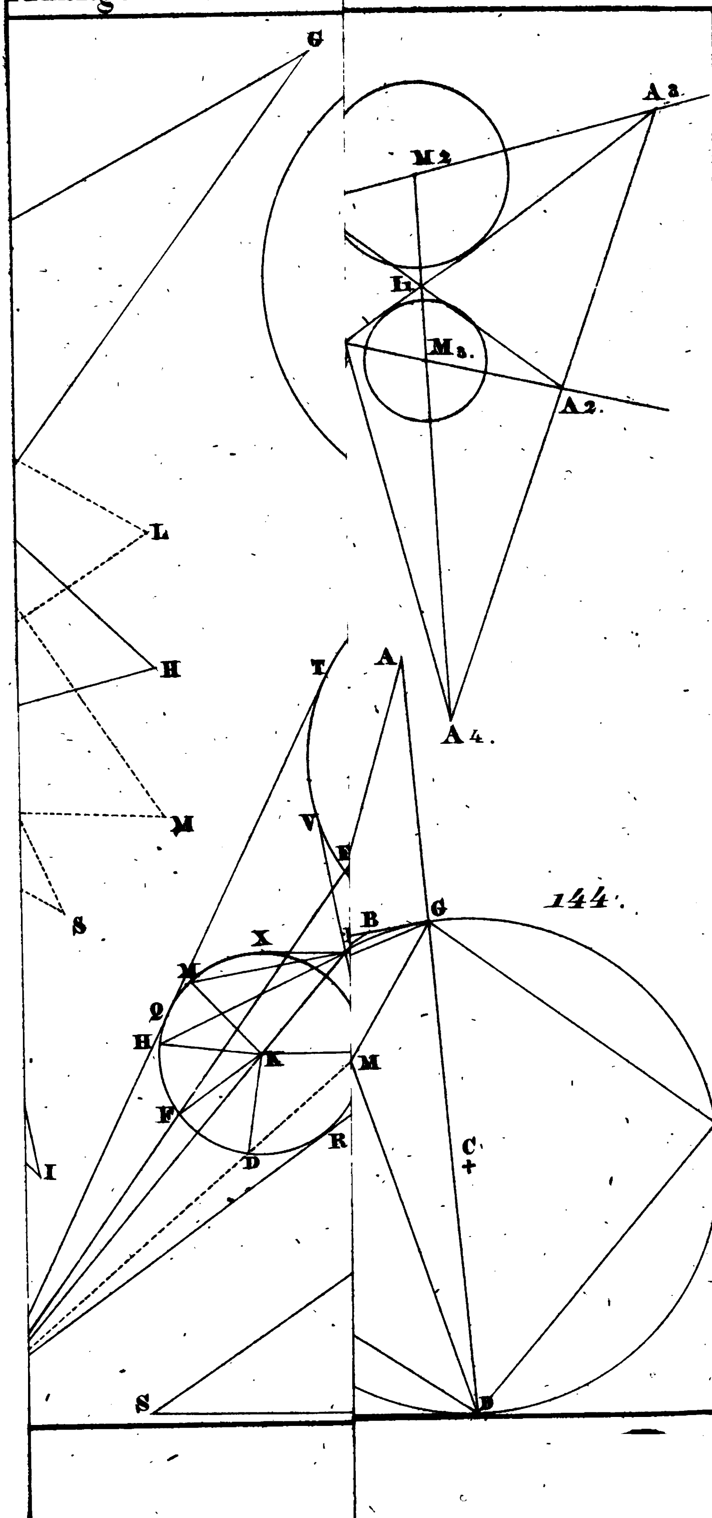
137.

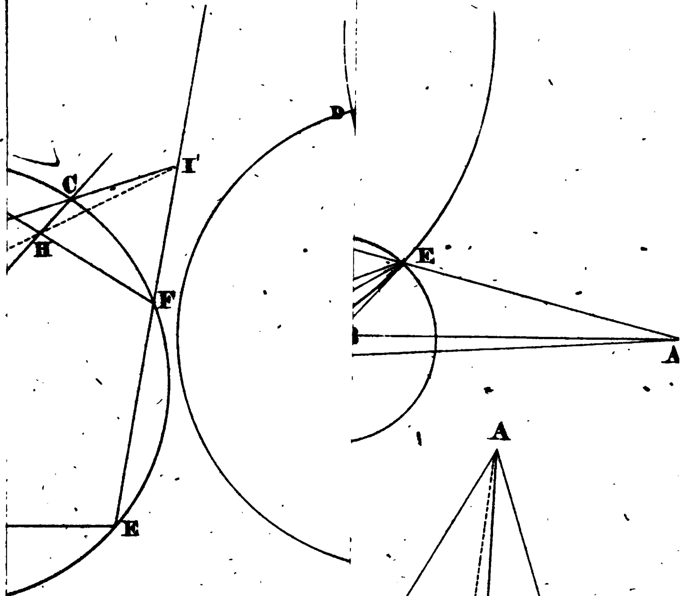
136.a

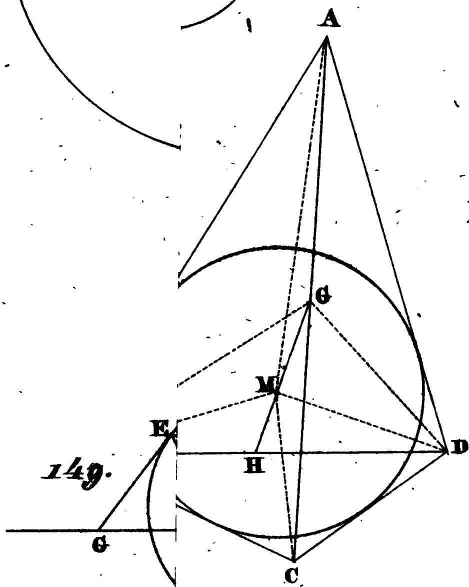


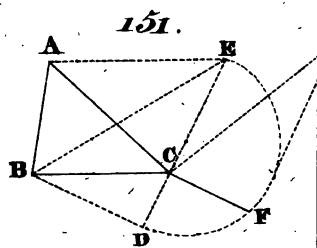


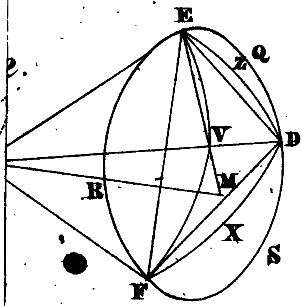
140.
I
M
A
E
G
C
D
N
E
O
H
D
F.
B
H
O
S
Q
M
E
L

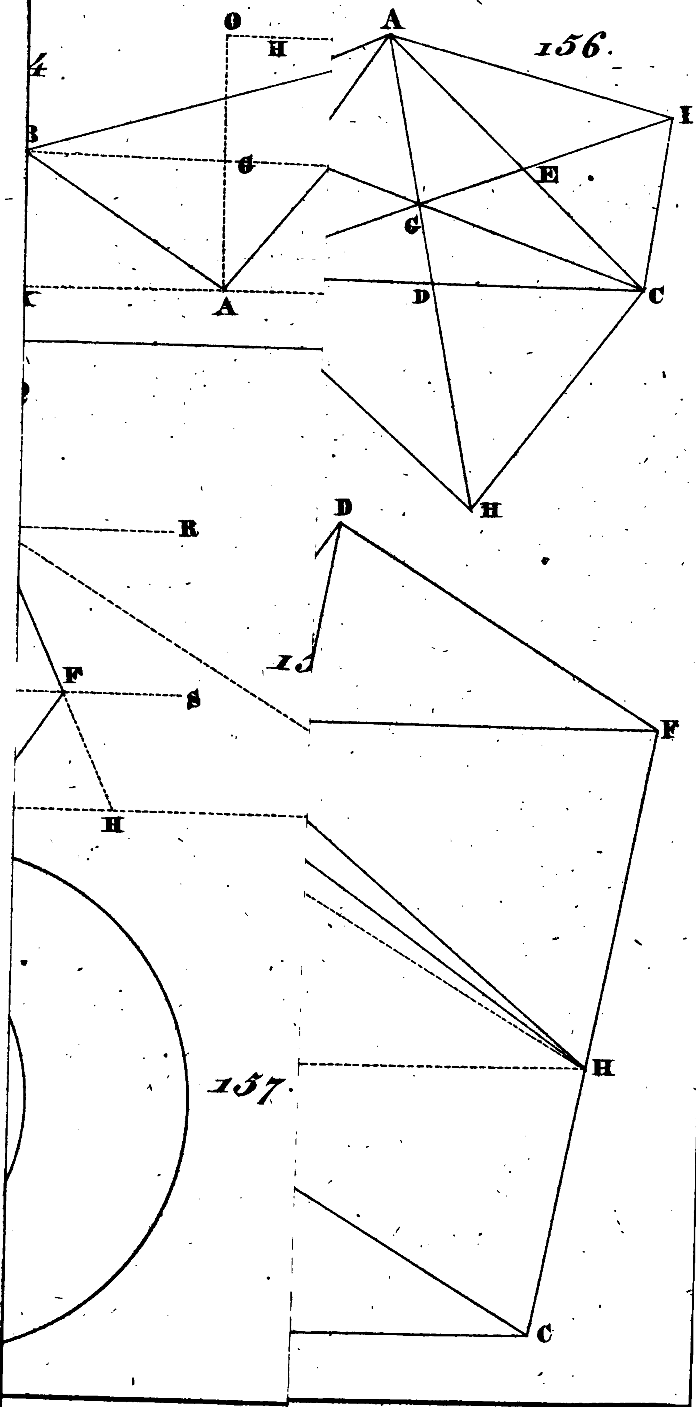

G
A3.
M2
M3.
A2.
L
H
A
T
A4.
M
V
S
144.
B
G
X
Q
H
K
M
F
R
D
C
I
S
B


D
I'
C
H
F
E
E
A


A
G
M
E
D
H
149.
G
C
F


151.
A
E
B
C
F
D


E
Z
Q
V
D
M
R
X
S
F


156.
A
I
E
G
C
D
H
4.
O
H
B
G
C
A
R
F
S
H
D
15
F
H
C
157.